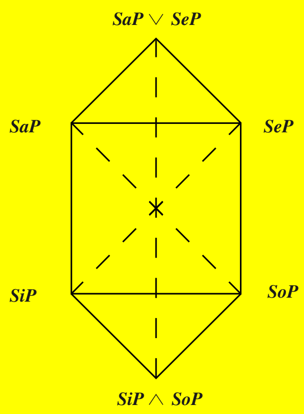
Logische Philosophie

Niko Strobach

Alternativen in der Raumzeit

Eine Studie zur philosophischen Anwendung multimodaler Aussagenlogiken



λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/1400

INHALT

Einleitung

1. Worum geht es? ... xi
2. Das Seeschlachtproblem ... xi
3. Das Problem des Raumartigen ... xiii
4. Die Aufgabe: „Fooling around with tenses“ ... xiv
5. Die technischen Mittel: viele Modaloperatoren ... xiv
6. Die Methode: Metaphysik als Deutung formaler Semantik ... xv
7. Das Paradigma: „branching spacetime“, undogmatisch ... xvii
8. Der Aufbau des Buchs ... xx
  8.1 Gliederung ... xx
  8.2 Teil I: Von der Logik des Punkts zur Logik der Raumzeit ... xx
  8.3 Teil II: Tempo-modales Kontinuum und Alternativen in der klassischen Raumzeit ... xxi
  8.4 Teil III: Relativistische Raumzeitlogik ohne Alternativen ... xxiii
  8.5 Teil IV: Relativistische Raumzeitlogik mit Alternativen ... xxiii
  8.6 Der Begründungsteil ... xxv
  8.7 Die Mottos ... xxv
9. Danke ... xxvi

Teil I: Von der Logik des Punkts zur Logik der Raumzeit

1. Von der Logik des Punkts (Aussagenlogik) zur Logik der Linie ... 3

  1.1 Die Basis: propositionale Logiken ... 3
    1.1.1 Was ist eine formale Sprache? ... 3
    1.1.2 Das Spiel PC und seine Deutung als klassische Aussagenlogik ... 3
  1.2 Monomodale und bimodale Logiken ... 8
    1.2.1 Monomodale Logiken ... 8
    1.2.2 Bimodale Logiken ... 12
      1.2.2.1 Bimodale Logiken als Fusionen ... 12
      1.2.2.2 Die Sprachen KuK und K_t ... 14
      1.2.2.3 Von K_t zur Linearität ... 15
      1.2.2.4 Verfeinerungen von K_{lin}- und K_b-Strukturen ... 19
  1.3 Deutungen monomodaler und bimodaler Logiken ... 20
    1.3.1 S5 als Logik von „möglich“ und „notwendig“ ... 20
    1.3.2 Bimodale Logiken als Zeitlogiken ... 22
    1.3.3 S5 als Logik von „irgendwo“ und „überall“ ... 25

2. Von der Logik der Fläche zur Logik der Raumzeit................................ 27

2.1 Die Logik des Schachbretts.. 27
2.1.1 Produkte von Modellen.. 27
2.1.2 Zwei alternative Formulierungen der Logik des Schachbretts............. 31
2.1.2.1 *Ein* Modell mit mehreren Kontextmengen.................................. 31
2.1.2.2 Modelle mit lediglich *einer* Kontextmenge: Partitionsmodelle..... 31
2.1.3 Produkte von K_{lin}.. 33
2.2 Modallogiken für den dreidimensionalen Raum.. 35
2.3 Modallogiken für die klassische Raumzeit.. 37
2.3.1 Einleitung.. 37
2.3.2 K_{lin}^4 und $S5^4$ als Raumzeitlogiken – events......................... 38
2.3.2.1 $S5^4$-Modelle und K_{lin}^4-Modelle... 38
2.3.2.2 Die Deutung von K_{lin}^4... 39
2.3.3 $S5^2$ und $S5 \times K_{lin}$ als Logiken für die klassische Raumzeit................. 41
2.3.3.1 Technische Beschreibung.. 41
2.3.3.2 Die Deutung von $S5 \times K_{lin}$.. 42
2.3.3.3 Die Unzerschlissenheit der Raumzeit.. 44
2.3.3.4 Orte, Zeitpunkte, Koordinaten... 45

Teil II: Tempo-modales Kontinuum und Alternativen in der klassischen Raumzeit

1. Die zukünftige Seeschlacht.. 51

1.1 Einleitung.. 51
1.2 Kutscheras Kombination aus temporaler und modaler Logik T×W............ 53
1.3 Die Sprache LF: T×W mit Historizität und Verinselungsfreiheit................. 55
1.4 Das Seeschlacht-Szenario im Rahmen der lingua franca (LF).................... 58
1.4.1 Die Ansicht des Ockhamisten... 58
1.4.2 Die Ansicht des Peirceaners.. 60
1.4.3 Die Ansicht des Thomasonianers.. 61
1.4.4 Die Ansicht des Haradianers.. 63
1.5 Das Seeschlacht-Problem.. 65
1.6 Welche Lösung ist die beste? 69
1.6.1 Die Schwäche des Ockhamismus für Alternativen................................. 69
1.6.2 Die Seeschlacht und die Korrespondenztheorie der Wahrheit............. 71
1.7 Das Problem der Axiomatisierung von LF.. 75

2. Welcher Indeterminismus – und warum? 81

2.1 Einleitung 81
2.2 Welcher Indeterminismus? 82
2.3 Warum dieser Indeterminismus? 84
2.3.1 Naturphilosophische Gründe 84
2.3.2 Handlungstheoretische Gründe 85
2.3.2.1 Die problematische Metapher der Weggabelung 85
2.3.2.2 Was für Alternativen? Welche Wahl? – Exkurs zu STIT 87
2.3.2.3 Wann entscheidet es sich? 94
2.3.3 Existenzielle Gründe 97
2.3.3.1 Humes Herausforderung 97
2.3.3.2 Indeterminismus und Fatalismus 99
2.4 Fazit 102

3. Alternativen in der klassischen Raumzeit 105

3.1 Einleitung 105
3.2 Die Kombination von LF und $S5 \times K_{lin}$: $LF \times S5$ 105
3.3 Wissbar, unbeeinflussbar, feststehend 106
3.3.1 Motivation der Ausdifferenzierung des „Notwendigkeits"-Operators 112
3.3.2 Der Ausbau von $LF \times S5$ zu 3N 122
3.3.2.1 Die Definition von 3N und der klassische Lichtkegel 122
3.3.2.2 Theoreme von 3N 126
3.3.2.3 *Nicht*-Theoreme von 3N 128
3.3.2.4 Axiomatik von 3N 131
3.3.3 Die Deutung der Operatoren „N_Δ" und „N_∇" 132
3.3.3.1 „N_∇", „dass" und „ob" 132
3.3.3.2 Eine ontische Deutung von „N_Δ"? 135
3.3.4 Überleitung zu Teil III 137

Teil III: Relativistische Raumzeitlogik ohne Alternativen

1. Von der Relativitätstheorie zur relativistischen Raumzeitlogik................ 141

1.1 Die Relativitätstheorie in philosophischer Perspektive.............................. 141
1.2 Relativistische Raumzeitlogik – bisherige Ansätze................................... 147
1.2.1 Einleitung... 147
1.2.2 Kausale Operatoren.. 149
1.2.2.1 Priors Skizze zu einer relativistischen Raumzeitlogik................. 149
1.2.2.2 Die Ränder des Lichtkegels bei Goldblatt.................................. 153
1.2.3 Einbeziehung der Bezugsysteme – Bisherige Ansätze........................ 154
1.2.3.1 Überblick.. 154
1.2.3.2 Rakićs Modellbildung (ohne modale Verzweigungen)................ 155
1.2.3.3 Der Ansatz von Thomas Müller.. 160

2. Relativistische Raumzeitlogik mit Raum- und Bezugssystemoperatoren 165

2.1 Einleitung.. 165
2.2 Die Sprache ^{Proto}Rel.. 166
2.2.1 Ein neues Operatorenpaar: „für alle / manche Bezugssysteme gilt“.... 166
2.2.2 Definition der Sprache ^{Proto}Rel.. 166
2.2.3 Eigenschaften von ^{Proto}Rel.. 168
2.2.4 Vorläufige Überlegungen zur Axiomatisierung von ^{Proto}Rel................ 169
2.2.5 Vorteile und Nachteile von ^{Proto}Rel.. 172
2.3 Die Sprache Rel.. 175
2.3.1 Lichtkegel-Strukturen und Koordinatensysteme................................ 175
2.3.1.1 Lichtkegel-Strukturen... 175
2.3.1.2 Koordinatensysteme auf Lichtkegel-Strukturen........................... 178
2.3.1.3 Lokales und globales Früher und Später für ein Koordinatensystem... 182
2.3.2 Rel-Modelle.. 183
2.3.2.1 Allgemeines.. 183
2.3.2.2 Randlosigkeit und Dichte in Rel-Modellen.................................. 187
2.3.2.3 Die Rietdijk-Eigenschaft.. 187
2.3.3 Die kausalen Operatoren als definierte Zeichen.................................. 189
2.3.3.1 Volle Modelle: die Sprache Rel^{pl}.. 189
2.3.3.2 Kausale Operatoren: eine Annäherung.. 191
2.3.3.3 Kausale Operatoren: die Lösung... 193
2.3.3.4 Eine kleine Einschränkung: Die Ränder des Lichtkegels............. 194
2.3.3.5 Die Linearität der Weltlinie.. 195
2.3.4 Konvergenzforderungen: Die Sprachen Rel^{root} und SRel..................... 195

3. Fast wie die Seeschlacht:
Wahrheitswerte im Raumartigen und im Lichtkegel.............................. 199

3.1 Einleitung.. 199
3.2 Was entspricht in Rel welchem Zeichen in LF?....................................... 199
3.3 Positionsangaben.. 201
3.4 Vergleich dreier möglicher Auffassungen
zu Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.. 204
3.4.1 Drei Sorten von Operatoren-Kombinationen...................................... 204
3.4.2 Die Position des Befürworters von „+PS", „+S", „+FS"
(Rietdijkianer).. 205
3.4.3 Die Position des Befürworters von „×PS", „×S" und „×FS"
(Peirceaner)... 206
3.4.4 Die zwei möglichen Positionen des Befürworters von „FS",
„S", „PS": Anti-Relativismus und Bezugssystem-Ockhamismus....... 208
3.4.4.1 „FS", „S", „PS": ein scheinbar wenig aussichtsreicher Ansatz... 208
3.4.4.2 KTM-Aktualismus als Pendant zur Chimäre des
ontologisch vorrangigen Bezugssystems..................................... 209
3.4.4.3 Ockhamismus – eine überraschend gut vertretbare Position für
Bezugssysteme in der Raumzeit.. 210
3.5 Die Notwendigkeit der Berücksichtigung von Alternativen........................ 213

Teil IV: Relativistische Raumzeitlogik mit Alternativen

1. Verzweigte Raumzeit („Branching Spacetime")...................................... 217

1.1 Überblick.. 217
1.2 Belnaps „Branching Spacetime" (BST).. 219
1.2.1 Der Grundansatz von BST.. 219
1.2.2 Vier Kritikpunkte an BST.. 220
1.2.2.1 Eingebaute Konvergenz... 220
1.2.2.2 Das „prior choice principle" schlägt manchmal das Raumartige
dem Determinierten zu.. 221
1.2.2.3 Das „prior choice principle" schlägt nie die *kompletten* „wings"
dem Indeterminierten zu.. 226
1.2.2.4 Das „prior choice principle" erlaubt keine „upper cuts"............... 227

2. Formale Sprachen für die verzeigte Raumzeit.. 231

2.1 Die Sprache LF×Rel 231
2.1.1 Definitionen für LF×Rel.. 231
2.1.2 Überlegungen zur Axiomatik von LF×Rel.. 235
2.1.3 Erweiterungen auf Rel^{pl} und andere Verfeinerungen von Rel............ 237
2.2. Eine Erweiterung von LF×Rel: die Sprache 3N×Rel.............................. 237
2.2.1 Drei „Notwendigkeits“-Operatoren im relativistischen Kontext......... 237
2.2.2 Die Definierbarkeit der Bezugssystem-relativen Zugänglichkeit mittels der Zugänglichkeit über den Vergangenheitslichtkegel............ 239
2.2.3 Erste Überlegungen zur Deutung von „N_Δ“ in 3N×Rel...................... 240

3. Wie die Seeschlacht: Der (verhinderte) Weltraumkrieg.......................... 243

3.1 Wahrheitswerte in der verzweigten Raumzeit 243
3.1.1 Das „spacefight“-Szenario.. 243
3.1.2 Peirceanische und thomasonianische Position.................................... 246
3.1.3 Zwei Arten der Supervaluation.. 247
3.1.4 Vorher (e_1)... 248
3.1.4.1 Im Zukunftslichtkegel nichts Neues.. 248
3.1.4.2 Im Raumartigen: *contingentia praesentia & praeterita*............... 249
3.1.5 Nachher (e_2).. 251
3.1.6 Zwischenergebnis.. 252
3.2 *Rebus sic stantibus* 253
3.2.1 Was heißt „*rebus sic stantibus*“?.. 253
3.2.2 Erste Möglichkeit: „bei kompletter Verwirklichung von h“................ 256
3.2.3 Zweite Möglichkeit: „bei h-artiger Wirklichkeit auf W \ ∇(e)“.......... 256
3.2.4 Dritte Möglichkeit: „bei h-Artigkeit bis zu einschließlich $t_b(e)$“.......... 258
3.2.5 Vierte Möglichkeit: „bei h-Artigkeit auf dem Vergangenheitslichtkegel“... 260
3.2.6 Eventisierte Notwendigkeit als Spezialfall der positionalen Notwendigkeit... 261
3.3 Sieben Einwände gegen den Ausschluss der „wings“................................. 262
3.3.1 Steht überhaupt fest, was wahr ist?... 262
3.3.2 Ist überhaupt wahr, was feststeht?.. 263
3.3.3 Ein Gleichberechtigungs-Argument gegen den *Ausschluss* der „wings“?... 264
3.3.4 Soll man wirklich *contingentia praesentia & praeterita* annehmen?... 266
3.3.5 Ist der Unterschied zwischen kausaler Zukunft und Raumartigem eingeebnet?.. 267
3.3.6 Ist die Gegenwart jetzt wieder auf ein einziges event geschrumpft?.... 268
3.3.7 Aber wir erfahren doch später, was bereits geschehen ist!.................. 268

4. Deiktische und narrative Determiniertheit 271

4.1 Statt einer Einleitung ein Bild 271
4.2 Deiktische Determiniertheit 271
4.3 Narrative Determiniertheit im klassischen Bild 273
4.4 Narrative Determiniertheit im relativistischen Bild 277
4.4.1 Die Perspektive der Historiker: statt „massive coincidence“ der Raum als Erzählform 277
4.4.2 Die Perspektive der Reporter 284
4.4.3 Das Seeschlacht-Problem und seine Raumzeit-Version 290
4.5 Eine kleine Phänomenologie der Erleichterung 292
4.5.1 Prior als methodisches Vorbild 292
4.5.2 A-Ordnung und B-Ordnung 293
4.5.3 Drei Arten der Erleichterung 294
4.6 Verbleibende Aufgaben 297
4.7 Fazit 299

Begründungen, Anhänge, Verzeichnisse

Begründungen zu Teil 1 302
Begründungen zu Teil 2 330
Begründungen zu Teil 3 350
Begründungen zu Teil 4 367

Anhang 1: Die Diskussion um das Problem des Raumartigen zwischen 1966 und ca. 1990 377
1. Die Initiatoren: Rietdijk und Putnam 377
2. Die Debatte bis 1976: Stein, Lango, Fitzgerald, Harris, Weingard, Landsberg, nochmals Rietdijk 379
3. Die Debatte ab 1985: Maxwell und seine Kritiker (Dieks, nochmals Stein) 383
4. McCalls „Universe Trees“ 387

Anhang 2: Tafel der Interaktionsgesetze der untersuchten Modaloperatoren 390

Literaturverzeichnis 393
Sachregister 400
Pesonenregister 407

EINLEITUNG

just being is bewildering

1. Worum geht es?

Dieses Buch hat ein eng begrenztes *explizites* Ziel, nämlich die Beantwortung der folgenden Doppelfrage:

> Stellt sich das alte Problem der morgigen Seeschlacht heute für die Raumzeit der Relativitätstheorie in neuem Gewand; und lassen sich die für das alte Problem entwickelten formalen Lösungsansätze auf die Raumzeit übertragen?

Der zweite Teil der Hauptfrage setzt eine positive Antwort auf den ersten Teil voraus. Die Frage so zu formulieren, legt auch schon nahe, dass eine Übertragung der Lösungsansätze tatsächlich möglich ist. In der Tat soll für beide Teilfragen die Antwort am Ende „ja" lauten. Die Hauptergebnisse sind dabei:

- eine neuartige indeterministische Lösung für das Problem des Raumartigen („problem of the wings")
- die Unterscheidung von Alternativen-Ockhamismus (schlecht) und Bezugssystem-Ockhamismus (gut)
- die Befürwortung von contingentia praesentia und contingentia praeterita im Raumartigen
- die konsequente Relativierung der temporalen Notwendigkeit auf Raumzeitpunkte
- die Unterscheidung von zwei Arten der Notwendigkeit, die sich vorrelativistisch nicht unterscheiden ließen: deiktischer Determiniertheit und narrativer Determiniertheit
- die Charakterisierung des Raums als Form der Bezugsystem-relativen raumweiten Erzählung der Geschichte von lokalen Entscheidungen.

Ein Gesamtentwurf einer Philosophie von Raum und Zeit ist nicht beabsichtigt, sondern vielmehr die *Studie* eines konkreten Problems. Dass auch eine solche Studie ein umfangreiches Buch füllt, liegt in erster Linie am Gewicht und der Kompliziertheit der beiden darin verbundenen Probleme.

2. Das Seeschlachtproblem

Das Problem der morgigen Seeschlacht ist so verwickelt, dass es den Text, in dem es zuerst formuliert wird, nämlich das 9. Kapitel von Aristoteles' kleiner und gewichtiger Schrift „De interpretatione" zu einem der „schwierigsten, aber auch der interessantesten und am meisten diskutierten Texte" seines überlieferten Werks gemacht hat.[1] Bei seiner Diskussion des Verhältnisses je zweier Aussagen zueinander im 6. Kapitel definiert Aristoteles das Wort „antifasij" als logischen Fachterminus.[2] Man kann die Definition so verstehen, dass eine antifasij immer

[1] Weidemann, Kommentar zu „Peri Hermeneias" („De interpretatione"), S. 223.
[2] 17a33.

die folgende Struktur hat: ⟨"A ist F", "A ist nicht F"⟩.[3] Man sollte daher meinen, dass von den beiden Teilen eines solchen Gegensatzes immer einer wahr und einer falsch sein muss.[4] In den Kapiteln 7 bis 9 von „De interpretatione“ nimmt jedoch die Diskussion von Sätzen breiten Raum ein, die zumindest *prima facie* eine antifasij bilden, aber für die dieses Prinzip nicht ohne weiteres zu gelten scheint. Besonders Fälle der folgenden Art haben seit ihrer in Kap.9 dokumentierten Entdeckung Kopfzerbrechen bereitet:

⟨"Es wird morgen zu einer Seeschlacht kommen",
"Es wird morgen nicht zu einer Seeschlacht kommen"⟩.

Es geht darin um etwas in der Zukunft,[5] von dem ein Indeterminist sagen würde, dass es kontingent ist: Es kann geschehen, aber auch ausbleiben. Die Aussagenpaare, um die es in Kapitel 9 geht, enthalten also nach Ansicht eines Indeterministen Aussagen über *contingentia futura*. Ist ein solches Satzpaar eine antifasij, so könnte es allerdings sein, dass der Indeterminist in Schwierigkeiten gerät:

> [Alles geschähe und wäre] mit Notwendigkeit der Fall [...], so daß wir weder Überlegungen anzustellen noch in der Erwägung tätig zu sein bräuchten, es werde, wenn wir das und das tun, das und das der Fall sein, wenn wir es aber nicht tun, nicht. Denn es steht ja nichts im Wege, daß bereits zehntausend Jahre im voraus einer behauptet, das und das werde dann sein, und ein anderer, dies werde dann nicht sein, so daß mit Notwendigkeit eintreffen wird, was auch immer von beidem schon damals wahrheitsgemäß (vorher)gesagt werden konnte.[6]

Diese Konsequenz droht anscheinend gerade deshalb, weil für den Fall, dass das angegebene Satzpaar eine antifasij ist, eine seiner Komponenten wahr und die andere falsch sein muss – und zwar schon heute. Ein Determinist sieht das natürlich alles nicht als bedrohlich an, sondern freut sich über einen eleganten, rein logischen Beweis seiner Ansicht.[7]

Die formallogische Analyse des Problems seit den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts ist zwar eine Erfolgsgeschichte dieser Methode. Zugleich hat sie aber auch gezeigt, wie filigran das Problem selbst ist.

