

Einleitung

Die Mechanik besitzt als historisch ältestes Teilgebiet der (Klassischen) Physik, insbesondere der „Theoretischen Physik“ und der „Festkörperphysik“, vielfältige Facetten. Untersuchungsgegenstand der Mechanik ist im weitesten Sinne die Beschreibung der Bewegungen von Festkörpern und Fluiden. Die Ingenieursmechanik wird klassisch in die Teilgebiete Statik, Dynamik und Festigkeitslehre strukturiert, wobei die Dynamik in die Bereiche Kinematik und Kinetik gegliedert wird.

Der konzeptionelle Apparat, der die physikalischen Zusammenhänge erklären soll, entsteht durch die Akzeptanz in einer fachlichen Gemeinschaft. Dementsprechend ist das Meinungsklima verantwortlich für die Durchsetzung einer Theorie. Da das Meinungsklima von der Anschauung und damit der Kultur abhängt, haben sich in den verschiedenen Teilen der Welt auch unterschiedliche Erklärungsversuche für physikalische Phänomene herauskristallisiert. Ein Beispiel ist das Konzept der Kraft, welches in der Mechanik der westlichen Welt eine zentrale Rolle einnimmt. Jainas (Anhänger des Jainismus, einer transtheistischen Religion im alten Indien) hingegen kommen gänzlich ohne die Erwähnung der Kraft aus [96], (S. 4 und 5). Auch Heinrich Hertz (1857-1894) trachtet nach einer kräfteleeren Mechanik [217], (Seite 137.). Einen weiteren Aspekt führt Mauguin in [151], (S. 265) bzgl. der Entwicklung der modernen Kontinuumsmechanik an. Er weist darauf hin, dass „[...] Russian authors deserve also attention for attempts at a synthetic vision that were belittled internationally for linguistic or ideological reasons. [...]“.

Das Studium der Entwicklung einzelner physikalischer Konzepte in den verschiedenen Kulturen ist hochinteressant und sehr anspruchsvoll. Um das eigentliche Ziel dieses Buches, die (Weiter-)Entwicklung vielversprechender Basiskonzepte für die Anwendung zum Erhalt von Kunstwerken und Kulturobjekten, zu erreichen, muss eine Vorauswahl getroffen werden. Bedingt durch die eigene Ausbildung der Autorin beschränkt sich diese Schrift auf die westlichen Theorien der Mechanik in dieser Welt.

In ihren Anfängen wird die westliche Mechanik (im Weiteren kurz „Mechanik“) aufgrund von praktischen Fragestellungen, wie die Bestimmung der Dichte von Festkörpern (Archimedes, um 250 v. Chr.), die Konstruktion eines Perpetuum mobile in Form eines selbstdrehenden Rades (Villard de Honnecourt um 1200 n. Chr.) oder die eines Hebewerkzeuges wie den Flaschenzug (Vitruvius um 1550 n. Chr.) für die Menschen interessant [217] (Tafel I und III). Infolge ihres praktischen Bezuges ist die Mechanik an den Technischen Universitäten im Ingenieurwesen in einem mindestens gleich großen Maße wie in der Physik verankert. Die Ziele und Betrachtungsweisen der Physiker und Ingenieure sind unterschiedlich, wobei ausgeprägte Überlappungen existieren. Eine Schnittstelle ist der Wunsch von Ingenieuren, eine generalisierte Mechanik zu erarbeiten (siehe z. B. [152]), was wiederum eine große Schnittmenge mit der Mathematik bedingt.

Tatsächlich etabliert sich die Mechanik durch die Arbeiten von Johannes Kepler (1571-1630), Galileo Galilei (1564-1642) und schließlich Isaac Newton (1643-1727) als dauerhafte Wissenschaft. Hierüber schreibt István Szabó (1906-1980) in [217] (Seite 3) bezüglich der *Philosophiae naturalis principia mathematica*, verfasst von Isaac Newton im Jahr 1686: „[...] Es ist nach GALILEIS (1564-1642) *Discorsi* (1638) der endgültige Durchbruch zur stetigen Weiterentwicklung der Mechanik. [...]“. Tatsächlich ist es Newton, der mittels acht Definitionen über Masse, Bewegungsgröße, Trägheitskraft, eingepprägten Kräfte und Zentripetalkraft sowie drei Axiomen (1. Trägheitsgesetz, 2. Gleichheit der Bewegungsgröße mit der bewegendenden Kraft, 3. $actio=reactio$), ein populäres und weitreichendes Grundgerüst

der Mechanik erklärt. Newtons Axiome und Definitionen entfachen bis heute kontroverse Diskussionen über Bewegungsgesetze und Erhaltungsgrößen. Seine Erkenntnisse leitet Newton hauptsächlich aus seinen Beobachtungen von Würfeln und der Himmelsmechanik ab [217], (Seite 7). Christiaan Huygens (1629-1695) trägt wesentlich zu dieser Entwicklung bei. Parallel zu den Fortschritten in der Festkörpermechanik beschäftigen sich Gelehrte, wie René Descartes (1596-1650) mit hydro- und aerodynamischen Untersuchungen insbesondere der Wirbeltheorie und widerstandsbehafteten Bewegungen in Fluiden.