---

[3] Vgl. auch Analytica posteriora I 2, 72a11-13. Oft, soweit ich sehe jedoch nicht in De int., wird mit dem Ausdruck auch ein *einzelner* Satz bezeichnet (vgl. z.B. An.pr. 61a19), zuweilen auch ein Prädikat (vgl. z.B. APo 73b21, Met. IV(G) 4 1008a25, X(I) 3 1054b20).

[4] Und zwar besonders angesichts Met. IV (Γ), 7 und 8, 1011b23f, 1012b3, 1012b10-13.

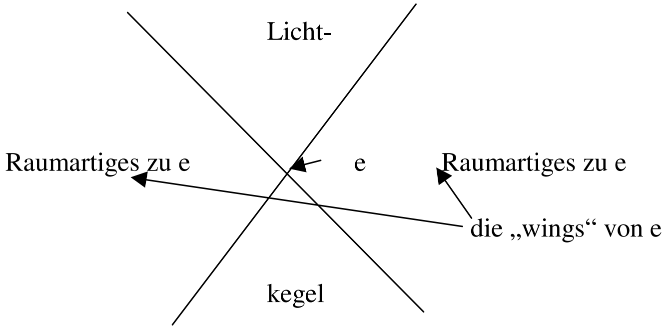
[5] 18a34.

[6] 18b30-35. Übersetzung: Weidemann.

[7] Wie die Beschäftigung mit dem Problem der *contingentia futura* über die Jahrhunderte vor sich gegangen ist, wer den Text von De int. 9 wann wie verstanden hat und wie er wohl am ehesten zu verstehen ist, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Diese Frage kann inzwischen durch Hermann Weidemanns großen Kommentar zu „De interpretatione“ (^{1}1994, ^{2}2002) als gründlich erforscht gelten.

3. Das Problem des Raumartigen

Mit dem „problem of the ‚wings'" ist das Problem des Status der raumartigen „Flügel" zum Lichtkegel gemeint.



Typisch für die „wings" ist, dass ein beliebiges event (ein Raumzeitpunkt) in ihnen nicht eindeutig (d.h. für jedes Bezugssystem[8] gleich) als gleichzeitig, früher oder später (bzw. gegenwärtig, vergangen oder zukünftig) eingeschätzt wird. Ich kann mir ziemlich frei aussuchen, welche events ich als *einen* Zeitpunkt koordiniere.

Das für eine philosophische Deutung der Speziellen Relativitätstheorie unausweichliche „problem of the ‚wings'" wird von Nuel Belnap, einem der versiertesten zeitgenössischen Logiker, zu Recht als sehr schwierig eingestuft.[9] Man kann es in Form eines Trilemmas formulieren: Soll man die Determiniertheit eines Zustandes im Raumartigen eines gegebenen events

(a) grundsätzlich annehmen,
(b) grundsätzlich ablehnen oder
(c) aufs gerade verwendete Bezugssystem relativieren?

Die Strategie (a) legt den Determinismus nahe. Denn muss man dann nicht sagen: Wenn alles in den „wings" eines *beliebigen* events determiniert ist, dann auch meine jetzige kausale Zukunft, da sie selbst doch auch zu den „wings" von events im Raumartigen zu meinem Hier-und-Jetzt gehört – also alles?

Aber auch Strategie (b) ist nicht ohne Härten zu akzeptieren, denn man erfährt ja später, was *geschehen ist*.

Strategie (c) scheint zunächst völlig inakzeptabel, denn sicher soll es nicht in der freien Willkür des Betrachters liegen, ob etwas feststeht oder nicht; die Wahl des Bezugssystems ist aber willkürlich.

[8] Die zentralen Begriffe „Bezugssystem" und „Koordinatensystem" werden i.F. austauschbar gebraucht.
[9] „Branching Spacetime" (1992) (=BST), S.385.

4. Die Aufgabe: „Fooling around with tenses“

Zur Erläuterung des „problem of the ‚wings'“ in der Literatur benutzte Beispiele ab Ende der 60er Jahre zeigen, dass eine Verbindung zum klassischen Seeschlacht-Problem nahe liegt. So illustriert z.B. Hilary Putnam das Problem mit einem imaginären „spacefight“,[10] Paul Fitzgerald ebenso wie Nataša Rakić mit den Entscheidungen eines Admirals, und Errol Harris stellt zu Aussagen über die “wings“ fest: „Whether [...] one would wish to say that such statements have no truth value is an open question exactly parallel to Aristotle's about the sea-battle“.[11] Doch wie die formalen Sprachen, an denen man das sieht, aussehen müssten, wurde meines Wissens nie ausgearbeitet.[12] Selbst die Modelltheorie hat hier erst in den 90er Jahren Fortschritte gemacht, dies aber wohl gerade wegen eines klugen vorläufigen Verzichts von Belnap aufs „fool[ing] around with tenses“.[13]

Selbst die relativistische Zeitlogik ohne Berücksichtigung von Alternativen ist erstaunlich wenig weit fortgeschritten. So konnten Øhrstrøm und Hasle noch 1995 in einem einführenden Buch zur Zeitlogik schreiben, die Ergebnisse zur relativistischen Zeitlogik seien insgesamt „sparse“.[14] Die bisher am weitesten fortgeschrittenen Überlegungen zu einer Zeitlogik, die sich nicht auf Operatoren für die kausale Vergangenheit bzw. Zukunft beschränkt, sondern mit der Relativierung von Formeln auf Bezugssysteme ernst macht, finden sich in Thomas Müllers 2002 erschienenem Buch „Arthur Priors Zeitlogik“.[15]

5. Die technischen Mittel: viele Modaloperatoren

Zur Beantwortung der Hauptfrage sind technische Zurüstungen erforderlich. Den Rahmen dafür bilden in einer Art Baukasten versammelte *multidimensionale Aussagenlogiken*. Die neuen Elemente darin sind schnell genannt:

- ein Operatorenpaar „E“ und „S“ mit der Deutung „überall“ und „irgendwo“
- ein Operatorenpaar „×“ und „+“ mit der Deutung „für jedes Koordinatensystem gilt“ und „für wenigstens ein Koordinatensystem gilt“

[10] Putnam, „Time and Physical Geometry“ (1967).
[11] Harris, “Simultaneity and the Future” (1969).
[12] Vgl. für Einzelheiten der Debatte zwischen den 60er und frühen 90er Jahren Anhang 1. Eine von ihrem eigenen Vorschlag unabhängige einführende Diskussion einiger besonders wichtiger Texte findet sich außerdem bei Rakić. Die von Belnap in „Branching space-time“ zu diesem Problem angegebene Literatur ist überschaubar. Alle Literatur zu berücksichtigen, die sich allgemein mit der Konventionalität der Gleichzeitigkeit oder dem Problem des „flow of time“ beschäftigt, ist innerhalb dieser Studie nicht möglich, auch wenn am Ende ein Vorschlag steht, wie ein Fluss der Zeit unter relativistischen Voraussetzungen denkbar ist.
[13] BST, S.396.
[14] Hasle und Øhrstrøm, „Temporal Logic“ (1995), S.202.
[15] In einem weiteren Artikel hat Müller Alternativen auch technisch berücksichtigt. Vgl. Müller, “Branching space-time, modal logic and the counterfactual conditional” (2002).

- ausdifferenzierte Versionen des Operatorenpaares „N“ und „M“, das man *üblicherweise* deutet als „Es ist (historisch) notwendig, dass“ („Es steht fest, dass“) und „Es ist möglich, dass“: „N_{Δ}“ und „M_{Δ}“, „N_{∇}“ / „M_{∇}“.

Die Notwendigkeitsoperatoren unterscheiden sich in dem Gebiet, in dem als modale Alternativen aufgefasste mögliche Raumzeiten inhaltlich koinzidieren müssen, um als zugänglich gelten zu können. Dabei wird „N_{∇}“ gedeutet als „Es ist nicht mehr zu beeinflussen, ob“. „N_{Δ}“ wird im *klassischen* Bild gedeutet als „Es ist wissbar, dass“, im *relativistischen* als „Es steht fest, dass“. Die Deutung von „N“ verschiebt sich dann ungefähr zu „Es steht fest, ob“.

Besonderes Augenmerk verdienen die Raumoperatoren „E“ und „S“. Es ist erstaunlich, dass das große Überblickswerk „Facing the Future“ von Belnap, Perloff und Xu 2001, neun Jahre nach Belnaps „Branching space-time“, zwar nominell von Handlungsalternativen in der *Raum*zeit handelt, tatsächlich aber der spatiale Aspekt explizit völlig zurückgestellt wird.[16] In der vorliegenden Studie soll dem spatialen Aspekt dagegen endlich die Beachtung zukommen, die er verdient.

Freilich ist es technisch gesehen schwieriger, als es zunächst klingt, nach semantischem *gusto* die Operatoren einzuführen, die gerade wünschenswert sind, und dennoch den Überblick über ihr Verhalten zu behalten, besonders darüber, wie sie mit anderen Operatoren interagieren. Man arbeitet dann mit *multidimensionalen Modallogiken*, die erst seit kurzem als gründlicher erforscht gelten können. Anfang der 90er Jahre beschränkte sich das Wissen im Wesentlichen auf nicht gerade ausdrucksstarke Fusionsbildungen. Erst 1998 konnten Dov Gabbay und Valentin Shehtman die wichtigsten Ergebnisse zu den viel ausdrucksstärkeren und in der Anwendung plausibleren *Produkten* von Modallogiken erzielen. Ihre Erforschung kann erst mit dem Ende 2003 im Druck erschienenen zusammenfassenden Werk „Multidimensional Modal Logics – Theory and Applications“ (MDML) von Gabbay, Kurucz, Wolter und Zakharyaschev als technisch praktisch abgeschlossen gelten.[17]

6. Die Methode: Metaphysik als Deutung formaler Semantik

Obwohl die vorliegende Arbeit viele Formeln enthält, handelt es sich bei ihr eigentlich ebenso wenig um eine Arbeit auf dem Gebiet der formalen Logik, wie es sich bei ihr um eine Arbeit im Bereich der Physik handelt, weil sie auf die Relativitätstheorie

[16] Belnap / Perloff / Xu, Facing the Future (2001), S.29: „...although in this book we idealize each history as linear, there is a more adequate treatment of branching histories in Belnap 1992 [= BST]. There each history in the branching assemblage is idealized not as linear, but instead as a four-dimensional space-time.“; S.178: „A more adequate proto-physical theory called ‚branching space-time’ is presented in Belnap 1992. That theory takes seriously that physical and human happenings are local events rather than universe-wide. We nevertheless remain here with branching time, since no study known to us has attacked the presumably more difficult problem of understanding agency in anything like branching space-time.“

[17] Die „applications“, die im Titel erwähnt werden, betreffen vor allem die Informatik. Eine relativistische Raumzeitlogik gehört nicht zu ihnen.

eingeht. Die vorliegende Arbeit ist eine Studie auf dem Feld der Metaphysik. Sie untersucht eine *Anwendung* von Werkzeugen der formalen Logik.

Das Verhältnis der Philosophie zur formalen Logik scheint mir heute ein ähnliches Verhältnis zu sein wie das der Spieltheorie zur Ökonomie oder wie das der Statistik zur Psychologie. Mathematische Methoden gehören zum Handwerkszeug. Es gibt Bereiche des Fachs, in denen man mit ihnen nichts erreicht. Auf die gestellte Frage kommt es an. Bei der hier gestellten Frage kommt man damit weiter.

Ich hoffe, neben dem explizit formulierten Ziel auch noch ein *implizites* Ziel zu verwirklichen, nämlich dass sich der Leser am Ende etwas sagt wie: „Wie konnte man, wenn die Sache *so* ist, je an das ‚Blockuniversum' glauben...!" oder „Wie konnte man nur meinen, die Zeit sei in wesentlicher Hinsicht so etwas wie eine Dimension des Raums...?" oder „Wie konnte nur man meinen, eine indeterministische Haltung sei *per se* unwissenschaftlich?" Für dieses Ziel wird jedoch nicht explizit argumentiert. Aber mein (angesichts der vielen Formeln wahrscheinlich eher unrealistischer) Wunsch wäre, dass man diese Studie liest wie einen Roman, nach dessen Lektüre man ein paar Dinge anders sieht. Dem an der wissenschaftlichen Seriosität der Metaphysik Zweifelnden mag sie einen Eindruck vom inzwischen darin üblichen Standard vermitteln.

Formale Sprachen sind in der Metaphysik nie Selbstzweck. Es geht darum, aus der Begründung ihrer Anwendbarkeit philosophisch etwas zu lernen. Eine solche Begründung ist sehr weitläufig verwandt mit dem, was Kant „Transzendentale Deduktion" nennt: Indem man prüft, ob man eine bestimmte Deutung einer formalen Sprache befürwortet, prüft man auf durchsichtige Weise die eigenen Intuitionen. Nur muss man sich darüber im Klaren sein, dass die Deutung ein ganz eigener Vorgang ist, und man muss deshalb die formale Sprache und ihre Deutung sehr genau voneinander trennen. Solange man über Axiomensysteme nachdenkt, ist das ein Gemeinplatz. Ich bin aber nicht sicher, ob diese Einsicht beim Schritt von der abstrakten modelltheoretischen Semantik zur angewandten Semantik immer beherzigt wird.[18] Leicht hält man schon die abstrakte modelltheoretische für die inhaltliche Deutung und meint z.B., wenn man den formal-metasprachlichen Ausdruck „V(p,w)=1" vorlese als „'p' ist in der möglichen Welt w wahr", habe man gar nichts weiter getan und alles sei jetzt klar. Von wegen! Was sind mögliche Welten? Was heißt hier „in"? Und woher weiß ich denn, dass der V-Wert 1 der abstrakten modelltheoretischen Semantik als „wahr" zu interpretieren ist? In der vorliegenden Studie halte ich durchgängig abstrakte und angewandte Semantik streng getrennt, und das Verb „deuten" ist wahrscheinlich das am häufigsten gebrauchte fachlich gewichtige Wort in dieser Studie. Dadurch wirkt die Einführung mancher Sprache vielleicht zunächst übertrieben abstrakt, aber Anschaulichkeit wäre hier ein Scheinerfolg.

[18] Ich habe versucht, dieses Programm für den elementaren Logikunterricht in meiner „Einführung in die Logik" (2005) konsequent zu verfolgen.

7. Das Paradigma: „branching spacetime“, undogmatisch

Der von Thomas Kuhn in die Wissenschaftstheorie eingeführte wertvolle Begriff des Paradigmas erlaubt die Frage: In den Rahmen welches Paradigmas ist die vorliegende Arbeit einzuordnen? Dabei umfasst ein Paradigma neben methodischen auch inhaltliche Prämissen. Schon beim Durchblättern ist klar, dass es sich um eine Arbeit im Stil der analytischen Philosophie handelt – und innerhalb der Bandbreite dieses Stils um eine besonders formale. Das grenzt aber angesichts der inzwischen erfreulich weiten Verbreitung des analytischen Stils auch in Kontinentaleuropa heute eigentlich nicht mehr ein Paradigma ab.

Eine genauere Eingrenzung des Paradigmas liefert schon das Stichwort „Indeterminismus“. Eine Arbeit über *Alternativen* in der Raumzeit macht nur als Ausarbeitung eines Stücks einer *in*deterministischen Metaphysik Sinn. Fragt man sich, wie stark der Indeterminismus, um den es geht, sein soll, so lautet die Antwort: denkbar stark.[19] Indeterminismus ist mehr als die These, dass die Zukunft unabsehbar ist – das ist sie zweifellos. Es kommt darauf an, ob sie alternativlos ist. Hoffentlich ist sie es nicht. Es will mir nicht in den Kopf, dass es angemessen sein soll, einen verschossenen Elfmeter so zu kommentieren: „Was hätte schon, da der Urknall so war, wie er war, anderes passieren sollen?“ – ganz zu schweigen davon, was bei einer solchen Einstellung etwa aus der Hoffnung auf Genesung oder auf erwiderte Liebe wird. Viele Philosophen hätten dies für ein Zeichen geistiger Unreife gehalten.[20] Dem Indeterministen dagegen mag manchmal angesichts überraschend scharfer Reaktionen auf seine Ansicht durch den Kopf gehen: „Wie anstrengend es doch dem Deterministen ist, seine sicher unter großer Mühe erworbenen Vorurteile gegen Kritik abzuschirmen...“

Das Ziel dieser Arbeit ist jedoch nicht, *allgemein* dafür zu argumentieren, dass der Indeterminismus wahr ist. Sie kann vielleicht indirekt etwas dazu beitragen, dass sich diese Ansicht durchsetzt, indem sie deutlich macht, inwiefern man sie detailliert und kohärent ausarbeiten und auch mit derjenigen Haupttheorie der modernen Physik in Verbindung bringen kann, die ihr nicht schon so nahe steht wie die Quantentheorie. Ich vermute zwar, dass unter den Philosophen die Indeterministen zur Zeit noch in der Minderheit sind. Aber sie sind nicht mehr einfach als Freaks abzutun; dafür sind es zu viele, und sie haben zu viel Detailliertes zu sagen.

Auch das Stichwort „Indeterminismus“ lässt freilich noch viel Raum. Vielleicht stellt man sich die Eingrenzung eines Paradigmas am besten vor als die Antwort auf die typische Frage in der Kaffeepause zwischen zwei Vorträgen auf einer Fachtagung: „Was macht dieser N.N. eigentlich?“ Im Sinne dieser Frage ist das Paradigma der vorliegenden Studie „branching spacetime“. Denn die Erforschung verzweigter Raumzeit hat sich seit Belnaps Aufsatz darüber von 1992 in der Tat zu einem erfolgreichen Forschungsparadigma entwickelt.

---

[19] Für eine weitere informale Charakterisierung durch Belnap et al. in „Facing the Future“ vgl. z.B. S.vi f. – „hard determinism“ - und S.136 – „objective determinism“.

[20] Z.B., um die lesenswertesten zu nennen, Hume, Spinoza und Schopenhauer.

Nur ist dieses Buch keine Gesamtdarstellung des Paradigmas „branching spacetime“, auch wenn man daraus einen ersten Eindruck wird gewinnen können. Der Grund dafür ist etwas kompliziert: Ein Paradigma lässt selbst wieder Raum für untereinander verschiedene Ansichten. Es gibt innerhalb eines Paradigmas oft eine Hauptströmung und auch Ansichten, die von der Hauptströmung abweichen. Nun mache ich mir keine Illusionen darüber, dass ich in einer ganzen Reihe von Punkten von der Hauptströmung des Paradigmas „branching spacetime“ abweiche. Dieses Buch ist in gewisser Weise ein – bei aller Deutlichkeit immer freundlicher – Gegenentwurf zur gegenwärtig herrschenden Meinung innerhalb des Paradigmas „branching spacetime“. Das war zu Beginn der Arbeit 2001 gar nicht beabsichtigt, sondern ist mir selbst erst im Laufe der Arbeit klar geworden.
Von den Abweichungen sind einige bloß darstellungstechnisch (und damit harmlos) oder technisch (ziemlich harmlos), einige aber auch philosophisch (nicht harmlos).

Darstellungstechnisch ziehe ich dreidimensionale Diagramme mit *übereinander* dargestellten Alternativen den zweidimensionalen Diagrammen mit *nebeneinander* gezeichneten Alternativen vor, die seit Belnaps Aufsatz üblich sind. Zu Beginn der Arbeit habe ich sie mit Uhu und Schere hergestellt, aber sie ließen sich dann doch ganz gut zeichnerisch umsetzen, so dass ich diesem Buch keinen Bastelbogen beilegen muss.