Zwischen Newton und Leibniz (1664-1716) entbrennt eine Kontroverse um die Urhebererschaft der Differential- und Integralrechnung. Heute gelten beide als Urheber. Darüber hinaus bricht der philosophische Streit über das wahre Kraftmaß aus: Während Newton und Descartes das Kraftmaß als Erhaltungsgröße sahen, hielt Leibniz Erhaltungsgrößen für fundamentaler. Leibniz beschäftigte sich mit Stößen und definierte die „lebendige Kraft“, was dem Impuls nahe kommt [217], (Seite 42 ff.). Im 18. Jahrhundert führt Leonhard Euler (1707-1783), inspiriert durch die Arbeiten von Johann Bernoullis Strudeltheorie, das Prinzip des Freischnitts ein und formuliert für ein infinitesimales Massenelement den Impuls- und schließlich den Drehimpulssatz [217], (Seite 20-22). Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) führt im Jahr 1743 die Trägheitskräfte in die Impuls- bzw. Drehimpulsbilanz in Form von eingepprägten Kräften ein. Joseph-Louis Lagrange (176-1813) modifiziert das Prinzip von d'Alembert im Jahr 1811, was die Basis seiner Entwicklung der Lagrangeschen Gleichungen ist [217], (Seite 130 ff.). Hierin benutzt Lagrange die Variationsrechnung, welche maßgeblich von Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli und schließlich von Euler sowie Lagrange entwickelt worden ist. Ausgangspunkt der Überlegungen ist das „Problem der Brachistochrone“ [217], (Seite 108 ff.).

Neben dem Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung,

$$\int (d\underline{F}^e - d\underline{m}\underline{a})\delta\underline{r} = 0, \quad (0.1)$$

dominiert das Prinzip von Hamilton (benannt nach William Hamilton, 1805-1865),

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta A) dt = 0 \quad (0.2)$$

mit der Lagrangeschen Funktion $L = T - U$ (T := kinetische Energie, U := potentielle Energie und der Arbeit der potentiallosen Kräfte A , die klassische Mechanik [217], (Seiten 128, 136.). Während Ersteres ein Differentialprinzip ist, ist das Prinzip von Hamilton ein Integralprinzip. Mit diesen beiden Prinzipien gelingt es Bertram und Forest in [19] aus dem Prinzip der virtuellen Leistung alle anderen Bilanzgleichungen der Mechanik herzuleiten (siehe Abschnitt 1.1).

Nach Carl-Friedrich Gauss (1777-1855) besagt das Prinzip des kleinsten Zwanges, dass „[...]die wirkliche Bewegung in möglichst großer Übereinstimmung mit der freien Bewegung verläuft oder unter möglichst kleinem Zwang.“ [217], (Seite 136).

Die Elastizitätstheorie nimmt ihren Anfang mit der Frage Galileis nach der Bruchgrenze eines Tragwerkes (1663) und den daraus resultierenden Festigkeitsuntersuchungen. Dennoch wird Robert Hooke (1635-1703) zuerkannt, das erste Elastizitätsgesetz aufgestellt zu haben [217], (Seite 355.). Die Fundamente der Kontinuumsmechanik erstellt Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) um 1822.

Mit den Verformungen von elastischen Kontinua beschäftigen sich Euler und die Bernoullis (Balkenbiegung), Charles Augustin de Coulomb (1736-1806, Balkenstatik), Claude Navier (1785-1836, Balkenstatik), Ernst Chladni (1756-1827, Theorie des Klanges bei Platten), Jakob II Bernoulli (1759-1789, Platte) und Gustav Kirchhoff (1824-1887, Platte). Die zuletzt genannte und weiter geführte Plattentheorien werden in Abschnitt 1.3.2 näher behandelt [217], (Seite 351 ff.).

Die Hydromechanik entsteht parallel zur Festkörpermechanik und beginnt mit dem Archimedischen Prinzip (ca. 250 vor Chr.). Da die Mechanik der Fluide ein eigenes Gebiet ist, welches in dieser Arbeit lediglich in Abschnitt 9.3 gestreift wird, wird an dieser Stelle auf [217], (Seite 143 ff.) verwiesen.

Im 20. Jahrhundert entwickelt sich das Bestreben die Kontinuumsmechanik mittels eines axiomatischen Apparates als fundamentale Wissenschaft zu begründen. Wissenschaftler, die maßgeblich daran beteiligt sind, sind u. a.: Albert Einstein (1879-1955), Clifford Truesdell (1919-2000), Ronald Rivlin (1915-2005), Walter Noll (1925-2017), Ingo Müller (1936-), Albrecht Bertram(1950-). Diese Thema wird in Abschnitt I aufgegriffen.