Technisch gesehen treffe ich eine andere Entscheidung als Belnap, was die Primitiva der Modelle angeht. Bei Belnap sind diese als *mögliche* events zu deuten, hier sind es events, die in verschiedenen Alternativen verschieden inhaltlich „gefüllt“ sind. Diese Entscheidung wird in Kap. IV 1 genauer begründet. Bei Belnaps Modellen steht eher Arthur Prior Pate, bei den hier verwendeten eher Franz von Kutschera. Modelle beider Sorten sollten weitgehend ineinander übersetzbar sein. Freilich legen Modelle im Stile Belnaps psychologisch eine Ontologisierung von Alternativen nahe, die metaphysisch gesehen schon nicht mehr ganz harmlos ist. Modelle im Stile Kutscheras unterstützen dagegen eher die richtige Intuition, dass Alternativen ontologisch harmlos und billig zu haben sind. Rede von Alternativen heißt eigentlich nur: Die Raumzeit kann inhaltlich in der einen oder aber auch in der anderen Weise beschaffen sein. Die adverbiale Redeweise, dass sich *die* Welt h-artig entwickelt, ist der Redeweise, nach der eine Alternative h verwirklich wird, vorzuziehen.

Philosophisch gesehen gibt es zwei hauptsächliche Abweichungen von der Hauptströmung:

(1) Das Wort „branching“ oder „Verzweigung“ verstehe ich gänzlich metaphorisch und damit schwächer als die meisten Vertreter des „branching spacetime“-Paradigmas. Entsprechend ist diejenige raumweite Gegenwart, an die ich in der Tat glaube, ontologisch weniger robust als die, an welche die meisten Vertreter des Ansatz glauben. Raumweite Gegenwart ist Bezugssystem-relativ.[21] Ich vermute, dass zu Beginn der Erforschung der temporalisierten Modallogik, wenn sich Baumdiagramme an der Tafel ergaben, das Wort „branching“ zu ihrer Beschreibung vernünftigerweise noch als Verbalsubstantiv gebraucht wurde. Doch unter der Hand ist es dazu

[21] Sie ist daher nicht so unproblematisch wie z.B. Storrs McCall sie in seinem „Model of the Universe“ (1994) darstellt.

gekommen, dass man es als Partizip Aktiv Präsens auffasste und annahm, es beschreibe eine mysteriöse Aktivität, die das Universum vollzieht. Das ist um so seltsamer, als diese Aktivität nicht im Sich-Verzweigen, sondern vielmehr in der Reduktion von Verzweigungen bestehen müsste.[22] Ich halte das für Verhexung durch Sprache.[23] Es gibt keine solche Aktivität des Universums. Dennoch glaube ich, dass verzweigte Modelle sehr gute Modelle für die Darstellung des Indeterminismus sind. Ich wüsste nicht, wo ich ohne sie anfangen sollte. Der Vorteil der Abweichung auch für Vertreter der Hauptströmung könnte sein: Falls jemand behauptet, dieses Paradigma sei nur sinnvoll für jemanden, der an eine ontologisch-robuste raumweite Gegenwart glaubt, so kann man ihm zumindest entgegnen, dass es innerhalb des Paradigmas auch eine andere Ansicht gibt. Meiner Meinung nach nimmt sie die Relativitätstheorie ernster. Sie versucht nämlich nicht nur, mit ihren Formeln nicht in Konflikt zu geraten, sondern auch ihrem Geist gerecht zu werden.

(2) Als ich der Arbeit an dieser Studie begann, war ich bezüglich der Aussichten, mit kombinierter Zeit- und Modallogik Handlungstheorie betreiben zu können, optimistischer, als ich es heute bin. Die Gründe finden sich in Kapitel II 2. Das ist deshalb bemerkenswert, weil eines der am intensivsten von Vertretern des Paradigmas erforschten Gebiete die Handlungstheorie ist.[24] Denn ein Teil des Paradigmas ist der inzwischen unter dem Kürzel STIT bekannte Ansatz, der den Anspruch erhebt, die Natur des „seeing to it that“ zu erhellen. Dennoch hoffe ich, dass die hier erzielten Ergebnisse STIT-kompatibel sind. Wer an starker handlungstheoretischer Freiheit interessiert ist, der kann diese Studie als Studie der Frage lesen: Wieviel Freiheit lässt uns Einstein? Wenn es stimmt, zu sagen „Wenn die spezielle Relativitätstheorie wahr ist, dann ist der Determinismus wahr“, dann lässt uns Einstein möglicherweise nicht soviel Freiheit wie manche gerne hätten. Diese Studie zeigt unter anderem, warum der „Wenn..., dann...“-Satz eben nicht stimmt – aber auch, warum dieses Ergebnis nicht so trivial ist, wie vielleicht andere meinen.

Überhaupt hoffe ich, dass die technischen Ergebnisse der Studie auch für Leser hilfreich sind, die meine Ansichten nicht ganz teilen. Dies gilt auch für überzeugte Verfechter des Alternativen-Ockhamismus, die innerhalb des „branching spacetime“-Paradigmas in der Mehrheit sein dürften, oder für Logiker, die, anders als ich, Wahrheitswertlücken ablehnen.

Wer sich über das Paradigma „branching spacetime“ und seine Hauptströmung einen gründlichen Überblick verschaffen will, dem sei empfohlen, sich an den folgenden Stellen zu informieren:

- Nuel Belnaps Aufsatz „branching spacetime“ (1992)
- Storrs McCalls Buch „A Model of the Universe“ (1994)
- Nataša Rakićs Buch „Common Sense Time and Special Relativity“ (1997)
- „Facing the Future“ von Belnap, Perloff und Xu (2001)
- Kap. 4 von Thomas Müllers „Arthur Priors Zeitlogik“ (2002)

---

[22] McCall schreibt, etwas glücklicher, a.a.O. von „branch attrition“ („Entastung“).
[23] Vgl. Wittgenstein PU §109.
[24] Einen Überblick auf dem Stand von 2001 liefert „Facing the Future“ von Belnap, Perloff und Xu.

- Das „Philosophy of Science“ Preprint-Archiv der Universität Pittsburgh im Internet, in dem man über das Stichwort „branching space-time“ auch technische Papiere auf dem jeweils neuesten Forschungsstand findet.[25]

8. Der Aufbau des Buchs

8.1 Gliederung

Der Haupttext des Buchs ist in vier Teile untergliedert, denen jeweils ein Paar von Mottos vorangestellt ist. Teil I enthält zwei, Teil II und III jeweils drei und Teil IV vier Kapitel. Auf den Haupttext folgt ein umfangreicher Begründungsteil. Ein Anhang informiert über die Debatte zum Problem des Raumartigen zwischen den 1960er und 1990er Jahren. Vor dem Literaturverzeichnis findet sich außerdem eine Tafel der Interaktionsgesetze aller behandelten Modaloperatoren.

8.2 Teil I: Von der Logik des Punkts zur Logik der Raumzeit

Teil I enthält relativ viel technischen Stoff, der aus den oben erläuterten Gründen zunächst von der Deutung getrennt gehalten wird.

Das erste Kapitel von Teil I „Von der Logik des Punkts zur Logik der Linie“ (I 1) führt von der klassischen Aussagenlogik, die man als auf Zustände an einem Punkt eingeschränkte Logik deuten kann, zur Logik der Linie, z.B. einer Koordinatenachse. Kapitel I 1 beginnt mit einem Unterkapitel zur Aussagenlogik (I 1.1). Es führt ein, was das Problem der ganzen Studie unter Spannung hält: die Frage des Verhältnisses von aussagenlogischen Sprachen zur Korrespondenztheorie der Wahrheit, wenn die Aussage ins Leere geht. Kap. I 1.2 enthält eine kurze Einführung in monomodale und bimodale Logiken. Der mit solchen Logiken vertraute Leser sollte es dennoch nicht übergehen: Wenn er sich mit Zeitlogik vor 1990 vertraut gemacht hat, hat er sie nämlich wahrscheinlich noch gar nicht als Sonderform der modallogischen Fusion kennengelernt. Kap. I 1.3 stellt die Deutungen vor.

Das zweite Kapitel von Teil I, „Von der Logik der Fläche zur Logik der Raumzeit“, stellt Grundlagen der multidimensionalen Logik vor. Dort wird der wichtige Begriff des modallogischen Produkts erläutert. Es werden ferner die typischen Schemata vorgestellt, die produkt-allgemeingültig sind: Das Kommutativitäts-Schema (com) und das Church / Rosser-Schema (chr). Ihre Untersuchung in verschiedenen

---

[25] Es findet sich unter http://philsci-archive.pitt.edu und sei besonders den Lesern empfohlen, die sich darüber informieren möchten, wie eine indeterministische Deutung der Quantenphysik mit Mitteln des Paradigmas diskutiert werden kann. Dies ist ein wichtiges Feld, zu dem ich mich in dieser Studie nicht äußere.

multidimensionalen Logiken zieht sich wie ein roter Faden durch die formalen Überlegungen im Rest der Studie. Als Anwendungen werden Produktlogiken für Ebene, dreidimensionalen Raum und vierdimensionale Raumzeit vorgestellt. Am Schluss des Kapitels wird die Produktlogik für die vierdimensionale Raumzeit in eine spatio-temporale Logik mit den weniger feinkörnigen Raumoperatoren „S“ und „E“ abgewickelt. Schließlich werden mit Hilfe des Begriffs des events die Begriffe „Zeitpunkt“, „Ort“ und „Koordinate“ geklärt und zueinander in Beziehung gesetzt.

8.3 Teil II: Tempo-modales Kontinuum und Alternativen in der klassischen Raumzeit

Teil II beschäftigt sich mit zeitlich strukturierten Alternativen und erweitert diese im klassischen Rahmen, also noch ohne Berücksichtigung der Relativitätstheorie, um eine spatiale Dimension.

Im ersten Kapitel des zweiten Teils, „Die zukünftige Seeschlacht“, werden die bisher zum Seeschlachtproblem vertretenen formalen Lösungen im Rahmen einer einzigen formalen Sprache verglichen. Sie heißt LF (für „lingua franca“). Ich war selbst überrascht, wie vieles bei der *Deutung* der formalen Lösungsansätze (ockhamistische Lösung Priors, Peirceanische Lösung Priors, Thomason, Harada) auf dem intensiv erforschten Feld im Argen lag. LF ist zwar technisch gesehen eine „ockhamistische“ Sprache: Eine Alternative ist Komponente des Bewertungskontexts. Ein philosophisches Ziel des Kapitels ist aber, zu zeigen, dass der Ockhamismus für Alternativen unplausibel ist. Ein weiteres Ziel ist, zu zeigen, dass sich die beiden plausibelsten Lösungen (Thomason’sche Supervalutationen und Peirceanische Lösung) als verschiedene, letztlich kompatible Ausdeutungen der Korrespondenztheorie der Wahrheit auffassen lassen.[26]

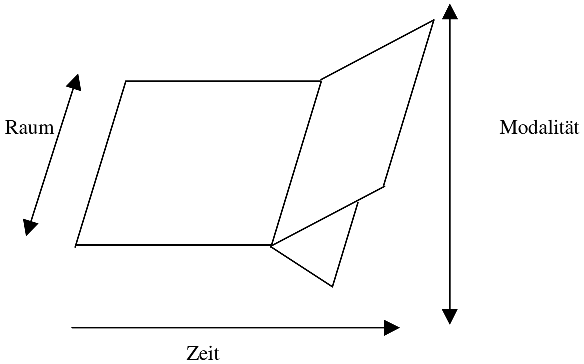
Das zweite Kapitel des zweiten Teils trägt den Titel „Welcher Indeterminismus – und warum?“ Es ist das am wenigsten formale Kapitel der Arbeit und lässt sich zur Not auch einzeln lesen. Es wird darin erklärt, welcher Begriff von Indeterminismus der Deutung der verwendeten Modelle zu Grunde liegen soll. Ferner wird die mögliche Motivation eines solchen Indeterminismus durch naturphilosophische, handlungstheoretische und existenzielle Gründe untersucht. Das Kapitel enthält

- einen Exkurs zu STIT
- ein Plädoyer für Entscheidungen *mit* Zeitpunkten und nicht etwa *an* Zeitpunkten (und somit für „upper cuts“)
- eine Zurückweisung von Humes Herausforderung, nur der Determinismus verknüpfe Täter und Tat

[26] Kap. II 1 überschneidet sich thematisch mit meinem Aufsatz „Logik für die Seeschlacht“ (1998), den ich angesichts der vorliegenden Studie inzwischen als inhaltlich völlig überholt ansehe. Außerdem sind darin folgende Fehler zu korrigieren: Im zweiten Definitionenblock auf S.117 ist "keine" als Schreibfehler zu streichen. Auf S.106 in Fußnote 4 die beiden Klammerausdrücke "('Peircesche')" und "('ockhamistische')" zu streichen. Das auf S. 108, Fußnote 8 zu 18a34f, 18b18-21 und 19a36f Gesagte ist als Interpretation des Textes nicht vertretbar.

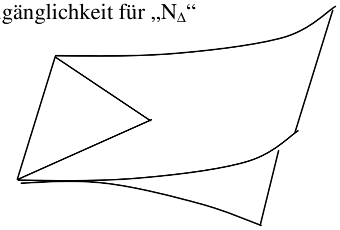
- ein Plädoyer dafür, den Satz vom zureichenden Grund durch einen Satz vom unzureichenden Hinderungsgrund zu ersetzen
- einen Vorschlag dafür, Nancy Cartwrights Konzept der „nomological machine“ für den Indeterminismus fruchtbar zu machen.

Das dritte Kapitel des zweiten Teils, „Alternativen in der klassischen Raumzeit“ erweitert zunächst LF-Modelle um eine spatiale Dimension: Alternativen, im Sinne von tempo-spatialen Weltblättern, werden zu einem Weltbuch zusammengeleimt.

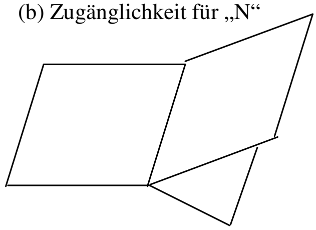


In einem zweiten Schritt wird das Operatorenpaar „N“/„M“ unter klassischen Voraussetzungen ausdifferenziert. Dabei entstehen Modelle der Sprache 3N.

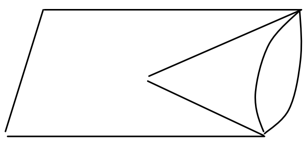
(a) Zugänglichkeit für „N_Δ“



(b) Zugänglichkeit für „N“



(b) Zugänglichkeit für „N_∇“



Deutung (ungefähr):
„N_Δ“ : „wissbar“
„N“ : „feststehend“
„N_∇“ : „nicht beeinflussbar“

Als wichtig für die Deutung von „N_∇“ erweist sich dabei der Unterschied von „dass“- und „ob“-Sätzen.

8.4 Teil III: Relativistische Raumzeitlogik ohne Alternativen

In Teil III wird die modale Dimension wieder vernachlässigt. Dafür findet der Übergang vom klassischen zum relativistischen Bild statt, indem Weltblätter nunmehr je nach Bezugssystem *verschieden* in Orte und Zeitpunkte partitioniert sein können.

Im ersten Kapitel des dritten Teils, „Von der Relativitätstheorie zur relativistischen Raumzeitlogik“ werden zunächst kurz die Aspekte der Relativitätstheorie vorgestellt, die für die vorliegende Studie eine Rolle spielen. Es werden dann kurz bisherige Ansätze für eine relativistische Raumzeitlogik (Prior / Goldblatt, Rakić, Müller) vorgestellt und z.T. kritisiert.

Im zweiten Kapitel des dritten Teils, „Relativistische Raumzeitlogik mit Orts- und Bezugssystem-Operatoren“ wird eine solche Logik von Grund auf neu entwickelt: die Sprache Rel mit ihren Operatoren „für jedes Bezugssystem gilt“ / „für manches Bezugssystem gilt“. Es wird gezeigt,

- dass die Spezielle Relativitätstheorie (SR) ein ziemlich eingeschränkter Spezialfall für Rel-Modelle ist;
- dass sich die kausalen Operatoren Priors in Rel definieren lassen;
- dass sich das Argument Rietdijks dafür, dass die SR den Determinismus impliziert, zwar bereits im Rahmen von Rel zurückweisen lässt, es aber auch interessante Fingerzeige gibt.

Im dritten Kapitel des dritten Teils wird die Sprache Rel angewandt. Es trägt den Titel „Fast wie die Seeschlacht: Wahrheitswerte im Raumartigen und im Lichtkegel“. Es wird darin gezeigt, dass verschiedenen Positionen zu Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft im Rahmen der SR Positionen zum Seeschlachtproblem genau entsprechen: Es gibt z.B. auch Bezugssystem-Ockhamisten und Bezugssystem-Peirceaner. Der Ockhamismus für Bezugssysteme schneidet dabei, im Gegensatz zum Ockhamismus für Alternativen, überraschend gut ab. Rel erweist sich aber als defizitär, weil sich darin Zukunft und Vergangenheit nicht prinzipiell unterscheiden. Dafür bedarf es der Berücksichtigung von Alternativen.

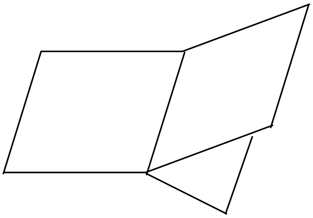
8.5 Teil IV: Relativistische Raumzeitlogik mit Alternativen

In Teil IV wird der relativistischen Raumzeitlogik die modale Dimension hinzugefügt.

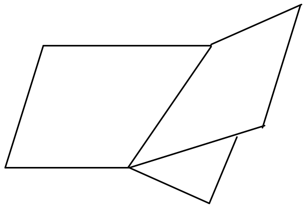
Im ersten Kapitel von Teil IV, „Verzweigte Raumzeit (branching spacetime)“, wird der von Belnap (und Rakić) dazu vertretene Vorschlag eingehend vorgestellt, aber auch kritisiert. Besondere Bedeutung hat die Zurückweisung des von Belnap befürworteten „prior choice principle“.

Im zweiten Kapitel von Teil IV, „Formale Sprachen für die verzweigte Raumzeit“, werden die Sprachen LF×Rel und 3N×Rel beschrieben. LF×Rel enthält „N“, nicht aber „N_Δ“ und „N_∇“. Die Modelle dieser Sprache lassen sich darstellen wie Weltbücher, nur dass nun die Neigung der Faltkante je nach Bezugssystem anders ist.

(a) LFxRel-Modell,
dargestellt: Zugänglichkeit für „N“ in b_1



(b) LFxRel-Modell
dargestellt: Zugänglichkeit für „N“ in b_2



In einem zweiten Schritt werden „N_Δ“ und „N_∇“ wieder hinzugefügt. Dadurch entsteht die Sprache 3N×Rel. Das zentrale Problem der Studie lässt sich nun in Form der folgenden Frage behandeln: Soll man die ontisch relevante Zugänglichkeit von Alternativen so darstellen wie die Zugänglichkeit für „N“ oder eher wie die Zugänglichkeit für „N_Δ“ oder „N_∇“?

Das dritte Kapitel des vierten Teils trägt den Titel „Wie die Seeschlacht: der (verhinderte) Weltraumkrieg“. In diesem Kapitel wird die Sprache 3N×Rel auf eine relativistische Raumzeit-Version des Seeschlacht-Szenarios angewendet (3.1). Dabei lassen sich zwei Arten der Peirceanischen Position und zwei Arten der Supervaluation unterscheiden:

- die Supervaluation an der Bezugssystem-relativen Faltkante
- die Supervaluation über den Vergangenheitslichtkegel.

Manche der Ansätze ergeben contingentia praesentia und praeterita. In Kap. IV 3.2 wird die wichtige Frage geklärt, was in der relativistischen Raumzeit überhaupt die „res stantes“ sind, wenn man eine Formel *rebus sic stantibus* bewertet. Viel spricht dabei dafür, dass sie nur den Vergangenheitlichtkegel umfassen. Das bedeutet den Ausschluss der „wings“. Es werden daher in Kap. IV 3.3 sieben Gründe gegen den Ausschluss der „wings“ diskutiert und zum größten Teil zurückgewiesen.

Im vierten und abschließenden Kapitel des vierten Teils wird dafür argumentiert, dass die Darstellung im Sinne von „N_Δ“, also der Ausschluss der „wings“, zwar die Sache im Wesentlichen, nämlich im Sinne der *deiktischen* Determiniertheit („*So* ist es“), richtig trifft. Im Sinne der *narrativen* Determiniertheit („Damit hat es sich entschieden dass...“) allerdings kommt auch der Darstellung im Sinne von „N“ eine wichtige ergänzende Funktion zu. Die bisherige Debatte scheint mir deshalb festgefahren, weil zwischen beiden Arten der Determiniertheit nicht unterschieden wurde. Deshalb scheinen beide wesentlichen Lager in der Debatte Argumente *gegen* die jeweils andere Position zu haben, die sie in ihrer jeweiligen Meinung bestärken. Die Differenzierung wirkt sich auf die Deutung der Operatoren aus, die sich im Vergleich zum klassischen Bild verschiebt. Nunmehr ist „N_Δ“ ontisch zu deuten, „N“ aber narrativ. Kern der Überlegungen ist eine modalisierte Version des bekannten Tunnelbeispiels der SR („Ist der Tunnel länger oder kürzer als der Zug?“) als Geschichte von Entscheidungen. Dabei wird zunächst die Historiker-Perspektive geschildert. Es wird die Ansicht (Belnaps) zurückgewiesen, verschiedene gleichberechtigte indeterministische Erzählungen setzten eine unplausible „massive coincidence“ voraus. Dem wird die Konzeption des Raums als Erzählform entgegengesetzt. Schließlich lassen sich die Parallelen zum Seeschlachtproblem auch aus der Reporter-Perspektive beschreiben und die damit verbundenen Probleme lösen. Eine wichtige Rolle spielen dabei die schon in Kap. II 3 bemerkten unterschiedlichen Wahrheitsbedingungen für „dass"- und „ob"-Sätze. Das Buch schließt mit einer kleinen Phänomenologie des existenziellen Faktums der Erleichterung unter relativistischen Voraussetzungen und damit einem Plädoyer für die Bedeutung der so genannten zeitlichen A-Ordnung. Vor dem Fazit wird auf verbleibende Aufgaben verwiesen.

8.6 Der Begründungsteil

Der Begründungsteil kann nach Belieben konsultiert oder übergangen werden. Jede einzelne formale Begründung (zuweilen syntaktischer Beweis, zuweilen semantisches Argument, zuweilen informale Erläuterung mit Hilfe formaler Begriffe) ist relativ einfach und lässt sich mit logischem Grundwissen und common sense nachvollziehen. An vielen Stellen hätte an ihrer Stelle in anderer, auch guter, Literatur wahrscheinlich etwas gestanden wie „It is easily checked that..." oder „The proof is left as an exercise to the reader". Nun hat man aber manchmal gerade keine Lust auf Hausaufgaben. Ich habe auch einige Standard-Beweise zu monomodalen Logiken lieber noch einmal angegeben.

8.7 Die Mottos

Das Motto zur Einleitung stammt von der CD „Things to make and do" von Moloko.

Die Mottos zur Teil I sind einem bekannten Lied aus den 1960er Jahren entnommen sowie dem Eingangssatz von Thomas von Aquins „De ente et essentia": Ein kleiner Fehler am Anfang ist am Ende ein großer.

Die Mottos zu Teil II stammen aus Salman Rushdies Roman „Midnight's Children" (S.368, 462). Am Ende des Buchs hat es der Held zum Chutney-Fabrikanten gebracht, der seine Autobiografie verfasst, indem er den Geschmack jedes Lebensjahres in einer Sorte Chutney einfängt. Die Feststellung, dass immer ein Glas Chutney leer bleiben muss, da sich der Geschmack der Zukunft noch nicht einmachen lässt, steht am Beginn einer mehrere Seiten langen Beschreibung der bevorstehenden Hochzeitsfeier im *tempus futur*, mit der das Buch schließt.

Die Mottos zu Teil III stammen aus Milič Čapeks „The Philosophical Impact of Contemporary Physics" (S.161) und aus einem Lied von Thomas Morley um 1600. Hörenswert ist die Aufnahme mit Julian Bream und Peter Pears.

Bei den Mottos zu Teil IV handelt es sich zum einen um einen Textschnipsel aus Platons „Menon". Platons Sokrates ahnt, dass er Unmögliches verlangt, wenn er vom Sklavenjungen in der Geometriestunde den Namen der irrationalen Zahl $\sqrt{8}$ gesagt hören wollte. Er fordert ihn deshalb auf: „...wenn du es nicht herzählen kannst, von was für einer [Linie] aus, dann *zeig* doch einfach drauf".[27] Das macht der denn auch. Denn auf Sokrates' Frage „Von was für einer her denn nun?" ist seine Antwort „Von *der* da!" Zum anderen handeltes sich um die letzte Zeile eines Gedichts von Arnaldo Antunes, die, nach Aufzählung einer Menge mehr oder weniger physikalischer Eigenschaften der Dinge, festhält: Die Dinge haben keinen Frieden. Das Gedicht findet sich hörenswert vertont auf der CD „Tropicalia 2" von Gilberto Gil und Caetano Veloso.

9. Danke

Manchmal kommt ein Thema einfach zu einem. Es ist ein Glück, es dann ausarbeiten zu dürfen. Ich hatte ideale Arbeitsbedingungen. Für den Druck dieses Buchs hat die VG Wort einen Druckkostenzuschuss gewährt.

Mein Dank gilt aus den verschiedensten Gründen Hermann Weidemann (Münster), Heinrich Wansing (Dresden), Nikos Psarros und Pirmin Steckeler-Weidhofer (Leipzig), Thomas Müller und Rainer Stuhlmann-Laeisz (Bonn) sowie Kai Wehmeier (damals Tübingen, inzwischen Irvine), Frank Wolter (London), Elfi Strobach-Rautmann und Josef Boasson (Braunschweig), Gisela Pfeil und Berndt Strobach (Wolfenbüttel) sowie Hanna und Hans-Otto Wilmer (Lengerich / Westf.).

Ulrich Nortmann (Saarbrücken), Peter Øhrstrøm (Aalborg) und Bertram Kienzle (Rostock) haben die Arbeit (in einer noch längeren Fassung!) begutachtet und mir viele wertvolle Kommentare zukommen lassen. Bertram Kienzle hat über mehrere Jahre an ihrer Entstehung teilgehabt. Praktisch alles, was zum Thema „Verinselung" in dieser Arbeit steht, steht mit Gesprächen mit ihm in direktem Zusammenhang. Ohne die Förderung durch ihn gäbe es dieses Buch nicht.

Während der ganzen Zeit der Arbeit erfuhr ich jede nur denkbare Ermutigung und Unterstützung von meiner Frau Mechthild Strobach. Es ist unmöglich, anzudeuten, wie wichtig das war.

Kiel, im Januar 2007

[27] Platon, Menon 84A, 85B, meine Übersetzung. Vgl. zur Begründung der These meinen Aufsatz "Plato – Mystic and/or Sceptic?" (2003).

TEIL I

VON DER LOGIK DES PUNKTES ZUR LOGIK DER RAUMZEIT

parvus error in principio magnus est in fine.

Little boxes on the hillside
Little boxes made of ticky-tacky,
Little boxes on the hillside,
Little boxes all the same.

KAPITEL 1

Von der Logik des Punktes (Aussagenlogik) zur Logik der Linie

1.1 Die Basis: propositionale Logiken

1.1.1 Was ist eine formale Sprache?

Die vorliegende Studie untersucht die Anwendbarkeit *formaler Sprachen* auf ein Problem der Metaphysik. Was wird dabei überhaupt unter einer formalen Sprache verstanden? *Hier* soll darunter im Folgenden mehr verstanden als eine Formelmenge. Es soll immer eine formale Semantik im Sinne einer Modelldefinition dazu gehören: Formeln der Sprache werden in Bezug auf gewisse in der Sprache der Mengenlehre beschreibbare Strukturen Werte zugeordnet, die (manchmal) als „wahr“ und „“falsch“ gedeutet werden. Eine Axiomatik, sofern sie überhaupt abschließend angegeben wird, soll dagegen nicht zur formalen Sprache selbst gehören, sondern sie soll als *Herleitungsspiel* für allgemeingültige Formeln einer formalen Sprache angesehen werden. Dies ist besonders bei den Modallogiken zu beachten, deren übliche Namen (S5 etc.) sich demnach i.F. immer auf *Semantiken* beziehen, nicht auf die entsprechenden Axiomensysteme. Nicht nur Axiomatiken für formale Sprachen, auch formale Sprachen selbst sind an sich Spiele, die von einer Deutung ganz unabhängig sind. In dieser Studie sollen formale Sprachen, wie üblich, Spiele sein, die mit Mustern aus Druckerschwärze auf Papier gespielt werden. Um dabei die mit Druckerschwärze auf Papier hergestellte Abbildung einer Zeichenkette von der Zeichenkette selbst unterscheiden zu können, werden übliche *Anführungsstriche* verwendet. Griechische Kleinbuchstaben werden als metasprachliche Platzhalter verwendet. Im Zusammenhang damit werden auch – soweit nicht anders vereinbart – die von W.V.O. Quine vorgeschlagenen corner quotes verwendet, da die zum Erzeugen der Abbildung einer *bestimmten* Zeichenkette reservierten Anfühungsstriche nicht verwendet werden können.

1.1.2 Das Spiel PC und seine Deutung als klassische Aussagenlogik

Ein sehr einfaches und für das Folgende fundamentales Spiel soll i.F. **PC** genannt werden. Es ist im Wesentlichen das, was im einführenden Logikkurs die klassische

Aussagenlogik heißt – ob diese Benennung nun plausibel ist oder nicht. Das **Alphabet von PC** besteht aus Zeichen dreier Sorten: den Buchstaben „p", „q", „r" und „s", den Junktoren genannten Symbolen „~" und „→" und den Hilfszeichen „*", „)" und „(". „p", „q", „r" und „s" sind **atomare Formeln von PC**, und wenn α eine atomare Formel von PC ist, so auch $\ulcorner\alpha^*\urcorner$. Jede atomare Formel von PC ist eine **wohlgeformte Formel von PC**; wenn α eine wohlgeformte Formel von PC ist, so auch $\ulcorner{\sim}\alpha\urcorner$, und wenn α und β wohlgeformte Formeln von PC sind, so ist auch $\ulcorner(\alpha\rightarrow\beta)\urcorner$ eine wohlgeformte Formel von PC. Die Zeichen „∨", „∧", „ ≡", „∇" werden, wie üblich, durch Abkürzungsregeln eingeführt: $\ulcorner({\sim}\alpha\rightarrow\beta)\urcorner$ kann durch $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$ abgekürzt werden, $\ulcorner{\sim}({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)\urcorner$ durch $\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\urcorner$, $\ulcorner((\alpha\rightarrow\beta) \wedge (\beta\rightarrow\alpha))\urcorner$ durch $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ und $\ulcorner(\alpha \vee \beta) \wedge {\sim}(\alpha \wedge \beta)\urcorner$ durch $\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner$. Klammern können in unmißverständlichen Fällen weggelassen werden, und allgemein soll „∧" stärker binden als die anderen Junktoren. Eine **PC-Interpretationsfunktion** ist eine Funktion, die jeder *atomaren* Formel von PC einen der Werte 1 oder 0 zuordnet. Ein **PC-Modell** ist ein geordnetes Paar $\langle I,V\rangle$, wobei gilt:

1. I ist eine PC-Interpretationsfunktion;
2. V ist eine Funktion, die jeder *wohlgeformten* Formel von PC einen der Werte 1 oder 0 zuordnet, wobei gilt: $V(\alpha)=1$ gdw α eine atomare Formel ist und $I(\alpha)=1$; α die Gestalt $\ulcorner{\sim}\beta\urcorner$ hat und $V(\beta)=0$; α die Gestalt $\ulcorner(\beta\rightarrow\gamma)\urcorner$ hat und $V(\beta)=0$ oder$^{\&}$ $V(\gamma)=1$.[1]

PC-Allgemeingültigkeit einer Formel α (mit metasprachlicher Abkürzung notiert als $\models_{PC} \alpha$) ist ihr Besitz des Wertes 1 in allen PC-Modellen; **kontradiktorisch** ist sie, wenn sie in allen PC-Modellen den Wert 0 erhält, **erfüllbar**, wenn sie in wenigstens einem Modell den Wert 1 erhält.

Es ist *nicht* üblich, eine Interpretationsfunktion auf die *atomaren* Formeln zu beschränken und ein *Modell* als geordnetes Paar aus einer Interpretationsfunktion und einer davon getrennten Bewertungsfunktion zu definieren, die doch ganz von der dabei verwendeten Interpretationsfunktion abhängt (für gewöhnlich spricht man bei Sprachen der geringen Komplexität von PC auch überhaupt noch nicht von Modellen). Doch es wird sich für *gedeutete* Modelle der Modallogik als sinnvoll erweisen, Alternativen formal als PC-Interpretationsfunktionen im hier definierten Sinne zu charakterisieren. Aus der Definition des PC-Modells folgen fast unmittelbar zwei Prinzipien:

(**B-Prinzip**) Es kann nicht vorkommen, dass eine Formel von PC in Bezug auf ein PC-Modell einfach wertlos bleibt, *jede* Formel bekommt einen Wert zugewiesen; dabei sind nur zwei Werte möglich: 1 und 0.

[1] Die Schreibweise „oder$^{\&}$" soll das *inklusive* „oder" ausdrücken. Die Funktionsnotation (z.B. „V...") soll die corner quotes verschlucken.

(**Entweder-oder-Prinzip**) Es kann nicht vorkommen, dass einer Formel von PC in Bezug auf ein PC-Modell mehr als ein Wert zugewiesen wird; keine Formel kann also in Bezug auf ein PC-Modell sowohl 1 als auch 0 sein.

Auf die Frage hin, was die Formeln der als Spiel eingeführten formalen Sprache PC *eigentlich* oder *an sich* bedeuten, ist die beste Antwort: gar nichts. Aber es gibt doch eine bekannte, dem autonomen Spiel selbst völlig externe *Deutung*, die üblicherweise der Anlass dafür ist, es zu spielen: PC lässt sich gut verwenden, um damit in begrenztem Rahmen Aussagenstrukturen nachzuformen und Argumente nachzuspielen, *wenn* man bestimmte Grundannahmen macht. Das Fundament dieser Deutung von PC ist, den Wert 1 als „wahr" zu deuten und den Wert „0" als „falsch". PC-Formeln sind dann Gegenstücke zu Wahrheitswertträgern und spielen deren Verhalten nach. Mit „$\wedge$" lässt sich dieser Deutung zufolge das Verhalten des (von der zeitlichen Abfolge absehenden) „und" zwischen Sätzen nachspielen, mit „$\vee$" das inklusiv verstandene „oder" (**Alternation**), mit „∇" das exklusiv verstandene „oder" (**Disjunktion**),[2] mit dem Pfeil (mehr schlecht als recht) die Wendung „wenn..., dann" und mit „~" das einen Satz negierende „nicht" („Es ist nicht der Fall, dass"). PC-allgemeingültige Formeln lassen sich so mit etwas assoziieren, das allein aufgrund seiner aussagenlogischen Struktur wahr ist, egal, wie sich die Dinge verhalten. Allerdings ist diese Deutung von PC alles andere als unschuldig: Schon was als *Wahrheitswertträger* gelten kann, ist weniger klar, als man zunächst meinen mag. Wichtiger ist: So wie PC definiert ist, kann es nicht sein, dass das Entweder-Oder-Prinzip gilt, das B-Prinzip aber nicht. Mit der üblichen Deutung werden B-Prinzip und Entweder-Oder-Prinzip zu Gegenstücken zweier inhaltlich-semantischer Prinzipien:

(**Semantisches Konsistenzprinzip**) Kein Wahrheitswertträger wird sowohl wahr als auch falsch; jeder Wahrheitswertträger kann höchstens einen Wahrheitswert auf einmal tragen.
(**Bivalenzprinzip**) Kein Wahrheitswertträger bleibt wahrheitswertlos; jeder Wahrheitswertträger hat einen der Wahrheitswerte „wahr" bzw. „falsch".

Wenn man (für *beschreibende* Aussagen) im weitesten Sinne eine Korrespondenztheorie der Wahrheit vertritt, so erscheinen zunächst beide Prinzipien gleichermaßen sehr plausibel. Denn danach kann man das Wesen von Wahrheit und Falschheit so charakterisieren (**minimaler Realismus**):

(W) Das Wesen der wahren Aussage besteht darin, dass man damit die Wirklichkeit treffend darstellt.
(F) Das Wesen der falschen Aussage besteht darin, dass man damit eine treffende Darstellung der Wirklichkeit verfehlt.

[2] Die Terminologie ist in der Literatur uneinheitlich. Zwischen Aussagenverbinder und Aussagenverbindung soll hier terminologisch nicht unterschieden werden, da Missverständnisse in diesem Punkt unmöglich sind.

Nach der Korrespondenztheorie der Wahrheit müsste also eine Verletzung des Konsistenzprinzips darin bestehen, dass man mit derselben Aussage die Wirklichkeit sowohl trifft als auch verfehlt - und was soll *das* heißen? Wie soll es andererseits möglich sein, die Wirklichkeit weder zu treffen noch zu verfehlen? Nur dann wäre aber das Bivalenzprinzip verletzt.[3] Trotzdem sind Zweifel am Bivalenzprinzip auch im Rahmen der Korrespondenztheorie möglich, ja gerade *wegen* ihr. So könnte man einwenden:

> Was, wenn man von einer Aussage nicht sagen kann, dass sie den Teil der Wirklichkeit, dessen Bild sie entwirft, trifft, aber auch nicht sagen kann, dass sie ihn verfehlt, weil dieser Teil der Wirklichkeit unter den Umständen, unter denen die Aussage geäußert wird, gar nicht als realisiert oder determiniert gelten kann? Eine Aussage, die weder trifft noch verfehlt, würde dann aber weder wahr noch falsch sein und so das Bivalenzprinzip widerlegen.

Es gibt denkbare Antworten, das Bivalenzprinzip gegen diesen Einwand zu verteidigen, z.B. die folgenden:

> (1) Wenn eine Aussage den Teil der Wirklichkeit, dessen Bild sie entwirft, nicht treffen kann, weil dieser unter den Umständen, unter denen sie geäußert wird, gar nicht als realisiert oder determiniert gelten kann, dann verfehlt sie ihn eben und ist deshalb falsch; und zwar nicht etwa, weil sie ihn *schlecht* trifft, sondern, weil es dann unter den Umständen der Äußerung gar nichts zu treffen gibt.
>
> (2) Ob der Teil der Wirklichkeit, dessen Bild eine Aussage entwirft, unter den Umständen, unter denen die Aussage *geäußert* wird, als realisiert oder determiniert gelten kann, ist völlig egal für die Frage, ob die Aussage treffend ist oder eine treffende Darstellung verfehlt. Dafür kommt es allein darauf an, ob das Bild, das die Aussage von dem fraglichen Teil der Wirklichkeit entwirft, diesen treffend darstellt (dann ist sie wahr) oder verfehlt darstellt (dann ist sie falsch).

An dieser Stelle genügt die Feststellung: Zweifel am Bivalenzprinzip sind nicht einfach vom Tisch zu wischen.

Angesichts der möglichen Zweifel am Bivalenzprinzip könnte man zunächst darauf kommen, als Alternative zu PC eine formale Sprache **PC3** definieren.[4] Sie ist eine Variante der dreiwertigen Logik. In PC3 können wohlgeformten Formeln nicht nur zwei, sondern drei Werte zugewiesen werden, wobei der neue Wert ½ als „unbestimmt“ gedeutet wird und außer „~“ noch der ebenfalls einstellige Operator „¬“ zur Verfügung steht. Das beste, was man mit dem Wert ½ anfangen kann, scheint

---

[3] Vgl. zu ähnlichen Überlegungen Aristoteles, Met. IV 7, 1012a6f in Verb. mit 1011b26.