Dieser kurze geschichtliche Abriss der Entwicklung der Mechanik im westlichen Teil der Welt macht deutlich, dass die Gelehrten entweder durch praktische Probleme motiviert werden, an einem Thema in der Mechanik zu arbeiten, oder sie stoßen auf mathematisch-philosophische Unstimmigkeiten. Auch ist festzustellen, dass die Mechanik durch die entstandene Themenvielfalt und resultierenden Spezialisierungen immer weiter aufgefächert wird. Während es zu Zeiten Da Vincis und Leibniz Universalgelehrte sind, die die Mechanik entwickeln, sind es heute Wissenschaftler, die auf einem kleinen Gebiet mit einem extrem hohen Vertiefungsmaß tätig sind. Die Gebiete reichen auch in der Gegenwart von einer generalisierten anwendungsunspizifischen theoretisierten fast philosophischen Sicht bis zu einer anwendungsspezialisierten Betrachtung, wie in der Biomechanik, Baustatik/-dynamik, Bodenmechanik, Maschinendynamik usw. Hier ist die Mechanik eher Mittel zum Zweck und wird als Bau- oder Werkzeugkasten verwendet, um praktisch motivierte Fragestellungen zu lösen.

Aktuelle Lehr- und Forschungsgebiete in der Mechanik sind die Kontinuumsmechanik, Bruchmechanik, Mehrkörpermechanik, Dynamik etc. Die Computermechanik (computational mechanics) ist eine Entwicklung in der Gegenwart. Diese geht einher mit der Bereitstellung genügend leistungsfähiger Digitalrechner zur Behandlung komplexer, mechanischer Probleme seit Anfang der 1950er Jahre. Etablierte Lösungsmethoden sind z. B. die Finite Elemente Methode (FEM), die Finite Differenzen Methode (FDM) und die Mehrkörpersimulation (MKS) [206]. Diese Entwicklung ermöglicht die eindrucksvolle Visualisierung von Ergebnissen, was die fachübergreifende Kommunikation stark vereinfacht. Dies ist ein wichtiger Aspekt, denn der Aufwand, die Mechanik allgemein verständlich, anwendungsfreundlich und dennoch korrekt zu erklären, ist nicht zu unterschätzen.

Die Computertechnik schafft außerdem die Voraussetzung für das maschinelle Lernen (ML) und die Implementierung künstlicher Intelligenz (KI), um automatisiert aus großen Datenmengen, die z. B. bei der Zustandsüberwachung gewonnen werden, Modelle abzuleiten und das zukünftige Schädigungsgeschehen vorauszusagen. Wie sich im Verlauf dieser Arbeit zeigen wird, können ML und KI sinnvolle Werkzeuge sein, um Kunstwerke und Kulturobjekte präventiv und nachhaltig zu schützen.

Steht nicht die Mechanik im Zentrum des Interesses, sondern der Erhalt von Kunstwerken und Kulturobjekten, ist die Mechanik eines von vielen einzubeziehenden Fachgebieten. In der Fachwelt der Restaurierung und Konservierung werden die „Zehn Einflußfaktoren des Verfalls“ von Kunstwerken und Kulturobjekten („Ten Agents of Deterioration“) definiert. Diese sind in Abbildung 1 zusammengetragen. Die erst genannte Größe, „Physikalische



Abb. 1: Zehn Einflußfaktoren des Verfalls [37], [246]

Kräfte“, betrifft die Mechanik direkt. Überschneidungen existieren mit fast allen anderen Einflussfaktoren, wodurch für die Lösung der Probleme komplexe, multiphysikalische Betrachtungsweisen notwendig werden.

Technologische im Speziellen mechanische Entwicklungen bieten viele Möglichkeiten, den Erhalt von Kunstwerken und Kulturobjekten zu unterstützen. Sei es bei der Auslegung technischer Lösungen für den klimastabilen und schwingungsarmen Transport, der Ausstellung und der Lagerung im Depot (präventive Konservierung) oder zur Unterstützung der Restaurierung bei der Zustandsbestimmung und -überwachung der Objekte sowie bei der Planung restauratorischer Maßnahmen. Doch bis dahin ist es ein weiter Weg.

Inspiziert von dem Entwicklungsweg der Mechanik werden im Folgenden die für den Schutz von Kunstwerken und Kulturobjekten vor den „Physikalischen Kräften“ notwendigen Werkzeuge systematisch hergeleitet. Ausgangspunkt ist die Überlegung einer möglichst allgemein gültigen Formulierung des konzeptionellen Apparates.

Teil I

Statik und Dynamik komplexer mechanischer Systeme

Gegenstand der Mechanik ist die Beschreibung der Bewegung von materiellen Körpern. Abzählbar viele materielle Körper bilden ein komplexes mechanisches System. Verändert das mechanische System seine Lage oder seine Gestalt, ist seine Bewegung dynamisch. Verharrt das mechanische System in seiner Platzierung und ändert seine Gestalt nicht, handelt es sich bei der Bewegungsform um den statischen Grenzfall. In beiden Fällen ist zu klären:

1. Was ist ein materieller Körper?
2. Wie kann die Lage und die Lageveränderung beschrieben werden?
3. Was sind die Ursache und die Wirkung der Bewegung?

Wie bereits angedeutet, sind die Antworten abhängig von der Perspektive. In dieser Arbeit werden die unternommenen messtechnischen Untersuchungen mit den Werkzeugen der Kontinuumsmechanik beleuchtet. Die Wahl fällt auf die Kontinuumsmechanik, da diese durch die Verknüpfung mit der Differentialgeometrie und der Tensorrechnung zu einer generellen Theorie gereift ist, die nun für eine Vielzahl von Anwendungen geeignet ist ([49], S. V).

In der Kontinuumsmechanik ist ein materieller Körper eine kompakte, normale, orientierte, dreidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{B} mit dem Rand $d\mathcal{B}$ ([18], S. 67).

Es ist an dieser Stelle für die weiteren Erklärungen wichtig zu erinnern, dass eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathbf{M} ein topologischer Hausdorffraum ist. Ein topologischer Hausdorffraum wiederum ist ein topologischer Raum, der die Hausdorffeigenschaft, d.h. paarweise verschiedene Punkte x, y besitzen offene Umgebungen U_x, V_y , aufweist. Last but not least: Eine Topologie T besteht aus Teilmengen einer Grundmenge X und erfüllt folgende Voraussetzungen:

1. Die leere Menge ist Element von T : $\{\} \in T$.
2. Die Schnittmenge von Teilmengen von T ist Element von T .
3. Die Vereinigung von Teilmengen von T ist Element von T .

Die Grundmenge X und die Topologie T bilden gemeinsam den topologischen Raum $\{X, T\}$. Die topologische Struktur auf einer Menge ermöglicht die Übertragung intuitiver Lagebeziehungen wie „Nähe“ und „strebt gegen“ auf allgemeine Strukturen mit präziser Bedeutung. Eine dieser Strukturen ist die Karte um x , wobei $x \in \mathbf{M}$ und x offene Umgebungen U_x besitzt, die homöomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n sind. Der Homöomorphismus Φ zu U_x , kurz (U_x, Φ) , heißt Karte um x . Alle Karten um x und damit auch alle Koordinatensysteme um x sind gleichberechtigt ([18], S. 47).

Ein Beispiel für eine Karte ist ein Rechteck aus Aluminiumfolie, welche zu einem Torus gefaltet werden kann. Das Rechteck aus Aluminiumfolie ist die Karte des Torus'. Ein weiteres Beispiel ist die Sphäre, die bereichsweise auf eine rechteckige Fläche abgebildet wird. Um die gesamte Sphäre abzubilden, sind mehrere Rechteckflächen notwendig. Alle Rechteckflächen zusammen bilden den Atlas der Sphäre, falls sie die Sphäre komplett überdecken ([18], S. 43).

Die Elemente von \mathcal{B} werden materielle Punkte genannt. Diese Elemente sind so dicht gepackt, dass die Menge der materiellen Punkte nicht abzählbar ist. Dies folgt aus dem

klassischen Gedanken der Kontinuumsmechanik, der Körper \mathcal{B} fülle ein homogenes und isotropes Raumgebiet kontinuierlich aus. Des Weiteren sei die Differential-3-Form dm im Innern von \mathcal{B} positiv, integrierbar und heiÙe Massenelement. Die aus dem Integral, $\int_{\mathcal{B}} dm =: m_{\mathcal{B}}$, resultierende Zahl $m_{\mathcal{B}}$ heiÙt Masse von \mathcal{B} ([18], S. 67). In der klassischen Mechanik wird vereinbart, dass die Masse eines materiellen Körpers unveränderlich ist. Um Längen zwischen den materiellen Punkten messen sowie Orientierungen in Winkeln angeben zu können, wird die differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Metrik, was die Einführung einer Bezugsbasis bzw. eines Koordinatensystems voraussetzt, ausgestattet ([252], S. 115).

Die Überführung des diskreten Materiemodells bestehend aus Atomen und Molekülen in ein rein gedankliches, phänomenologisches und kontinuierliches ist eine erste Vereinfachung, die unter Beachtung des Größenmaßstabs mit Hilfe von Homogenisierungsmethoden auf mikro-, meso- und makroskopischer Ebene angewendet wird. Probleme treten auf, wenn materielle Körper mit Defekten oder Inklusionen exakt beschrieben werden sollen. Insbesondere für die Behandlung von Aufgaben in der Bruchmechanik wird dual zur klassischen Lehre der „Mechanik im physikalischen Raum“ das Gebäude der „Mechanik im materiellen Raum“ entwickelt [105].