[4] Vgl. auch z.B. GAMUT, "Language, Truth and Meaning" (1991), Bd. I, Kap. 5.5, S.173-183. Die erste Axiomatisierung einer dreiwertigen Logik stammt von Wajsberg (1931), vgl. Bochenski, “Formale Logik”, S.472.

eine Festlegung zu sein, bei der u.a. die „∨"-Verbindung dann den Wert ½ bekommt, wenn beide *iuncta* diesen Wert haben, ebenso die „∧"-Verbindung, die „~"-Negation einer Formel mit diesem Wert ebenfalls den Wert ½ bekommt und die „¬"-Negation in diesem Fall den Wert 1. Dann ist „p∨~p" nicht PC3-allgemeingültig, denn wenn „p" unbestimmt ist, so nach diesen Regeln auch „p∨~p". Wer in PC3 Hoffnungen setzt, wird das zunächst für willkommen halten. Doch ist das plausibel? Man könnte einwenden: „Zwar ist davon auszugehen, dass es Aussagen gibt, die weder den Wahrheitswert „wahr" noch den Wahrheitswert „falsch" haben; und zwar sollte dies – bei geeignetem „so-und-so" – sowohl für „Die Welt ist so-und-so" als auch für „Die Welt ist nicht so-und-so" so sein. Dies sollte man auch dadurch nachspielen können, dass gewisse Formeln weder den Wert 1 noch den Wert 0 erhalten. Aber ist nicht dennoch eine komplexe Aussage der Struktur „Die Welt ist so-und-so oder sie ist nicht so-und-so" in jedem Fall wahr? Denn auch wenn unbestimmt ist, ob sie so-und-so ist oder aber anders, so dass sie nicht so-und-so ist – sie kann doch nur in der einen oder anderen Weise beschaffen sein. Man sollte also zwar das Bivalenzprinzip aufgeben, aber versuchen, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten (SAD) zu halten."

Hierauf mag der überzeugte Vertreter von PC3 dreierlei antworten: (a) Der Kritiker möge, damit die Konsequenzen seines Vorschlags überschaubar werden, erst einmal eine formale Sprache definieren, die keinen als Bivalenzprinzip deutbaren Zug aufweist, aber in der dennoch $\ulcorner \alpha \vee {\sim}\alpha \urcorner$ allgemeingültig ist.[5] (b) PC3 hat neben dem Zeichen „~" noch das Zeichen „¬" („es ist unwahr, dass") zur Verfügung. Und interessanterweise ist $\ulcorner \alpha \vee \neg\alpha \urcorner$ PC3-allgemeingültig. (c) Es ist gar nicht einzusehen, wieso eine komplexe Aussage der Struktur „Die Welt ist so-und-so oder sie ist nicht so-und-so" immer wahr sein sollte. Schließlich ist ja die Wendung „*nicht* so-und-so" im Sinne von „*bestimmt nicht* so-und-so" zu lesen, und wenn eine Aussage unbestimmt ist, so ist die Welt eben gerade weder bestimmt so-und-so noch bestimmt *nicht* so-und-so. Gerade dann ist sie in gewisser Hinsicht auch nicht in der einen oder der anderen Weise beschaffen, sondern gar nicht.

Doch damit dürfte der Befürworter von PC3 weniger als ein Patt erreichen. Denn es lässt sich entgegnen: (a') Die gestellte Aufgabe wurde durch Bas van Fraassen 1966 gelöst.[6] (b') Das Wort „nicht" in der Wendung „Die Welt ist nicht so-und-so" war nicht im Sinne von „¬" gemeint, da ja zugegeben wurde, dass die Aussage „Die Welt ist nicht so-und-so" weder wahr noch falsch sein sollte. „¬p" kann aber nie unbestimmt sein. (c') Eine Logik steht immer als Ganzes auf dem Prüfstand, und PC3 hat Konsequenzen, die selbst jemand, der felsenfest von der Argumentation in (c) überzeugt ist, wohl kaum wird tragen wollen:[7] So ist z.B. anzunehmen, dass auch ein überzeugter Vertreter von PC3 den Nichtwiderspruchssatz befürwortet und deshalb in der Lage sein will, ein formales Pendant dazu als PC3-allgemeingültig auszuweisen.

---

[5] Noch Quine bezeichnet dies in "On a so-called paradox" (1953) als „Aristotle's fantasy".

[6] Die Lösung wird in Kap. II 1 als Thomason'scher Ansatz eingehender vorgestellt.

[7] Die Nicht-Allgemeingültigkeit von „~(p ∧ ~p)" zusammen mit der Nicht-PC3-Allgemeingültigkeit von „p ∨ ~p" hat bereits Prior letztlich gegen dreiwertige Logiken eingenommen (vgl. Prior, PPF, Kap.7, §8, S.135).

Doch $\ulcorner{\sim}(\alpha \wedge{\sim}\alpha)\urcorner$ ist nicht PC3-allgemeingültig. Zwar ist wiederum „¬(p∧¬p)“ PC3-allgemeingültig, doch das reicht nicht. Auch „~(p∧~p)“ sollte lieber allgemeingültig sein. Denn man wird sagen wollen: Die komplexe Aussage, dass es falsch ist („~“), dass es sowohl wahr als auch falsch ist, dass etwas der Fall ist („p∧~p“), ist wahr - und zwar egal, wie hier „etwas“ zu konkretisieren wäre, und egal, wie stark man den Begriff „falsch“ auffasst.

Es ist also nicht angebracht, eine Logik wie PC3 zu verwenden, die mit dem Bade (dem Bivalenzprinzip) das Kind (nämlich den Nichtwiderspruchssatz) gleich mit verabschiedet.

1.2 Monomodale und bimodale Logiken

1.2.1 Monomodale Logiken

Syntaktisch gesehen ist es von PC zur Modallogik nur ein kleiner Schritt: Das Alphabet von PC lässt sich um eine simple quadratische **Box** als einstelligen Operator erweitern. „~□~“ soll dabei jederzeit durch „◊“ (**Raute** oder **Diamant**) abkürzbar sein. Als einfachste monomodale Logik lässt sich nun eine üblicherweise **K** genannte formale Sprache semantisch charakterisieren wie folgt: $\langle W,A\rangle$ ist eine **K-Struktur** (ein K-Rahmen) gdw gilt: (1) W ist eine nichtleere Menge; (2) A ist eine zweistellige **(„Zugänglichkeits“-)Relation** auf W. Und $\langle W,A,V\rangle$ ist ein **K-Modell** gdw (1) $\langle W,A\rangle$ eine K-Struktur ist und (2) V ist eine zweistellige (Bewertungs-)Funktion, die jeder wohlgeformten Formel α von K *bezüglich jedes k aus W* einen der Werte 1 oder 0 zuordnet (i.F. notiert als: $V(\alpha,k)=1$ bzw. 0), wobei den atomaren Formeln diese Werte auf beliebige Art zugewiesen sind und ansonsten gilt:
(i) $V({\sim}\alpha,k)=1$ gdw $V(\alpha,k)=0$
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,k)=1$ gdw $V(\alpha,k)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,k)=1$
(iii) $V(\Box\alpha,k)=1$ gdw für *alle* k' aus W gilt: wenn k A k', dann $V(\alpha,k')=1$.[8]

K basiert so offensichtlich auf PC, dass es nicht erstaunlich ist, wenn man bezüglich der Deutung der Werte 1 und 0 und der Deutung der Junktoren dieselben Entscheidungen trifft wie für PC. Die Elemente der ersten Komponente einer K-Struktur sollen i.F. **Bewertungskontexte** genannt werden und diese Menge selbst die **Kontextmenge** einer K-Struktur bzw. eines K-Modells.[9] Die Deutung der Kontextmenge ist Teil der *Anwendung* von K. Ferner ist zunächst noch keinerlei konkrete Deutung der Box festgelegt. Der Begriff der Allgemeingültigkeit wird im

[8] Die für die Bewertung der atomaren Formeln reservierte Funktion I ist hier überflüssig und wird erst später im Zusammenhang mit der temporalisierten Modallogik wieder eine Rolle spielen.
[9] Die Terminologie ist nicht einheitlich. Der Ausdruck findet sich in diesem Sinn in GAMUT II, Bd. 2, Kap.1.8, S.13-15 und ist von dort übernommen.

Sinne von „Wert 1 für jeden Kontext jedes Modells“ definiert, die Erfüllbarkeit entsprechend als „Wert 1 für mindestens einen Kontext mindestens eines Modells“.

Die Sprache K lässt sich korrekt und vollständig **axiomatisieren**.[10] Dabei gilt eine Sprache als durch ein **Herleitungsspiel korrekt** axiomatisiert, wenn jede damit herleitbare Formel bezüglich der Sprache allgemeingültig ist, als **vollständig** dadurch axiomatisiert, wenn jede allgemeingültige Formel herleitbar ist. Axiome sollen i.F. grundsätzlich als Axiomen-*Schemata* angegeben werden. Bei diesem Vorgehen lassen sich die Axiome von K beschreiben, indem man festhält, dass gilt: K-Axiome sind gerade alle wohlgeformten K-Formeln der Gestalt

(PC) α, falls α strukturell einer PC-allgemeingültigen Formel entspricht.[11]
(K-□) $\ulcorner(\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta))\urcorner$ („Box-Verteiler“).

Die **Herleitungsregeln** sind, neben der Substitutionsregel (**Subst**)[12] und dem modus ponens (**MP**)[13] die Nezessitationsregel (**NEC-□**): $\vdash_K \alpha \Rightarrow \vdash_K \Box\alpha$.[14]

Die wichtigsten Hilfsregeln und Theoreme von K **[B1]**[15] sind unverzichtbares Handwerkszeug für jede Überlegung zu weiteren auf K basierenden mono- und multimodalen Logiken.

Einige klassische Resultate für monomodale Logiken sind Aussagen, die die folgenden Schemata (als Axiomenschemata) zu den darunter stehenden Relations-Eigenschaften als Eigenschaften der Zugänglichkeitsrelation in Beziehung setzen (vgl. zur Veranschaulichung **[B2]**, zu den „bzw.“ **[B3]**):

(T-□)	$\ulcorner \Box\alpha \rightarrow \alpha \urcorner$	
(S4-□)	$\ulcorner \Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha \urcorner$	bzw. $\ulcorner \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha \urcorner$
(B-□)	$\ulcorner \Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha \urcorner$	bzw. $\ulcorner \alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha \urcorner$
(S4.2-□)	$\ulcorner \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha \urcorner$	
(S4.3-□)	$\ulcorner \Box(\Box\alpha \rightarrow \beta) \vee \Box(\Box\beta \rightarrow \alpha) \urcorner$	
(S5-□)	$\ulcorner \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha \urcorner$	bzw. $\ulcorner \Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha \urcorner$

Reflexivität: Für alle k aus W gilt: k A k
(bzw. für alle k, k’ aus W: wenn k=k’, dann kAk’)
Transitivität: Für alle k, k’, k“ aus W gilt: wenn k A k’ und k’ A k“, dann k A k“
Symmetrie: Für alle k, k’ aus W gilt: wenn k A k’, dann k’ A k.

[10] Beweis: HC, Kap.6.
[11] D.h.: Es gibt eine Möglichkeit, die Teilformeln von α konsequent so durch Satzbuchstaben zu ersetzen, dass eine PC-allgemeingültige Formel resultiert.
[12] Vgl. HC, S.25: „The result of uniformly replacing any variable or variables $p_1, \ldots, p_n$ in a theorem by any wff $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectively is itself a theorem.“
[13] Vgl. ebd.: „If α and $\alpha \rightarrow \beta$ are theorems, so is β“ (Notation angepasst).
[14] „$\vdash\alpha$“ notiert (metasprachlich) „α ist herleitbar“.
[15] Ein fettgedrucktes „B“ mit fortlaufender Zählung pro Kapitel in eckigen Klammern verweist auf die entsprechende Begründung im Begründungsteil dieser Studie.

Konvergenz: Für alle k, k', k" aus W gilt: wenn k A k' und k A k",
dann gibt es ein k"', so dass k' A k"' und k" A k"'[16]
Konnexität: Für alle k, k', k" aus W gilt: wenn kAk' und kAk",
dann k'Ak" oder$^{\&}$ k' = k" oder$^{\&}$ k"Ak'.[17]
Äquivalenzrelation: A ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.
universelle Relation: Für alle k, k' aus W gilt: k A k'.

Die klassischen Ergebnisse (aus den späten 50er und frühen 60er Jahren des 20. Jahrhunderts) sind, von einem semantischen Standpunkt aus formuliert:

- Die K-Axiomatik unter Hinzufügung von (T-□) ergibt eine korrekte und vollständige Axiomatisierung einer formalen Sprache, die definiert ist wie K, nur dass für sie zusätzlich die Reflexivität der Zugänglichkeitsrelation gefordert ist: die Sprache **T** mit weiteren, sehr fundamentalen und über K hinausgehenden Theoremen **[B4]**.
- Die Hinzufügung von (T-□) und (S4-□) passt auf dieselbe Weise zur Forderung der Reflexivität *und* Transitivität; gerade dadurch ist die Sprache **S4** charakterisiert. Typisch für S4 sind Reduktionsgesetze, die es z.B. erlauben, Ketten gleichartiger Modaloperatoren beliebig zu verkürzen oder zu verlängern **[B5]**.
- Fügt man außerdem noch (B-□) zu, so passt dies zur zusätzlichen Forderung der Symmetrie. Man hat dann genau gefordert, dass die Zugänglichkeit eine Äquivalenzrelation ist, wodurch gerade die Sprache **S5** charakterisiert ist. An die Stelle von (S4-□) und (B-□) zusammen kann (S5-□) treten **[B6]**. Die typischen S5-Reduktionsgesetze gehen noch über die von S4 hinaus, und S5 besitzt einige nützliche eigentümliche Herleitungsregeln. Für spätere Überlegungen bemerkenswert ist, dass „◊□p → □◊p" S5-allgemeingültig ist, „□◊p → ◊□p" aber nicht **[B7]**.
- Fordert man zusätzlich zu Reflexivität und Transitivität die Konvergenz der Zugänglichkeitsrelation, nicht aber die Symmetrie, so hat man die Sprache **S4.2**. Dazu passt genau die Hinzufügung von (S4.2-□) statt von (B-□).
- Ganz entsprechend verhält es sich mit der Konnexität als Charakteristikum der Sprache **S4.3** und der Hinzufügung von (S4.3-□).[18]

Man übersieht leicht, dass eine Äquivalenzrelation nicht unbedingt die universelle Relation ist:[19] Auch Modelle mit Zugänglichkeits-"Inseln" oder gar Modelle, in denen jeder Kontext allein selbstzugänglich ist, sind S5-Modelle, und wir werden auch noch in der Anwendung auf S5-Inseln treffen. Aber auf jeden Fall ist die universelle Relation eine Äquivalenzrelation, so dass in diesem Fall die S5-Axiomatik eine angemessene Axiomatisierung liefert.

[16] Vgl. HC, S.134.
[17] Es ist anzunehmen, dass auch bei HC auf S.128 diese Definition gemeint ist. Dort ist zwar die Klausel „oder$^{\&}$ k' = k" " nicht genannt, aber der Kontext legt nahe, dass sie vorausgesetzt ist.
[18] Vgl. zur Passgenauigkeit von Axiomatik und semantischer Forderung die Beweise in HC, Kap.6 passim sowie S.128 und 134.
[19] HC, S.61 unten, ist in diesem Punkt ausnahmsweise ziemlich verwirrend.

Man kann beim Ausbau von K die Reflexivitätsforderung für die Zugänglichkeitsrelation weglassen und unabhängig davon deren Transitivität fordern. Die so charakterisierte Sprache könnte man, in Anlehnung an die Notation von Jazz-Akkorden, $\mathbf{K}^{\mathbf{add(S4\text{-}\Box)}}$ nennen. $K^{add(S4\text{-}\Box)}$ wird (wie der Name erwarten lässt) gerade von der K-Axiomatik unter Hinzufügung von (S4-□) und *ohne* (T-□) angemessen axiomatisiert.[20]

Wenn man die Reflexivitätsforderung und entsprechend (T-□) als Axiom weglässt, so hat man weder reflexive Modelle ausgeschlossen noch gar die Irreflexivität der Zugänglichkeitsrelation gefordert (also die Eigenschaft, dass *kein* Kontext selbstzugänglich ist):

Irreflexivität:[21] Für kein k aus W gilt: k A k
Asymmetrie:[22] Für alle k, k' aus W gilt: wenn kAk', dann *nicht* k'Ak.

Weder für die Forderung der Irreflexivität noch für die Forderung der Asymmetrie der Zugänglichkeitsrelation von semantischer Seite gibt es überhaupt passende Axiomen-Schemata.[23] Man kann mit einer speziellen Art von Herleitungsregel (oft nach ihrem Entdecker Dov Gabbay **Gabbay-Regel** oder aber **Irreflexivitätsregel** genannt) zumindest reflexive Modelle ausschließen.[24] Solche Regeln postulieren also wenigstens Irreflexivität im schwachen Sinn von Nicht-Reflexivität. Ob man mit ihnen tatsächlich Irreflexivität im hier gebrauchten Sinne des Wortes postulieren kann, ist zweifelhaft.[25] Ohne Schaden für die Axiomatisierung kann man Irreflexivität oder Asymmetrie der Zugänglichkeitsrelation natürlich einfach *semantisch* fordern.[26]

---

[20] Dieser Punkt wird nebenbei bei der Einführung der bimodalen Logiken in I 1.2.2.2 klar.

[21] Die Terminologie ist in der Literatur nicht immer einheitlich.

[22] Die Terminologie ist wieder uneinheitlich, besonders in Abgrenzung zum Begriff der Antisymmetrie. Hier soll der weit verbreitete Unterschied gemacht werden, dass im Fall der **Antisymmetrie** der reflexive Fall für k A k' erlaubt ist: Für alle k, k' aus W gilt: wenn k A k', dann k'= k.

[23] Vgl. HC, Kap.10, S.176.

[24] Vgl. für die mögliche Form einer solchen Regel [B23] zu Kap. I 2.

[25] HC S.177. Vgl. auch Wölfl (1999), S.95.

[26] Ein Beispiel für eine monomodale Logik ohne Reflexivitätsforderung ist die bei Segerberg und von Wright diskutierte Sprache mit quasi-universeller Zugänglichkeitsrelation (jeder Kontext ist mit jedem zugänglich außer mit sich selbst), vgl. Segerberg, „A Note on the Logic of ‚Elsewhere'" (1980), „'Somewhere else' and Some other Time'" (1976), von Wright, „A Modal Logic of Place" (1983). Die Autoren diskutieren diese Sprache zwar als einfache *Raum*logik (die Box wird dann als „überall *sonst*" gedeutet). Dennoch soll i.F. als einfache monomodale Raumlogik nur S5 diskutiert werden. S5 ist einfacher zu überschauen, herleitungstechnisch bekannter und in ihrer Kombinationsfähigkeit für multimodale Logiken besser erforscht. Die philosophischen Probleme der Deutung der Kontextmenge

1.2.2 Bimodale Logiken

1.2.2.1 Bimodale Logiken als Fusionen

Man kann ein Schachbrett als Struktur aus acht horizontalen Felderreihen (1 – 8) und acht vertikalen Felderreihen (a – h) ansehen. Die Reihen lassen sich als durch die folgenden Relationen geordnet ansehen:

„liegt *über*, *unter* oder ist identisch mit“ (universelle Relation auf den Querreihen)
„liegt *neben* oder ist identisch mit“ (universelle Relation auf den Längsreihen)[27]

Ohne die Quer- und die Längsreihen miteinander in Beziehung zu setzen, kann man je eine der Reihenmengen zusammen mit der dazu gehörenden Relation als eine eigene (gleichsam vertikale oder horizontale) S5-Struktur auffassen. Ein Schachbrett lässt sich so als Paar von zwei verschiedenen S5-Strukturen auffassen, nämlich:

$\langle W_1, A_1\rangle$ mit $W_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und A_1 als universeller Relation auf W_1.
$\langle W_2, A_2\rangle$ mit $W_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und A_2 als universeller Relation auf W_2.