Die kontinuumsmechanische Beschreibung der komplexen Systeme „Kunstwerke und Kulturobjekte“ steht am Anfang der Entwicklung. Im Sinne einer sich dem Detail nähernden Vorgehensweise, liegt der Fokus dieser Arbeit auf der klassischen Beschreibung. Demgemäß wird der oben definierte materielle Körper \mathcal{B} für die mathematische Beschreibung seiner Lage in die differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{E} eingebettet. Gemäß [18] (s. 69,70) ist die Einbettung mathematisch gesehen eine Abbildung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{B} nach der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{E} , also $\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, mit den folgenden Eigenschaften:

- κ ist injektiv,
- $\kappa(\mathcal{B})$ ist reguläre Untermannigfaltigkeit von \mathcal{E}
- κ und κ^{-1} sind einmal stetig differenzierbar,
- das Differential von κ ist injektiv,
- \mathcal{B} wird unter κ in ein normales Gebiet von \mathcal{E} abgebildet.

Die Differenzierbarkeit ist für offene Intervalle definiert [155], (S. 260). \mathcal{B} ist allerdings eine geschlossene Menge. Diese Diskrepanz wird gelöst, indem das Differential von \mathcal{B} auf dem Rand $d\mathcal{B}$ glatt bzw. \mathcal{B} in \mathcal{E} differenzierbar fortgesetzt wird. Im zweiten Fall ist die Vereinigungsmenge wieder offen und damit vollständig differenzierbar.

In der klassischen Mechanik wird in der Regel der Raum unserer physikalischen Anschauung durch den dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{E}^3 repräsentiert. Zudem wird postuliert, dass der Euklidische Raum und seine Struktur unabhängig von einer Massenverteilung ist, d. h. der Raum ist homogen und isotrop.

Die Einbettung von \mathcal{B} in den Euklidischen Raum \mathbb{E}^3 ist die Platzierung des Körpers \mathcal{B} . Eine nicht-leere Menge von Einbettungen von \mathcal{B} in \mathbb{E}^3 (Platzierungen κ_i) wird Platzierungsklasse K genannt, wenn K folgende Eigenschaften besitzt:

- alle Platzierungen besitzen die gleiche Orientierung,

- K ist abgeschlossen gegenüber orientierungstreuen Isometrien, wie z. B. Starrkörpermodifikationen.

Nach Noll [171] ist eine Konfiguration eine Äquivalenzklasse von K bzgl. \sim , wenn gilt: $\kappa_1 \sim \kappa_2 : \kappa_1 \kappa_2^{-1}$ lässt sich zu einer Isometrie auf \mathbb{E}^3 fortsetzen. Die Konfiguration eines Körperelementes in X ist die Abbildung $G_X : T_X \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T}_X * \mathcal{B}$, wobei $G_X := \kappa_X * \kappa_X$ ist und κ_X die Platzierung des Körperelementes in $X \in \mathcal{B}$ sei.

Die Konfiguration G_X induziert damit auf dem Tangentialraum $T_X * \mathcal{B}$ ein Skalarprodukt, wodurch Winkel und Längen gemessen werden können. Dies ermöglicht die intrinsische Beschreibungsweise der Bewegung von materiellen Körpern.

Die intrinsische Beschreibung der Bewegung materieller Körper wurde von Noll in [171] vorgestellt. Noll motiviert diese Beschreibungsweise mit ihren Vorzügen: 1. es werden kein a priori Referenz- und Koordinatensystem benötigt, 2. es wird keine Raum-Zeit-Struktur vorgegeben. Hierdurch besitzt der intrinsische Ansatz die gewünschte Generalität.

Für die intrinsische Beschreibung ist der materielle Körper \mathcal{B} selbst der Konfigurationsraum. Die Metrik ist nicht entscheidend sondern die Topologie von \mathcal{B} ([46], S. 10).

Mit der Definition einer Menge reellwertiger C^∞ -Funktionen L_x auf den offenen Umgebungen U_x von $x \in \mathbf{M}$ wird die Äquivalenzrelation $g \sim f$ eingeführt, so dass auf L_x gilt $g|_{U_x} = f|_{U_x}$. Die Abbildung der Äquivalenzrelation sei p und der Quotientenraum $G_x := L_x / \sim$. Mit der Einführung einer kommutativen Algebra auf G_x kann der Tangentialvektor als Abbildung $t : G_x \rightarrow \mathbb{R}$, die linear ist und der Leibniz-Regel genügt, definiert werden. Die Menge aller Tangentialvektoren heißt Tangentialraum $T_x \mathbf{M}$ in x in \mathbf{M} ([18], S. 44/45). Nun wird der Kotangentialraum $T_x^* \mathbf{M}$ als Homomorphismus des Tangentialraums $T_x \mathbf{M}$ definiert. $T_x^* \mathbf{M}$ ist damit Dualraum von $T_x \mathbf{M}$. Dementsprechend besitzen der Tangentialraum $T_x \mathcal{B}$ die natürliche Basis $\frac{\partial}{\partial \Phi^i}$ und der Kotangentialraum die duale Basis $d\Phi^i$ (Gradientenbasis) ([18], S. 46).

Für die intrinsische Beschreibung der Bewegungen von \mathcal{B} werden die materiellen Koordinaten Φ^i eines materiellen Punktes p^i von \mathcal{B} definiert ([18], S. 74-76): „[...] Sei $\{U_x, \underline{\Phi}\}$ eine Karte der Umgebung U_x eines materiellen Punktes $X \in \mathcal{B}$. Deren Koordinaten

$$\Phi^i := p^i \underline{\Phi} : U_x \rightarrow \mathbb{R} \quad (0.3)$$

heißen materielle Koordinaten.[...]“. Für jedem materiellen Punkt kann auf diese Weise schießlich eine natürliche und eine Gradientenbasis berechnet werden.

Physikalisch bedeutet dies: Verformt sich der materielle Körper, so kann nun in jedem materiellen Punkt ein Tangentialvektor angelegt werden. Die Menge aller Tangentialvektoren, die durch physikalisch mögliche, aber nicht notwendigerweise tatsächlich auftretende Verformungen (virtuelle Verformungen \Rightarrow siehe Abschnitt 1.1) entsteht, bildet den Tangentialraum. Die den Tangentialraum aufspannende natürliche Basis $\frac{\partial}{\partial \Phi^i}$ ist das Bezugssystem zur Beschreibung der Bewegung. D. h. der materielle Körper und seine Verformung definieren das Bezugssystem selbst. Ein äußerer Beobachter oder eine äußere Koordinatenbasis braucht nicht eingeführt werden. Hieraus erklärt sich auch die nähere Bezeichnung „intrinsisch“, welche von dem lateinischen Wort „intrinsicus“ abstammt und „inwendig“ bedeutet.

Aufgrund des höheren Grades an mathematischer Abstraktheit und der fehlenden Unterrichtseinheiten in der Differentialgeometrie im Ingenieurstudium, ist die Bewegungsbeschreibung mit Hilfe der „geometrischen Sprache der Kontinuumsmechanik“ eher den Physikern und Technomathematikern vorbehalten. Die Ingenieure bevorzugen in der Regel die bezogene Beschreibungsweise. Der Preis der Anschaulichkeit ist die Notwendigkeit der Anwendung der Euklidischen Transformation im Falle eines Basis- und/oder Beobachterwechsels.

Die bezogene Beschreibungsweise der Bewegungen eines allgemeinen materiellen Körpers \mathcal{B} geht von einer Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration aus. Dabei muss die Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration nicht notwendigerweise jemals von \mathcal{B} eingenommen werden. Zur Erlangung einer komfortablen Anschauung wird \mathcal{E} so mathematisch definiert, dass dieser möglichst gut dem uns umgebenden physikalischen Raum entspricht. Allem voran wird gefordert, dass in \mathcal{E} Längen und Winkel gemessen werden können. Dies ist in einer Mannigfaltigkeit nicht möglich und leitet zur Einführung eines metrischen Raumes und hier im Speziellen des Euklidischen Raumes.

Die Bewegung von \mathcal{B} in \mathcal{E} kann, wie in Abbildung 2 an einem allgemeinen materiellen Körper gezeigt ist, mittels einer raumfesten zeitinvarianten, kartesischen Bezugsbasis und/oder einer körperfesten mitbewegten kartesischen Bezugsbasis beschrieben werden. Grundsätzlich können die drei Gitterlinien x_1, x_2, x_3 des räumlichen Koordinatennetzes

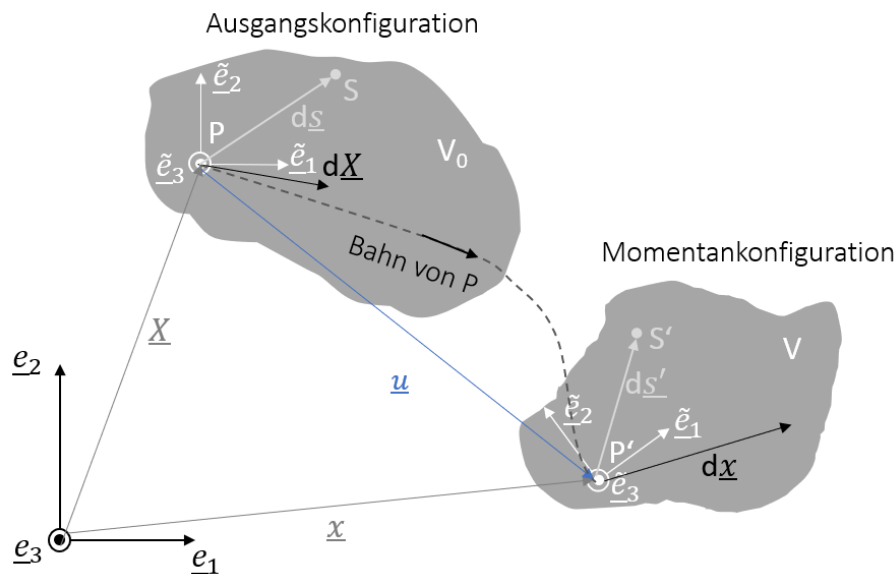


Abb. 2: Definition einer raumfesten, zeitinvarianten, kartesischen Bezugsbasis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ und einer körperfesten mitbewegten kartesischen Bezugsbasis $(\tilde{\underline{e}}_1, \tilde{\underline{e}}_2, \tilde{\underline{e}}_3)$ an einem beliebigen Kontinuum

genauso geradlinig und senkrecht aufeinander stehen wie die Basisvektoren angeordnet sind. Die Koordinatenlinien können aber auch krummlinig sein und werden wegen der Unterscheidbarkeit z^i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ genannt.