Beide Strukturen lassen sich natürlich durch Hinzufügung je einer Bewertungsfunktion einfach zu zwei Modellen erweitern. Dabei können die Satzbuchstaben Aussagen wie „Hier[28] steht ein schwarzer Läufer“ repräsentieren. Man kann, der Übersichtlichkeit halber, die wie üblich definierte Box im Zusammenhang mit $\langle W_1, A_1\rangle$ als „$\Box_1$“ notieren und die Sprache, in der sie vorkommt, $S5_1$ nennen. Ebenso kann man die Box im Zusammenhang mit $\langle W_2, A_2\rangle$ als „$\Box_2$“ notieren und die entsprechende Sprache $S5_2$ nennen. Man kann mit jeweils einer der beiden Sprachen immerhin Dinge ausdrücken wie: „Auf jeder Längsreihe befindet sich ein weißer Bauer“ („$\Box_2 p$“ - wahrscheinlich nur ziemlich am Anfang der Partie wahr), „Jede Querreihe enthält ein von einem Läufer bedrohtes Feld“ („$\Box_1 q$“ – mit Läufer auf a1 oder h8 gut denkbar) oder „In einer Querreihe steht ein Bauer“ („$\Diamond_1 p$“ – im Endspiel keine triviale Aussage!). Doch da z.B. gemischte Formeln wie „$\Box_1\Diamond_2 p$“ noch nicht einmal wohlgeformt sind, kann man mit der parallelen Verwendung von $S5_1$ und $S5_2$ noch nicht viel anfangen.

---

sind in beiden Fällen immer dieselben. So kann man z.B. jedes philosophisch interessante Problem der Deutung einer monomodalen Logik als Raumlogik ebensogut an S5 diskutieren.

[27] Auf Schachchinesisch heißen die Längsreihen immer Linien, die Querreihen einfach Reihen. Ich lasse es aus menomotechnischen Gründen und aus Gründen der Verallgemeinerung auf beliebige Gitterstrukturen („grids“, vgl. MDML, S.79) bei den Bezeichnungen „Längsreihe“ und „Querreihe“, auch wenn das für Schachspieler etwas unbeholfen klingen mag.

[28] Wörter wie „hier“ und „jetzt“ werden umgangssprachlich verwendet. Werden sie als Kunstwörter zum Vorlesen von Aktualitätsoperatoren verwendet, so gelten dafür evtl. strengere Regeln.

Ein erster Versuch, aus den beiden Sprachen eine Logik des Schachbretts zu machen, könnte darin bestehen, eine die **Fusion** von $S5_1$ und $S5_2$ genannte Mischsprache zu definieren. Als Formregel für die Boxen wird eingeführt, dass, wenn α eine wohlgeformte Formel ist, dies auch auf $\ulcorner \Box_i \alpha \urcorner$ (mit i aus {1,2}) zutrifft, so dass Boxen beider Sorten in derselben Formel vorkommen können. Um eine Fusions-Struktur zu erhalten, wird die Vereinigung beider Kontextmengen einfach mit beiden Zugänglichkeitsrelationen fusioniert:

$$\langle W_1 \cup W_2, A_1, A_2 \rangle .$$

Ein Fusions-Modell ist eine Fusions-Struktur unter Hinzufügung einer Bewertungsfunktion mit den üblichen Wahrheitsbedingungen für *beide* Boxen:

$V(\Box_i\alpha, k)=1$ gdw für *alle* k' aus W gilt: wenn k A_i k', dann $V(\alpha,k')=1$.

Man kann mit der Fusion der beiden Sprachen schon mehr ausdrücken, als wenn man sie einfach nebeneinander benutzt. Man kann etwa Dinge sagen wie: „Für jede Längsreihe gilt, dass auf jeder Querreihe ein Bauer steht" („$\Box_2\Box_1 p$"). Das Beispiel zeigt aber auch schon, dass die Fusion der horizontalen und der vertikalen Einzelsprache noch nicht sehr beeindruckend ist. Selbstverständlich gilt *für jede Längsreihe*, dass auf jeder Querreihe ein Bauer steht, gerade dann, wenn auf jeder Querreihe ein Bauer steht – was hat das schließlich mit den Längsreihen zu tun!

Immerhin wird man aber sogleich sagen können:

- Alle Gesetze für Querreihen aus $S5_1$ (z.B. „$\Box_1 p \rightarrow p$") und für Längsreihen aus $S5_2$ (z.B. „$\Box_2 p \rightarrow p$") gelten weiter.
- Auch alle Fusions-Instanzen von ihnen gelten (z.B. „$\Box_2\Box_1 p \rightarrow \Box_1 p$" oder „$\Box_1\Box_2 p \rightarrow \Box_2 p$").
- Wenn α in $S5_1$ gilt, so ist $\ulcorner\Box_2\alpha\urcorner$ Fusions-allgemeingültig; und wenn α in $S5_2$ gilt, so ist $\ulcorner\Box_1\alpha\urcorner$ Fusions-allgemeingültig.

Das lässt vermuten, dass sich die Fusion von $S5_1$ und $S5_2$ durch eine schlichte Aufsummierung der Axiomatik von $S5_1$ und der Axiomatik von $S5_2$ (also der S5-Axiomatik mit „$\Box_1$" und der S5-Axiomatik mit „$\Box_2$") korrekt und vollständig axiomatisieren lässt.[29] In der Tat hat sich zeigen lassen, dass das Vermutete nicht nur für die Fusion von $S5_1$ und $S5_2$ gilt, sondern für Fusionen beliebiger normaler Modallogiken[30] (d.h. beliebiger Erweiterungen von K[31]). Ganz wie die Fusion von $S5_1$ und $S5_2$, die sich anschaulich für das Schachbrett motivieren ließ, lässt sich also auch als einfachste denkbare Fusion die Fusion von K_1 und K_2 definieren. Für sie genügt als

[29]Axiome sind dann im Fall der S5-Fusion alle Instanzen von PC-allgemeingültigen Formeln sowie alle Konkretisierungen (mit i aus {1,2}) von: **(K-$\Box_i$)** $\ulcorner\Box_i(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box_i\alpha \rightarrow \Box_i\beta)\urcorner$, **(T-$\Box_i$)** $\ulcorner\Box_i\alpha \rightarrow \alpha\urcorner$, **(S5-$\Box_i$)** $\ulcorner\Diamond_i\Box_i\alpha \rightarrow \Box_i\alpha\urcorner$. Herleitungsregeln sind MP, Subst und NEC-Regeln für jede Box.

[30] MDML, S.111f und Kap. 4, S.197ff.

[31] HC, S.361 in Verb. mit MDML S.20 (Def. n-modal logic).

spezifisch modallogisches Axiom klarerweise bereits das K-Axiom für Boxen beider Sorten.

1.2.2.2 Die Sprachen KuK und K_t

Die Sprache KuK sei genau so definiert wie die Fusion von K_1 und K_2, außer dass zusätzlich gefordert ist: $W_1 = W_2$. Die Vereinigung der beiden Kontextmengen bringt dann grundsätzlich nichts Neues, da beide Kontextmengen der fusionierten Strukturen ohnehin schon identisch waren. Man kann daher eine KuK-Struktur auch einfach als K-Struktur mit einer zweiten Zugänglichkeitsrelation ansehen, die folgende Gestalt hat:

$$\langle W, A_1, A_2 \rangle .$$

Da jedes KuK-Modell ein Modell der Fusion von K_1 und K_2 ist, ist klar, dass KuK durch die Fusions-Axiomatik zumindest korrekt axiomatisiert wird. Man macht sich leicht klar, dass die Axiomatisierung auch vollständig ist **[B8]**.

KuK bildet eine interessante Brücke zwischen der Betrachtung von Fusionen seit Beginn der 90er Jahre des 20. Jahrhunderts und dem bis Ende der 50er Jahre zurückreichenden Studium von Sprachen mit einer Kontextmenge und zwei Modaloperatoren.[32] Man kann nämlich für das Verhältnis von A_1 und A_2 zueinander die interessante Einschränkung untersuchen, dass A_1 und A_2 zueinander **konverse Relationen** sind, d.h. dass gilt: k A_1 k' gdw k' A_2 k. Die in der Literatur wohlbekannte Sprache $\mathbf{K_t}$ lässt sich dann exakt als diejenige Erweiterung von KuK beschreiben, bei der ebendies in der Charakterisierung der Modellstruktur zusätzlich gefordert wird.[33]

Die Formeln „$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$“ und „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow p$“ sind *nicht* KuK-allgemeingültig. Sie sind aber K_t-allgemeingültig **[B9]**. Die Hinzufügung des folgenden Axiomenschemas zur KuK-Axiomatik (mit i,k aus {1,2} und i ≠ k) ergibt also eine zumindest *korrekte* Axiomatik für K_t:

(K_t-1) $\ulcorner \Diamond_i\Box_k \alpha \rightarrow \alpha \urcorner$

Einen frühen Beweis dafür, dass die so entstehende Axiomatik auch *vollständig* ist, haben Rescher und Urquhart bereits 1970 geliefert.[34] Alternative Versionen der Formeln „$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$“ und „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow p$“ sind „$p \rightarrow \Box_1\Diamond_2 p$“ und „$p \rightarrow \Box_2\Diamond_1 p$“. Mit Kettenschluss folgt daraus auch ohne weiteres die K_t-Allgemeingültigeit von

[32] Als Gründungsmanifest dürfte Prior, "The Syntax of Time Distinctions" (1958) gelten.
[33] Normalerweise geschieht dies nicht, sondern K_t wird selbst als minimales System eingeführt. Bei diesem Vorgehen geht man jedoch zwei Schritte auf einmal, die man lieber auseinander halten sollte. Vgl. auch HC, S.218f.
[34] Rescher und Urquhart, "Temporal Logic" (1971), Kap. 1, § 6.4 . Vgl. in der deutschen Übersetzung in ZuE, S.90-97.

„$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow \Box_2\Diamond_1 p$“ und „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow \Box_1\Diamond_2 p$“. Die Konversen gelten nicht. Auch „$\Box_i\Diamond_i p \rightarrow \Diamond_i\Box_i p$“ (i aus {1,2}) ist nicht allgemeingültig **[B10]**. Eine nützliche Hilfsregel von K_t (und Erweiterungen) ist R-$\Diamond_i\Box_k$: $\vdash \Diamond_i\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \alpha \rightarrow \Box_k\beta$ **[B11]**.

1.2.2.3 Von K_t zur Linearität

Ganz ähnlich wie bei den monomodalen Logiken lassen sich auch bei bimodalen Logiken Verfeinerungen anbringen, bei denen jeweils eine weitere Beschränkung für die Zugänglichkeitsrelationen mit einem Zusatzaxiom oder einem Paar von Zusatzaxiomen korrespondiert.

- Fordert man z.B. zusätzlich die Symmetrie von A_1, bricht der Unterschied zwischen den beiden Operatorenpaaren zusammen **[B12]**. Entsprechend wird der Unterschied zwischen den beiden Operatorenpaaren trivialisiert, wenn man der K_t-Axiomatik als weitere Axiomenschemata eine Verdopplung von (B-$\Box$) hinzufügt, das ja die Symmetrie postuliert:

  (B-$\Box_{i/k}$) $\ulcorner\Diamond_k\Box_i\alpha\rightarrow\alpha\urcorner$ **[B13]**.

- Will man ein System haben, in dem sich die beiden Operatorenpaare noch voneinander unterscheiden, so kann man z.B. lediglich die Transitivität von A_1 fordern. Man fordert dann zwangsläufig auch die Transitivität von A_2 mit **[B14]**. Fordert man die Transitivität, so ist ein genau passendes Zusatzaxiom (was nach dem über S4 Bekannten wenig überrascht):

  (S4-$\Box_1$) $\ulcorner \Diamond_1\Diamond_1 \alpha \rightarrow \Diamond_1\alpha\urcorner$.

  Das Spiegelbild von (S4-$\Box_1$), nämlich (S4-$\Box_2$), lässt sich dann bereits herleiten **[B15]**.
- Man kann neben der Transitivität natürlich auch die Reflexivität von A_1 fordern. Man fordert dann automatisch auch die Reflexivität von A_2 **[B16]**. Axiomatisch passt dazu (was angesichts T wenig überrascht):

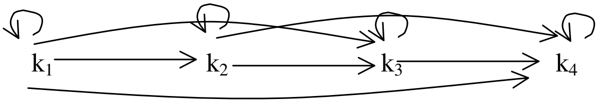
  (T-$\Box_1$) $\ulcorner \Box_1\alpha \rightarrow \alpha\urcorner$.

  „$\Box_2 p \rightarrow p$“ folgt sehr leicht **[B17]**.
- Fordert man sowohl Transitivität als auch Reflexivität der Zugänglichkeitsrelation, so benutzt man als Axiomatik offensichtlich ein um (K_t-1) angereichertes bimodales S4. Dieses System kann man natürlich weiter aufstocken, z.B. Konvergenz fordern und entsprechend ein verdoppeltes S4.2-Axiomenschema hinzufügen. Oder man kann die beidseitige Konnexität fordern. Man wird nun als S4.3-Axiomenschema mit Index hinzufügen:

(S4.3-$\Box_i$) $\ulcorner \Box_i (\Box_i\alpha \rightarrow \beta) \vee \Box_i (\Box_i\beta \rightarrow \alpha) \urcorner$.

Die Strukturen eines solchen auf K_t basierenden bimodalen S4.3 lassen sich grundsätzlich *so* darstellen **[B18]**:

(1)



Was geschieht, wenn man für eine K_t-basierte bimodale Sprache die *A*symmetrie von A_1 fordert?

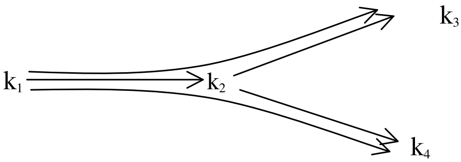
- Zunächst lässt sich wieder bemerken, dass die Asymmetrie von A_1 die Asymmetrie ihrer Konversen A_2 nach sich zieht **[B19]**. Ferner ist zu bemerken, dass die Asymmetrie einer Relation ihre Irreflexivität impliziert (und zwar ganz unabhängig von der Transitivität) **[B20]**.[35] Dagegen gibt es irreflexive Relationen, die nicht nur nicht asymmetrisch, sondern sogar symmetrisch sind (z.B die quasi-universelle Zugänglichkeitsrelation); freilich impliziert die Irreflexivität einer Relation *zusammen* mit der Transitivität ihre Asymmetrie **[B21]**. K_t um die Forderung von Asymmetrie und Transitivität von A_1 angereichert heiße (aus offensichtlichen Gründen) $\mathbf{K_t^{add(S4\text{-}\Box 1)}}$.
- Für die interessante Deutung der Zugänglichkeitsrelationen als „liegt im Zukunfts- bzw. Vergangenheitslichtkegel von" ist die Option von erheblicher Bedeutung, die *Konvergenz* beider Zugänglichkeitsrelationen zu fordern.[36] Dies ist unter Erwähnung beider oder auch unter Erwähnung nur einer der Zugänglichkeitsrelationen möglich **[B22]**.
- Eine für die zeitlogische Anwendung wichtige Option ist es, zusätzlich zur Asymmetrie und Transitivität die *Konnexität* einer oder beider Zugänglichkeitsrelationen zu fordern. Dabei lässt sich die Forderung der Konnexität der Konversen von A leicht allein unter Erwähnung von A formulieren **[B23]**. Die Konnexität lässt sich auch unabhängig voneinander für beide Zugänglichkeitsrelationen axiomatisch postulieren. Es reicht zwar dafür ein verdoppeltes Axiom (S4.3-$\Box$) interessanterweise nicht aus, wenn die Zugänglichkeitsrelationen nicht reflexiv sind **[B24]**. Doch es sind in der Literatur verschiedene gleichwertige Möglichkeiten bekannt, die auch für irreflexive Zugänglichkeitsrelationen die Konnexität postulieren **[B25]**, z.B. die folgende, (S4.3-$\Box$) minimal verstärkende Version:[37]

[35] Es ist die oben verwendete Definition zu beachten.
[36] Vgl. zu Einzelheiten Kap. III 2.
[37] Vgl. MDML, S.13, 43.

(Lin-1) $\ulcorner \Box_1 (\Box_1\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta) \vee \Box_1 (\Box_1\beta \wedge \beta \rightarrow \alpha)\urcorner$
(Lin-2) $\ulcorner \Box_2 (\Box_2\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta) \vee \Box_2 (\Box_2\beta \wedge \beta \rightarrow \alpha)\urcorner$

Die Sprache, bei der man zusätzlich zur Transitivität die Konnexität *nur* für A_2 fordert, sei, wie üblich,[38] $\mathbf{K_b}$ genannt (das „b" steht für „branching"). Sie erlaubt Modelle wie das folgende:

(2)

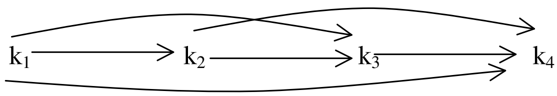


Die Forderung der *beidseitigen* Konnexität soll i.F. als Forderung der **Linearität** bezeichnet werden. Die um diese Forderung aufgestockte Sprache $K_t^{add(S4-\Box 1)}$ heiße $\mathbf{K_{lin}}$. Man kann diese Forderung einfach als Konjunktion der beiden Einzelforderungen hinschreiben, aber auch eleganter allein mit Erwähnung von A_1 als:

Für alle k,k',k": Wenn (i) $k'A_1k$ und $k''A_1k$ oder$^{\&}$ (ii) kA_1k' und kA_1k'',
dann $k'A_1k''$ oder$^{\&}$ $k' = k''$ oder$^{\&}$ $k''A_1k'$ **[B26]**.

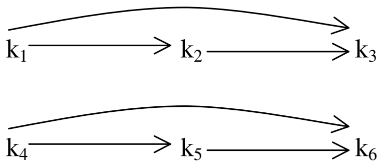
Diese Eigenschaft Linearität zu nennen, ist eine gewisse Abweichung von der üblichen Terminologie und verdient eine Begründung.[39] Zwar sehen *typische* Modelle von K_{lin} so aus **[B27]**, und Modelle wie in Abb.2 sind ausgeschlossen:

(3)



Doch auch in Abb.4 ist ein völlig respektables K_{lin}-Modell dargestellt.

(4)



---

[38] Øhrstrøm / Hasle, "Temporal Logic", S.374.

[39] Dies passt z.B. gut zur üblichen Bezeichnung der Konnexität in nur *einer* Richtung als Halblinearität. Vgl. z.B. IZL, S.250.

Im Gegensatz zum Modell in Abb.3 ist es intuitiv verinselt, jede Insel hat aber „lineare“ Gestalt. Dies soll genügen, um dem Modell Linearität im hier gebrauchten Sinn des Wortes zuzusprechen. Die folgende Eigenschaft impliziert die Linearität im Sinne der beidseitigen Konnexität, wird aber nicht von ihr impliziert:[40]

Für alle k, k’: kA_1k‘ oder$^{\&}$ k= k‘ oder$^{\&}$ k‘A_1k **[B28]**.

Oft wird die Forderung *dieser* Eigenschaft als Forderung der Linearität bezeichnet. Man kann aber auch sagen, dass darin etwas mehr gefordert wird als bloß lineare Gestalt, nämlich lineare Gestalt *plus* Verinselungsfreiheit **[B29]**. Hier soll diese Eigenschaft als **starke Linearität** bezeichnet werden. K_{lin} wird korrekt und vollständig axiomatisiert durch die K_t-Axiomatik unter Hinzufügung von (S4-$\Box_1$) und (Lin-1) / (Lin-2) (oder Äquivalenten dazu) **[B30]**.

Nach der Aufklärung des Verhältnisses von Konnexität und schwacher und starker Linearität, bei der es wichtig war, beide Zugänglichkeitsrelationen getrennt zu betrachten, lässt sich folgende Vereinfachung vornehmen: Stehen A_1 und A_2 konvers zueinander, so kann man auch auf die Erwähnung einer der beiden Relationen verzichten, eine Struktur der entsprechenden bimodalen Sprache wie bei monomodalen Sprachen wieder als geordnetes Paar $\langle W, A\rangle$ und ein Modell als Tripel $\langle W, A, V\rangle$ auffassen. Die semantische Seite von K_{lin} lässt sich dann alternativ wie folgt charakterisieren:

K_{lin}-Struktur (auch: K_{lin}-Rahmen): $\langle W,A\rangle$ ist eine K_{lin}-Struktur gdw
(1) W ist eine nichtleere Menge
(2) A ist eine zweistellige, asymmetrische und transitive und lineare Relation auf W.