Es wird vorausgesetzt, dass die Koordinaten beider Arten Gitternetzlinien einen Isomorphismus bilden, d. h. es existiert einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang. Damit

gelten

$$z^j \equiv z^j(x_k) \text{ und } x_k \equiv x_k(z^j) \text{ mit } j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (0.4)$$

Das jeweilige totale Differential sind

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial z^k} dz^k \text{ und } dz^k = \frac{\partial z^k}{\partial x_i} dx_i \text{ mit } i, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (0.5)$$

Mit dem Satz des Pythagoras und mit Gl. 0.5 folgt schließlich der Abstand ds der zwei infinitesimal voneinander entfernten Punkte P und S (siehe Abbildung 2) in rechtwinkligen Koordinaten:

$$ds = \sqrt{\left(\overset{(P)}{x_1} - \overset{(S)}{x_1}\right)^2 + \left(\overset{(P)}{x_2} - \overset{(S)}{x_2}\right)^2 + \left(\overset{(P)}{x_3} - \overset{(S)}{x_3}\right)^2} = \sqrt{dx_i dx_i} = \sqrt{\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial z^k} \frac{\partial x_i}{\partial z^j}}_{g_{kj}}} dz^k dz^j. \quad (0.6)$$

Der Ausdruck g_{kj} in Gl. 0.6 sind die Koeffizienten des metrischen Tensors (kurz als „Metrik“ bezeichnet) genannt. Die Metrik ist ein symmetrischer Tensor 2. Stufe. Demgemäß gilt

$$g_{kj} = \frac{\delta x_i}{\delta z^k} \frac{\delta x_i}{\delta z^j} = \frac{\delta x_i}{\delta z^j} \frac{\delta x_i}{\delta z^k} = g_{kj}. \quad (0.7)$$

Mit

$$g_{kl} = \frac{\delta x_i}{\delta z^k} \frac{\delta x_i}{\delta z^l} = \frac{\delta x_i}{\delta z^k} \frac{\delta x_j}{\delta z^l} \delta_{ij} = \frac{\delta x_i}{\delta z^k} \frac{\delta x_j}{\delta z^l} e_i e_j = \frac{\delta x_i}{\delta z^k} e_i \frac{\delta x_j}{\delta z^l} e_j = g_k e_i g_l e_j, \quad (0.8)$$

wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (0.9)$$

das Kroneckersymbol ist, folgt die Definition des Tangentenvektors ([161], S.24-25)

$$\underline{g}_k = \frac{\partial x_i}{\partial z^k} e_i. \quad (0.10)$$

Es gibt verschiedene Metriken, die zwischen den Koordinaten bzw. Basisvektoren zweier Bezugssysteme definiert werden können [161] (S. 23-25). Die kontravariante Metrik ergibt sich analog zu:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x_m} \frac{\partial x^l}{\partial x_m} = g^{kl}. \quad (0.11)$$

Mit Hilfe der Metrik lassen sich Vektoren, Matrizen, Tensoren jeder physikalischen Natur sehr elegant von einer Bezugsbasis in die andere umrechnen (siehe dazu beispielsweise [161] S. 37 ff.). Zudem ist diese Darstellungsform für die Verwendung in Computerprogrammen prädestiniert. Für tiefer greifenderes Interesse an der Vektor- und Tensorrechnung wird auf [227] und [198] verwiesen.

Die Beziehung in Gl. 0.10 erlaubt nun die rechnerische Durchführung des Basiswechsels, d. h. die ko- und kontravariante Darstellung von Punkten, Linien-, Flächen- und Volumenelementen (siehe Abschnitt 4.2.5 „Herauf- und Herunterziehen von Indizes“ in [198], S. 210-212).

Ein Beobachter wird in der Messtechnik „Sensor“ genannt. Da auch die Kontinuumsmechanik letztendlich nicht ohne die Validierung durch Messungen auskommt, wird die Statik und Dynamik praktischerweise beobachterbezogen beschrieben. Dabei ist kein Beobachter speziell ausgezeichnet. Dementsprechend sind Beobachterwechsel zulässig. Gemäß [18] (S. 101) gilt hier die Beschränkung, dass der Beobachterwechsel zweimal stetig differenzierbar ist. Nun bleibt die Frage zu klären, wie sich die Beschreibung von Bewegungen eines materiellen Körpers (Bewegungsfunktionen) unter dem Wechsel des Beobachters verhält. Diese Fragestellung besitzt tatsächlich praktische Relevanz, da in der Messpraxis Sensoren mit unterschiedlichen Messprinzipien verwendet und verschieden z. B. auf dem materiellen Körper oder in seiner Umgebung platziert werden.