K_{lin}-Modell: $\langle W, A,V\rangle$ ist ein K_{lin}-Modell gdw
(1) $\langle W, A\rangle$ ist eine K_{lin}-Struktur
(2) V ist eine zweistellige (Bewertungs-)Funktion, für die gilt:
(i) $V({\sim}\alpha,k)=1$ gdw $V(\alpha,k)=0$
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,k)=1$ gdw $V(\alpha,k)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,k)=1$
(iii) $V(\Box_1\alpha,k)=1$ gdw für *alle* k’ aus W gilt: wenn k A k’, dann $V(\alpha,k’)=1$
(iv) $V(\Box_2\alpha,k)=1$ gdw für *alle* k’ aus W gilt: wenn k’ A k, und dann $V(\alpha,k’)=1$.

[40] Für K_{lin} kann man als verinselte Modelle genau die Modelle bezeichnen, denen diese Eigenschaft fehlt. Für K_b gilt: Nicht-verinselt sind gerade die Modelle, die die Eigenschaft der Gerichtetheit aufweisen, d.h. wenn für jedes k, k’ gilt: es gibt ein k“, so dass k“ A_1 k und k“ A_1 k. Vgl. zu dieser Eigenschaft auch IZL, S.250. Eine allgemeine Definition der Verinselungsfreiheit für K_t-Modelle schlägt Bertram Kienzle vor in „Die Bestimmung des Janus“.

1.2.2.4 Verfeinerungen von K_{lin}- und K_b-Strukturen

Lassen sich durch weitere Postulate bestimmte K_{lin}-Modelle mit einer bestimmten Feinstruktur der Linie(n) auszeichnen? In der Tat ist dies möglich und führt auf eine Art von K_{lin}-Modell, das man als realistisches Modell einer Koordinatenachse ansehen kann, wie sie in der Physik gebräuchlich ist. Wichtig sind hier die Formeln „$\Box_1 p \rightarrow \Diamond_1 p$“ und „$\Box_2 p \rightarrow \Diamond_2 p$“ bzw. „$\Diamond_2 p \rightarrow \Diamond_2\Diamond_2 p$“ und „$\Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_1 p$“. Bei asymmetrischer Zugänglichkeitsrelation hat jede dieser Formeln eine interessante Eigenschaft.

- **Dichte**. Die Kontexte sind gerade dann dicht geordnet, wenn es für zwei beliebige k und k' mit k A k' einen weiteren Kontext k“ gibt, so dass k A k“ und k“ A k'. „$\Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_1 p$“ kann von solchen Modellen falsifiziert werden, in denen A keine dichte Ordnung der Kontexte erzeugt; die Formel kann aber nicht von solchen Modellen falsifiziert werden, in denen A eine dichte Ordnung der Kontexte erzeugt. Es lässt sich dann ja immer noch ein Zwischenschritt machen. Man kann also durch die Hinzufügung des folgenden Axiomenschemas die Dichte von A postulieren:

  (Dense-A) $\ulcorner \Diamond_1\alpha \rightarrow \Diamond_1\Diamond_1\alpha \urcorner$.

  Offensichtlich muss, wenn $A_{(1)}$ die Kontexte dicht ordnet, die Konverse dieselbe Eigenschaft haben, so dass in diesem Fall auch „$\Diamond_2 p \rightarrow \Diamond_2\Diamond_2 p$“ allgemeingültig sein wird. Tatsächlich kann man mit Hilfe von (Dense-A) diese Formel herleiten **[B31]**. Sehr leicht zu sehen ist auch, dass „$\Diamond_i p \rightarrow \Diamond_i\Diamond_i p$“ mit „$\Box_i\Box_i p \rightarrow \Box_i p$“ äquivalent ist.

  Die volle **Kontinuität** ist eine mathematisch alles andere als triviale Art Steigerung der Dichte (anschaulich gesprochen, eine Dichte ohne denkbare Lücken). Auch diese Eigenschaft lässt sich nicht nur semantisch fordern, sondern in einer bimodalen Logik auch objektsprachlich ausdrücken **[B32]**. Immer wenn Achsen in beliebigem Winkel gekippt werden, ist sie vorauszusetzen.

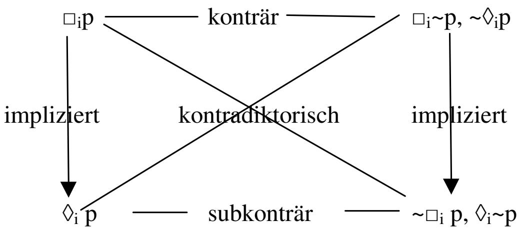
- Randlosigkeit. „$\Box_1 p \rightarrow \Diamond_1 p$“ kann bei Asymmetrie auf solchen Modellen falsifiziert werden, die in Richtung von A einen letzten Kontext besitzen, und wird allgemeingültig für solche Modelle, die *in Richtung von A randlos* sind. Warum ist das so? Ist k irgendwo ein letzter Kontext in Richtung A, so heißt das: Es gibt kein k', so dass k A_1 k'. Gerade eine Struktur, in der ein solcher Kontext vorkommt, mag man aber (immer bezogen auf K_t-Modelle) mit Recht eine Struktur nennen, die in Richtung A einen Rand besitzt, eine Struktur, in der es einen solchen Kontext in Richtung A nicht gibt, dagegen eine randlose Struktur.

  Randlosigkeit in Richtung A: Für jedes k aus W gibt es ein k', so dass gilt: k A k'.

  Gewöhnlich findet man statt des Ausdrucks „Randlosigkeit“ den Ausdruck „Endlichkeit“. Dieser Ausdruck ist aber irreführend: Die Randlosigkeit impliziert keine metrische Unendlichkeit, denn eine Metrik haben die hier diskutierten Logiken nicht. Angemessene, in den verschiedenen Richtungen voneinander unabhängige axiomatische Postulate für Randlosigkeit in beiden Richtungen sind **[B33]**:[41]

(Rl-A$_1$) $\ulcorner \Box_1\alpha \rightarrow \Diamond_1\alpha \urcorner$ postuliert Randlosigkeit in Richtung A
(Rl-A$_2$) $\ulcorner \Box_2\alpha \rightarrow \Diamond_2\alpha \urcorner$ postuliert Randlosigkeit in Richtung der Konversen von A

Fordert man beidseitige Randlosigkeit, so kann man übrigens bemerken, dass sich die bimodalen Operatoren wieder so verhalten, wie es sich in einem klassischen logischen Quadrat darstellen lässt:



Die K_{lin}-Axiomatik unter Hinzufügung von (Rl-A$_1$) und (Rl-A$_2$) (selbst noch ohne Dichteaxiom) hat außerdem folgende recht interessante Eigenschaft: Man kann damit beweisen, dass die Operatoren ***kommutieren***, d.h. man kann die folgenden Formeln herleiten **[B34]**:

(1) $\Diamond_1\Diamond_2\, p \equiv \Diamond_2\, \Diamond_1\, p$ (2) $\Box_1\Box_2\, p \equiv \Box_2\, \Box_1\, p$.

K_b lässt sich auf völlig analoge Weise verfeinern.

1.3. Deutungen monomodaler und bimodaler Logiken

1.3.1 Alethische Modalitäten: S5 als Logik von „möglich“ und „notwendig“

Die Deutung der Sprache S5 als Logik der Ausdrücke „notwendig“ und „möglich“ ist so üblich und mit der Geschichte der Modallogik so eng verknüpft, dass man sich über die Motivation dieser Deutung kaum mehr Gedanken macht. Diese Deutung lässt sich in drei Schritten motivieren. Dabei sei die Box in der Deutung „es ist notwendig, dass“ als „N“ und die Raute in der Deutung „es ist möglich, dass“ als „M“ notiert.

[41] Vgl. auch Burgess, "Basic Tense Logic" (1984), S.108.

1. Die seit Aristoteles akzeptierte Äquivalenz von „es ist notwendig, dass" und „es ist nicht möglich, dass nicht"[42] erfordert für eine alethische Deutung wenigstens die übliche Definition der Raute und die Modallogik K mit ihrem Theorem „$Np \equiv \sim M\sim p$".
2. Die klassischen modallogischen Gesetze „Ab oportere ad esse valet consequentia" und „Ab esse ad posse valet consequentia" erfordern für eine alethische Deutung nicht nur K, sondern wenigstens die Modallogik T mit ihren Theoremen „$Np \rightarrow p$" und „$p \rightarrow Mp$".
3. Kann etwas der Fall sein, und könnte es zugleich der Eigenschaft ermangeln, der Fall sein zu können, wenn die Dinge anders stünden? – Nein.[43] Eine alethische Deutung erfordert daher, dass „$Mp \wedge M\sim Mp$" kontradiktorisch, „$\sim(Mp \wedge M\sim Mp)$" aber allgemeingültig ist. Nun ist „$\sim(Mp \wedge M\sim Mp)$" deduktiv äquivalent mit „$MNp \rightarrow Np$". Also erfordert eine alethische Deutung nicht nur T, sondern S5.

Nicht nur die Intuitionen zur Verwendung der Ausdrücke „möglich" und „notwendig" haben darauf Einfluss, welche Modallogik im Sinne dieser Ausdrücke deutbar ist; es hat auch die so gedeutete Logik Einfluss darauf, *in welchem Sinn* die Ausdrücke bei der Deutung der Logik gemeint sein müssen. Die Art von Möglichkeit, die sich in S5 modellieren lässt ist z.B. nicht Möglichkeit im Sinne von Vorstellbarkeit, sondern im Sinne von (theoretischer oder tatsächlicher) alternativer *Realisierbarkeit*. Wieso ist diese Deutung von S5 möglich? Hierzu ist eine Deutung der Bewertungskontexte und der Zugänglichkeitsrelation nötig. Üblicherweise lautet sie: Die Bewertungskontexte sind als *mögliche Welten* zu deuten. Die Zugänglichkeitsrelation ist dann in etwa zu lesen als: „...schließt es im Falle der Verwirklichung nicht als Alternative aus, dass ...". Der Begriff der möglichen Welt ist umstritten. Aber es liegt für das Folgende auch nahe, als die Bewertungskontexte eines alethisch gedeuteten S5-Modells nicht *primitive* Entitäten anzunehmen, sondern selbst wieder PC-Interpretationsfunktionen, also maximale Mengen von Paaren aus Satzbuchstaben und Wahrheitswerten.[44] W ist dann eine nichtleere Menge von PC-Interpretationsfunktionen
$\{I_1, ..., I_n\}$und es gilt (mit $m \in \{1,..., n\}$):

$$V(\alpha, I_m) = I_m(\alpha), \text{ falls } \alpha \text{ ein Satzbuchstabe ist.}$$

[42] Aristoteles, Met.V (Δ), 1015a34.

[43] "Are there states of affairs that in fact could have obtained, but that would have lacked the property of possibly obtaining, had things been different in some possible way?" Plantinga, "The Nature of Necessity" IV6, S.53f.

[44] Dieser Gedanke liegt bereits nahe durch das Konzept der Weltbeschreibungen in Carnaps „Meaning and Necessity" (1947).

1.3.2 Bimodale Logiken als Zeitlogiken

Die abstrakte Diskussion von S5 lässt an eine sehr einfache Zeitlogik denken. Man deutet S5 temporal, fasst also die Kontexte als Zeiten oder **Zeitstellen** auf. Schließlich sind Zeiten offensichtlich Wahrheitsgelegenheiten. Die Box erhält dann die Deutung „immer“ und der Diamant die Deutung „irgendwann“. Diese Deutung ergibt jedoch nur eine armselige Zeitlogik, die nicht im Mindesten das ausschöpft, was die Zeit an logischer Struktur anbietet. Die Schwäche von S5 als Zeitlogik ist, dass sie die offensichtliche Gerichtetheit der Zeit in Vergangenheit und Zukunft nicht berücksichtigt. Diese Gerichtetheit legt den Wunsch nach *Paaren* von Modaloperatoren nahe, die gleichsam in die Zukunft oder in die Vergangenheit blicken, wofür sich eine bimodale Logik bestens eignet.

Viele Eigenschaften der Zeitachse der klassischen Physik lassen sich am besten mit *a*symmetrischen[45] und irreflexiven Zugänglichkeitsrelationen ausdrücken. Oft, z.B. bei Randlosigkeit und Dichte, ergeben erst asymmetrische und irreflexive Zugänglichkeitsrelationen solche Varianten der Operatoren, mit denen man die fraglichen Eigenschaften objektsprachlich ausdrücken kann. Die Zugänglichkeitsrelationen sind zu deuten als:

A_1 „liegt vor (=ist früher als)“
A_2 „liegt nach (=ist später als)“.

Als Logik, deren Zugänglichkeitsrelationen man so deuten kann und deren Modelle dann Ähnlichkeit mit der in der Physik verwendeten Zeitachse aufweisen, empfiehlt sich eine temporale Deutung einer Erweiterung von K_t um die folgenden Forderungen für die Zugänglichkeitsrelation:
(1) Asymmetrie und damit Irreflexivität
(2) Transitivität
(3) Linearität (beidseitige Konnexität)
(4) Verinselungsfreiheit
(5) beidseitige Randlosigkeit
(6) Dichte.
Die ersten drei Forderungen ergeben die Sprache K_{lin}, die sich durch Zusatzforderungen weiter verfeinern lässt.

Man entscheidet sich mit der Forderung der Dichte dafür, als die relevanten Zeitstellen Zeit*punkte* zu betrachten: Zwischen zwei verschiedenen Zeitpunkten liegt immer noch ein weiterer, zwischen zwei Stunden liegt nicht immer noch eine weitere Stunde. Die temporale Deutung aller anderen zunächst abstrakt vorgestellten Eigenschaften ist ebenfalls offensichtlich. Die Operatoren erhalten in K_{lin} und jeder Erweiterung davon die folgende Bedeutung:

---

[45] Man beachte zur Definition Kap. I 1.2.1.

Es war immer der Fall (irreflexives „$\square_1$“, für die *temporale* Deutung notiert „H“)
Es war der Fall (irreflexives „$\Diamond_1$“, ebenso notiert als „P“)
Es wird immer der Fall sein (irreflexives „$\square_2$“, ebenso notiert als „G“)
Es wird der Fall sein (irreflexives „$\Diamond_2$“ ebenso notiert als „F“)

Die Zugänglichkeitsrelation soll im Falle der temporalen Deutung „liegt früher als“ aus offensichtlichen mnenotechnischen Gründen immer als „<“ notiert werden, „W“ als „T“ und Elemente daraus als t, t' etc.

Es ist zu bemerken, dass die ganz natürliche Art, wie man die Operatoren angesichts der vorgenommenen Deutung der Zugänglichkeitsrelationen liest, eine Brücke schlägt zwischen *perspektivischer* und *aperspektivischer Rede* von der Zeit. Man kann beide Redeweisen auch, nach einer berühmten entsprechenden Einteilung des ansonsten kaum mehr bekannten britischen Philosophen McTaggart in seinem Artikel "The Unreality of Time" von 1908, die Rede im Sinne der A-Ordnung von Zeitstellen („A-series“, perspektivisch) einerseits und die Rede im Sinne der B-Ordnung von Zeitstellen („B-series“, aperspektivisch) andererseits nennen. Die Zugänglichkeitsrelationen sind insofern aperspektivisch formuliert, als z.B. unabhängig davon, welches Jahr die Gegenwart ist, 1999 immer früher ist als 2010. Ob eines dieser Jahre Vergangenheit ist, oder beide, so dass man von allem Geschehen währenddessen sagen muss, dass es *gewesen* ist, dass es der Fall *war*, dass von ihm angemessen in *Vergangen*heitsformen der Verben zu sprechen ist; das ist aber abhängig davon, welches Jahr die Gegenwart ist.

Die geradezu zwangsläufige Lesart der Operatoren „F“ und „P“ für eine temporale Deutung von K_{lin} zeigt auch, dass perspektivische und aperspektivische Redeweise durch gewisse Brückenprinzipien miteinander verbunden sind:

<u>Brückenprinzipien für temporale A- und B-Ordnung</u>
(1) Liegt t später als t', so gibt es keine mögliche Gegenwart, in der, was allein zu t der Fall ist, Vergangenheit ist, während, was allein zu t' der Fall ist, Zukunft ist.
(2) Liegt t früher als t', so gibt es keine mögliche Gegenwart, in der, was allein zu t der Fall ist, Zukunft ist, während, was allein zu t' der Fall ist, Vergangenheit ist.
(3) Liegt t später als t', so ist, wenn t Gegenwart ist, was allein an t' der Fall ist, Vergangenheit und weder Gegenwart noch Zukunft.
[(4) Liegt t früher als t', so ist, wenn t Gegenwart ist, was allein an t' der Fall ist, Zukunft und weder Gegenwart noch Vergangenheit.]

Alle vier Prinzipien dürften bei einer linearen Zeitvorstellung unstrittig sein. Zumindest nicht unplausibel ist der Gedanke, die B-Ordnung von der A-Ordnung her charakterisierbar zu machen,[46] indem man den Prinzipien (1) und (2) ihre Konversen hinzufügt, also:

[46] Vgl. im Vorwort von Kienzle zu ZuE S.17f.

(1’) Gibt es keine mögliche Gegenwart, in der, was allein zu t der Fall ist, Vergangenheit ist, während, was allein zu t’ der Fall ist, Zukunft ist, so ist t später als t’.
(2’) Gibt es keine mögliche Gegenwart, in der, was allein zu t der Fall ist, Zukunft ist, während, was allein zu t’ der Fall ist, Vergangenheit ist, so liegt t früher als t’.

Ferner ist zu bemerken: Mit Blick auf ein K_{lin}-Modell allein lässt sich nicht feststellen, welche Zugänglichkeitsrelation welche Deutung und somit, welcher Operator welche Bedeutung hat. Dies muss extra dazu gesagt werden, und es ist nichts als darstellungstechnische Willkür, gerade die Relation A als vergangenheits- und deren Konverse als zukunftsgerichtet zu deuten und nicht umgekehrt. Lineare Zeitlogiken können also *abgesehen von der Deutung* Vergangenheit und Zukunft nicht unterscheiden. Das schließt natürlich nicht aus, dass der Unterschied ein realer ist, nur eben keiner, der in der Darstellung zum Ausdruck kommt.

Wer Vergangenheit und Zukunft auch im Modell unterscheiden möchte, der wird über lineare Modelle hinausgehen wollen. Ein Versuch dazu, der der Hauptgegenstand von Teil II dieser Studie ist, besteht darin, die Zukunft eines Zeitpunktes als Bereich des zu diesem Zeitpunkt noch weitgehend Offenstehenden anzusehen, die Vergangenheit als den Bereich des schon Festgelegten. Ein gut ausgearbeiteter Vorschlag, diesen Grundgedanken modelltechnisch darzustellen, liegt darin, K_b-Modelle zu verwenden, die sich in Richtung der Zugänglichkeitsrelation A verzweigen wie in Abb.2 in Kap. I 1.2.2.3. Von k_3 und k_4 in der Abbildung würde man dann üblicherweise sagen, dass es sich bei ihnen um zwei verschiedene Zeitstellen handelt, die beide in der Zukunft von k_2 liegen, und „man sich ... die Zeit nach dem Muster eines Baumes vor[stellt], dessen Stamm aus der Vergangenheit hervorwächst und sich zur Zukunft hin verzweigt“.[47] Diese Redeweise ist sehr eingängig, aber sie ist meiner Meinung nach nicht sehr glücklich. Ich bin nämlich nicht der Auffassung, dass man es hier noch mit einer reinen *Zeit*logik zu tun hat. Man sieht das bereits daran, dass sich bei Beibehaltung der üblichen Wahrheitsbedingungen die Bedeutung der Operatoren in verzweigten K_b-Modellen mit der vorgeschlagenen Deutung zum Teil verändert:

„$\Box_2$“: Es wird *bestimmt* immer der Fall sein (nämlich an allen Kontexten aller möglichen Zukünfte, gleichsam in der ganzen Baumkrone);
„$\Diamond_2$“ (in dieser Bedeutung oft notiert als „f“):[48] Es wird *vielleicht* der Fall sein (nämlich an wenigstens einem Kontext wenigstens einer möglichen Zukunft).