κ_ξ sei die vom Beobachter „wahrgenommene“ Bewegung des materiellen Körpers. In der Regel wird in der Kontinuumsmechanik die Betrachtungsweise nach Euler und nach Lagrange unterschieden.

Für die Darstellung der Bewegung eines materiellen Körpers ist nicht nur die Beschreibung der Lageänderung seiner materiellen Punkte notwendig sondern auch die zeitliche Reihenfolge, mit der sich Konfigurationen ereignen. Dementsprechend wird nun die Zeit als fundamentale unabhängige Variable axiomatisch eingeführt.

Die Zeit ist ein eindimensionaler Euklidischer Raum T mit einer in die Zukunft gerichteten positiven Orientierung ([18], S. 95). Die hier betrachteten Bewegungen vollziehen sich mit Geschwindigkeiten $|\underline{v}| \ll \ll$ Lichtgeschwindigkeit (nicht-relativistische Mechanik), daher ist die Zeit unabhängig von dem Raumkontinuum. (Im Gegensatz dazu wird in der relativistischen Mechanik das gekoppelte Raum-Zeit-Kontinuum bestimmt.) In T existiert aus der physikalischen Perspektive kein ausgezeichnete Bezugspunkt. Allerdings hat sich die Wahl eines zeitlichen Bezuges im alltäglichen Leben als praktisch erwiesen. Die Wahl des Zeitpunktes, an dem die positive Zeitählung beginnt, ist abhängig von der betreffenden Gesellschaft. Dieser Aspekt ist für die Physik letztendlich irrelevant, da hier mit Zeiträumen, den jeweiligen zeitlichen Abständen zwischen zwei Zeitpunkten, gerechnet wird.

Die zeitabhängige Bewegung eines materiellen Körpers \mathcal{B} ist eine Abbildung $\kappa : T \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, wobei T die Zeit ist und die Zeitdifferenz $\Delta t(a, b) := |n(a) - n(b)|$ zwischen den beiden Ereignissen a und b eine (Quasi-)Metrik auf T induziert. Der topologische Raum \mathcal{C} ist ein Faserbündel und wird Raum-Zeit-Kontinuum genannt. Ein Element des Raum-Zeit-Kontinuums heißt „Ereignis“. Ein zeitlicher Schnitt des Raum-Zeit-Kontinuums wird „Bahn“ genannt ([18], S. 97).

Für die Abbildung κ sollen die Bedingungen: 1. $\kappa_X : \kappa(\cdot, X) : T \rightarrow \mathcal{C}$, d. h. κ_X ist $\forall X \in \mathcal{B}$ eine Bahn, die bzgl. aller Beobachter zweimal stetig differenzierbar ist und 2. $\kappa_t := \kappa(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_\perp \subset \mathcal{C}$, so dass $\kappa_t \forall t \in T$ in der Platzierungsklasse K des Körpers ist, gelten ([18], S. 107).

Die Bewegung eines materiellen Körpers setzt sich aus einer Starrkörperbewegung und einer Gestaltänderung zusammen. Im Gegensatz zur Gestaltänderung ändert sich der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten bei einer Starrkörperbewegung nicht.

Die Geschwindigkeit der Bahn β ist bezüglich des Beobachters ξ erklärt durch $\underline{v}_\xi := \dot{\underline{r}}_\xi$, wobei \underline{r}_ξ Ortsvektor ist und die Zeitableitung für eine allgemeine Funktion $f(t)$ mit $f : T \rightarrow V$ (V ist normierter Vektorraum) erklärt ist durch $\dot{f}(\tau_1) := \frac{\partial f U^{-1}}{\partial \tau|_{\tau_1}} 1 \otimes 1$.

Die Beschleunigung ist die zweimalige Ableitung der Bahn β nach der Zeit t bezüglich ξ .

Zusammenfassend wird festgehalten, dass jeder materielle Punkt eines Kontinuums eine Geschwindigkeit, eine Dichte und eine Temperatur besitzt. Dementsprechend ist die Kontinuumsmechanik eine Feldtheorie, die die Differentialgeometrie und Tensorrechnung zur Beschreibung der Bewegung des materiellen Körpers in Abhängigkeit der Zeit benutzt. Im folgenden Abschnitt wird der konzeptionelle Apparat der Kontinuumsmechanik aufgebaut, um die Ursache und Wirkung der Bewegung eines materiellen Körpers über Bilanzgleichungen in einem Zusammenhang darzustellen. Davon ausgehend werden praktikable Beschreibungsmöglichkeiten besprochen.