Man sieht daran: Die Operatoren erhalten neben der rein zeitlichen Bedeutung einen modalen Beigeschmack. Ist das tatsächlich gut damit erklärt, dass zwei verschiedene

---

[47] So Kienzle im Vorwort zu ZuE, S.19. Anders, und m.E. plausibler, Belnap / Perloff / Xu, „Facing the Future“, S.29, Fußnote 1: „...we never, ever mean to suggest that time itself – which is presumably best thought of as linear – ever, ever ‚branches’“.
[48] Vgl. z.B. Harada, IZL, S.261.

*Zeit*stellen *nebeneinander* liegen können wie k_3 und k_4? Immerhin könnten k_3 und k_4 im selben zeitlichen Abstand von k_2 liegen, an beiden könnte also z.B. die Uhr auf 12 stehen, während sie an k_2 auf 11 steht. Wer die beschriebene Deutung von K_b-Modellen vertritt, muss also auch die These vertreten, dass ein bestimmter zeitlicher Abstand einer Zeitstelle von einer anderen eine Eigenschaft ist, die diese mit mehreren von ihr verschiedenen Zeitstellen teilen kann. Die beschriebene Deutung kann hingegen *nicht* vertreten, wer meint, dass für alle Zeitstellen t, t', t" gilt: Wenn t' und t" den gleichen zeitlichen Abstand von t haben, dann t'=t". Da ich die letztgenannte These für sehr plausibel halte, ziehe ich eine andere Redeweise (und damit auch eine andere Ansicht) vor: Verzweigte K_b-Modelle stellen nicht die Zeit dar, sondern ein durch seine Struktur besonders charakterisiertes **zeitlich-modales Kontinuum**. Die Kontexte darin kann man auch nicht als Zeitstellen, sondern nur als **tempo-modale Positionen** deuten.[49] Schließlich kann A nicht als „liegt früher als" gedeutet werden und die Konverse von A als „liegt später als", sondern die Konverse ist mit *modal flavour* als „*kann* folgen auf" zu lesen und A selbst als „*kann* gefolgt sein von".

1.3.3 S5 als Logik von „irgendwo" und „überall"

Die Deutung einer monomodalen Logik als Logik des Raums oder räumlicher Begriffe liegt schon allein dadurch sehr nahe, dass man bereits wenn man modallogische Modelle *ganz abgesehen* von einer Deutung betrachtet, sie sich am besten verräumlicht und die Bewertungskontexte darin als eine Art Orte vorstellt. Für eine räumliche Deutung werden die Bewertungskontexte dann einfach tatsächlich als Orte im Raum interpretiert. Die räumliche Deutung der Modallogik hat trotz ihrer Augenfälligkeit im Vergleich zur alethischen, temporalen, deontischen oder epistemischen Deutung erstaunlich späte und geringe Beachtung erfahren: Erst seit Ende der 70er Jahre des 20. Jahrhunderts setzt die genauere Beschäftigung damit ein.[50]

Denkt man bei K_{lin} sehr bald an die Zeitachse oder zumindest eine Koordinatenachse als mögliche Anwendung, so enthält S5 keine Theoreme, die so sehr gerade eine spatiale Deutung nahe legen (ganz egal, wie man die Modelle visualisiert). Dies mag von Wright zu dem fein formulierten, aber vielleicht in der Folge etwas abschreckenden Fazit geführt haben:

---

[49] In „Facing the Future" von Belnap, Perloff und Xu heißen sie – m.E. nicht sehr glücklich – durchweg „moments".

[50] Erste Vorschläge finden sich in Segerberg, "'Somewhere Else' and 'Some other Time'" (1976), "A Note on the Logic of 'Elsewhere'" (1980), von Wright, "A Modal Logic of Place" (1979 [1983]) sowie, unabhängig davon, bei Pilot, "Prolegomena zu einer kritischen Theorie der Erfahrung - Studien zu Popper und Kant". Die Papiere der Tagung "Diamonds in Space" zur Raumlogik in Amsterdam 1999 finden sich unter http://www.wins.uva.nl/~aiellom/diamonds99.html. MDML gibt einen

> I am not predicting that the modal logic of place or of space will have as great a future as the modal logic of time turned out to have after it had been invented.[51]

Dass eine einfache Deutung von S5 als Raumlogik möglich ist, wird sich in weiteren Teilen dieser Studie dennoch eher als Vorteil erweisen. Denn wie der Raum in der Raumzeit, so ist auch die Raumlogik in der Raumzeitlogik als Komponente aufgehoben; und die Struktur der Raumzeit wie auch ihre Logik ist so kompliziert, dass man über die Einfachheit wenigstens ihrer räumlichen Komponente nur froh sein kann.

Die wesentlichen Details der räumlichen Deutung und S5 liegen auf der Hand: Die Zugänglichkeitsrelation ist bei der spatialen Deutung von S5 zu deuten als „... hat einen räumlichen Abstand von ... oder ist identisch mit ...“. Für S5-Modelle ist die spatiale Deutung der Box „überall (im selben Raum)“, die der Raute „irgendwo (im selben Raum)“. Für die räumliche Deutung soll die Box als „E“ (für „everywhere“) und der Diamant als „S“ (für „somewhere“) notiert werden. Man führt sich zwar schnell konkret vor Augen, dass sämtliche S5-Axiome für diese Deutung völlig plausibel sind und entsprechend auch ihre Konsequenzen. Aber längst nicht alle Intuitionen zum Raum, von denen man sich wünschen würde, dass sie sich in raumlogischen Theoremen widerspiegeln oder zumindest als modelltheoretische constraints die Menge der ernsthaft raumlogisch deutbaren Modelle beschränken, sind im Rahmen von S5 erfassbar, so etwa nicht die Dreidimensionalität. Hier helfen mehrdimensionale Logiken weiter. Sie sollen in Kapitel 2 vorgestellt werden.

Überblick auch zu den dort favorisierten "region connecting calculi" (RCC's) auf dem Stand von 2003.

[51] Von Wright, "A Modal Logic of Place" (1983), S.140.

KAPITEL 2

Von der Logik der Fläche zur Logik der Raumzeit

2.1 Die Logik des Schachbretts

2.1.1 Produkte von Modellen

In Kap. I 1.2.2.1 wurden diejenigen bimodalen Logiken, deren lineare Variante sich mit Gewinn als Zeitlogik deuten lässt, als eine besondere Art der Fusionsbildung eingeführt. Was eine Fusion ist, wurde dabei am Versuch erläutert, über die Längs- und Querreihen eines Schachbretts formalsprachliche Aussagen zu machen. Die Fusion von $S5_1$ und $S5_2$ war dazu ein natürlicher erster Schritt. Allerdings war das Ergebnis nicht sehr beeindruckend. Man konnte zwar über Längs- und Querreihen zugleich Aussagen treffen, die Längs- und Querreihen aber nicht recht zueinander in Beziehung setzen. So sind z.B. die folgenden Formeln, die angesichts der Anordnung von Längs- und Querreihen auf einem Schachbrett extrem plausibel sind, bezüglich der Fusion von $S5_1$ und $S5_2$ *nicht* allgemeingültig **[B1]**:

(**com**) „$\Diamond_1\Diamond_2 p \equiv \Diamond_2\Diamond_1 p$“ mit den beiden Richtungen
(**com-1**) „$\Diamond_1\Diamond_2 p \rightarrow \Diamond_2\Diamond_1 p$“
(**com-2**) „$\Diamond_2\Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_2 p$“ und

(**ch**[urch /]**r**[osser]) „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow \Box_1\Diamond_2 p$“.[1]

Ein Bezug auf die Anordnung von Längs- und Querreihen und damit das Ansteuern von Feldern ist dagegen mit dem **Produkt von $S5_1$ und $S5_2$** möglich, das als **$S5^2$** bezeichnet werden soll. Um die Produkt*struktur* zweier modallogischer Strukturen zu erzeugen, bildet man zunächst das (cartesische) Produkt der beiden Kontextmengen W_1 und W_2. Das ist die Menge *aller* geordneten Paare, für die gilt, dass ihre jeweils erste Komponente aus W_1 und ihre jeweils zweite Komponente aus W_2 ist. Im konkreten Fall wird das Ergebnis niemand erstaunen, der schon einmal ein Schachbrett gesehen hat:[2]

---

[1] Benennung nach MDML, S.222.
[2] Die Reihenfolge von Buchstaben und Zahlen ist gegenüber der üblichen Schachnotation aus darstellungstechnischen Gründen vertauscht: B3 lässt sich m.E. besser nachvollziehen, wenn R^*_1 vertikal und R^*_2 horizontal ist.

$$
\begin{aligned}
W_1 \times W_2 = \ \{&\langle 8,a\rangle, \langle 8,b\rangle, \langle 8,c\rangle, \langle 8,d\rangle, \langle 8,e\rangle, \langle 8,f\rangle, \langle 8,g\rangle, \langle 8,h\rangle,\\
&\langle 7,a\rangle, \langle 7,b\rangle, \langle 7,c\rangle, \langle 7,d\rangle, \langle 7,e\rangle, \langle 7,f\rangle, \langle 7,g\rangle, \langle 7,h\rangle,\\
&\langle 6,a\rangle, \langle 6,b\rangle, \langle 6,c\rangle, \langle 6,d\rangle, \langle 6,e\rangle, \langle 6,f\rangle, \langle 6,g\rangle, \langle 6,h\rangle,\\
&\langle 5,a\rangle, \langle 5,b\rangle, \langle 5,c\rangle, \langle 5,d\rangle, \langle 5,e\rangle, \langle 5,f\rangle, \langle 5,g\rangle, \langle 5,h\rangle,\\
&\langle 4,a\rangle, \langle 4,b\rangle, \langle 4,c\rangle, \langle 4,d\rangle, \langle 4,e\rangle, \langle 4,f\rangle, \langle 4,g\rangle, \langle 4,h\rangle,\\
&\langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle, \langle 3,c\rangle, \langle 3,d\rangle, \langle 3,e\rangle, \langle 3,f\rangle, \langle 3,g\rangle, \langle 3,h\rangle,\\
&\langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 2,d\rangle, \langle 2,e\rangle, \langle 2,f\rangle, \langle 2,g\rangle, \langle 2,h\rangle,\\
&\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 1,e\rangle, \langle 1,f\rangle, \langle 1,g\rangle, \langle 1,h\rangle\}
\end{aligned}
$$

Jedes der 64 Felder des Schachbretts, so der Grundgedanke der Schachnotation, lässt sich ja als geordnetes Paare aus einer horizontalen und einer vertikalen Reihe beschreiben. Man kann nun die folgenden Relationen definieren: (mit k, k' aus W_1 und *k*, *k*' aus W_2):

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{k}, k\rangle\ R^*_1\ \langle \mathrm{k}', k'\rangle \quad &&\text{gdw} \quad \mathrm{k}\ R_1 \mathrm{k}' \quad \text{und} \quad k = k'\\
&\langle \mathrm{k}, k\rangle\ R^*_2\ \langle \mathrm{k}', k'\rangle \quad &&\text{gdw} \quad \mathrm{k} = \mathrm{k}' \quad \text{und} \quad k\ R_2\, k'.
\end{aligned}
$$

Die beiden gesternten Relationen haben für den konkreten Fall des Schachbretts eine sehr plausible Deutung. Sie repräsentieren nämlich im konkreten Fall nunmehr als Relationen *zwischen Feldern* die Beziehungen:

R^*_1: „liegt über, unter oder ist identisch mit“
R^*_2: „liegt neben oder ist identisch mit“ **[B2]**.

Offensichtlich kann man auf dieselbe Art zu n Kontextmengen n gesternte Zugänglichkeitsrelationen definieren.[3] Als die **S5^{n}-Produkt-Struktur** (product frame) über $\langle W_1, R_1\rangle$ bis $\langle W_n, R_n\rangle$ kann man einfach das Tupel

$$\langle W_1 \times ... \times W_n, R^*_1, ..., R^*_n\rangle$$

ansehen.[4] Im Spezialfall von $S5^2$ handelt es sich um $\langle W_1 \times W_2, R^*_1, R^*_2\rangle$. Will man eine Produktstruktur zu einem **Modell-Produkt** erweitern, so wird man eine Bewertungsfunktion V hinzufügen, die jeder wohlgeformten Formel für jedes *Tupel* $\langle k_1, ..., k_n\rangle$ aus $W_1\times ... \times W_n$ genau einen Wert aus {1,0} zuweist. Im Spezialfall eines Schachbretts handelt es bei den Tupeln um geordnete Paare von Längs- und Querreihe, die Felder spezifizieren. Die Produkt-Allgemeingültigkeit ist definiert, wie zu erwarten.[5] Es hat sich zeigen lassen:[6]

---

[3] und zwar mit (mit i,m aus {1,...,n}): $\langle k_1, ..., k_n\rangle\ R^*_i\ \langle k_1', ..., k_n'\rangle$ gdw $k_i\ R_i\ k_i'$ und $k_m = k_m'$ für alle $m \neq i$.

[4] Vgl. MDML, S.126, 222.

[5] Eine Formel α eines n-Produkts ist gerade dann **Produkt-allgemeingültig**, wenn gilt: Für jedes V der Produkt-Struktur eines beliebigen Modell-Produkts und für jedes $\langle k_1, ..., k_n\rangle$ aus der

- Jede in einer der Ausgangssprachen allgemeingültige Formel (z.B. „$\Box_1 p \rightarrow p$“) ist nicht nur fusions-, sondern auch produkt-allgemeingültig.
- Jede nach dem Formregeln des Produkts wohlgeformte Substitutionsinstanz jeder solchen Formel (z.B. „$\Box_1\Box_2 p \rightarrow \Box_2 p$“) ist nicht nur fusions-, sondern auch produkt-allgemeingültig. Die Fusions-Axiomatik ist also auch für das Produkt korrekt.

Doch ist sie auch vollständig? Nein. Dies lässt sich anhand der bereits diskutierten Formeln (com) und (chr) sowie schon anhand der Sprache K^2 zeigen. Diese Formeln sind allesamt Produkt-allgemeingültig **[B3]**. Doch da (com) und (chr) nicht Fusions-allgemeingültig sind, die Axiomatik für die Fusion jedoch korrekt ist, können (com) und (chr) nicht mit Hilfe der Axiomatik für die Fusion (also die bloße Aufsummierung der Axiomatiken der Ausgangssprachen) hergeleitet werden. Kurz: Bei einem jeden Produkt von Modallogiken tritt eine Interaktion der Operatoren auf, die in einer vollständigen Axiomatik gegenüber den Axiomatiken der Ausgangssprachen wenigstens *ein* echtes *Zusatz*axiom berücksichtigt werden muss.

Die nächstliegenden Kandidaten für zusätzliche Axiomenschemata sind in diesem Fall die Verallgemeinerungen von (com) und (chr) selbst, also:

(com) $\ulcorner \Diamond_1\Diamond_2\,\alpha \equiv \Diamond_2\Diamond_1\alpha \urcorner$ **(chr)** $\ulcorner \Diamond_2\Box_1\,\alpha \rightarrow \Box_1\Diamond_2\alpha \urcorner$

Gabbay und Shehtman haben 1998 Folgendes zeigen können:[7] Beliebige (auch gemischte!) zweidimensionale Produkte der Sprachen K, $K^{add(S4-\Box)}$, T, S4 und S5 werden vollständig axiomatisiert durch die Aufsummierung der Axiomatiken für die Einzelsprachen unter Hinzufügung von **(com)** und **(chr)**.[8]

Für $S5^2$ als Logik des Schachbretts haben die Äquivalenzen (com) und die Formel (chr-2) eine besonders anschauliche Bedeutung. So lernt jeder Anfänger im Schach, dass man den Springer in Form eines „L“ springen lässt, er sich z.B. zwei Felder nach vorn und eins nach rechts bewegen kann. Überlegt man sich, wie man einen Springer-Zug in Richtung auf die gegnerische Seite des Bretts ausführt, so ist es egal, ob man sich diesen Zug als „ein Feld zur Seite und zwei nach vorn“ vorstellt oder als „zwei Felder nach vorn und eins zur Seite“ – man wird auf demselben Feld landen. Ebenso sind „zwei Felder zur Seite und eins nach vorn“ und „ein Feld nach vorn und zwei zur Seite“ äquivalent (für „hinten“ statt „vorn“ gilt dasselbe). Das ist eine Besonderheit des Schachbretts, die ihr formales Pendant gerade in (com-1) und (com-2) findet.

Kontextmenge der Produkt-Struktur eines beliebigen Modell-Produkts, die aus einer beliebigen Struktur der ersten bis zu einer beliebigen Struktur der n-ten Sprache gebildet ist, gilt: $V(\alpha,\langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$.

6 Zum Beweis: MDML, Proposition 3.8., 3.9., S.128f.

7 D. Gabbay und V.Shehtman, “Products of Modal Logics Part I”; Zusammenfassung: MDML, Kap. 5.1, S.222-235.

8 Vgl. MDML S.11 (für den Begriff der Kripke-completeness), S.222 für die Definition des Produkts, S.224 für das Ergebnis bezüglich des K-Produkts, Proposition 5.7 auf S.229 für das Ergebnis für Horn-axiomatisierbare Logiken allgemein, Corollary 5.10. auf S.230 für die konkrete Liste von Logiken, auf die sich das Ergebnis erstreckt und für den Beweis S.224-230. Zur Definition der Horn-Axiomatisierbarkeit S.228.

(chr-2) (und entsprechend (chr)) lässt sich mit einem Turm veranschaulichen, der z.B. von c1 aus gesehen zwei Felder nach rechts, also auf e1 steht. Er bedroht dann die ganze (als von anderen Figuren frei angenommene) e-Reihe. Für c1 ist also „$\Diamond_1\Box_2 p$“ wahr, wenn man „p“ als „Dies ist ein von einem Turm besetztes oder bedrohtes Feld“ liest. Nun stößt man zweifellos in dieser Situation von *jedem* Feld der c-Reihe aus zwei Felder nach rechts auf ein vom Turm besetztes oder bedrohtes Feld, so dass gilt „$\Box_2\Diamond_1 p$“.

Aus (chr) lässt sich leicht die Version **(chr-2)** mit vertauschten Indizes herleiten, also $\ulcorner\Diamond_1\Box_2\ \alpha \rightarrow \Box_2\Diamond_1\alpha\urcorner$ **[B4]**. Mit (com) lässt sich übrigens ganz leicht die entsprechende Formel mit starken Operatoren, also „$\Box_1\Box_2\ p \equiv \Box_2\Box_1\ p$“ herleiten **[B5]**. Die Vertauschung der schwachen und starken Operatoren in (chr) ergibt jedoch *keine* allgemeingültige Formel **[B6]**. Zwar nicht für jedes K-Produkt, aber für $S5^2$ lassen sich überraschend starke Theoreme herleiten, wie z.B. das folgende **[B7]**:

(rom) $\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\ p \rightarrow \Box_1\Diamond_2\Diamond_1\ p$

Der Name der Formel soll an das Sprichwort „Alle Wege führen nach Rom“ erinnern. Sie lässt sich für das Schachbrett gut motivieren, wenn man an Züge mit dem Turm denkt. Führt irgendeine Kombination aus Längs-, Quer- und einem weiteren Längszug zum (einzigen) „p“-Feld, so kann man an einen *beliebig* weiten Längszug einen Quer- und einen Längszug anschließen, so dass man wieder das „p“-Feld erreicht.

$S5^2$ ist zweifellos nicht nur auf Schachbretter anwendbar, sondern allgemein auf Flächen. Allerdings ist, wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, auch die Entscheidung für $S5^2$ nicht unschuldig gegenüber Vorannahmen über die Struktur von Flächen: Für ausgefranste Flächen, Flächen uneinheitlicher Breite und Flächen mit Löchern darin ist $S5^2$ keine adäquate Sprache. $S5^2$ weist auch Nachteile auf.

1. Für die Anwendung ist die Produktbildung der bisher vorgestellten Art ontologisch nicht unbedingt harmlos. So gibt sie z.B. den Längs- und Querreihen des Schachbretts Vorrang vor den Feldern. Wer der Meinung ist, nicht die Felder seien Konstrukte aus Reihen, sondern vielmehr die Reihen Konstrukte aus Feldern, der wird in den bisher eingeführten Modell-Produkten eine schiefe Darstellung sehen.
2. Ein Modell-Produkt ist immer nur relativ auf zwei konkrete Strukturen der zwei Ausgangssprachen hin definiert. Produkt-Modelle der bisher vorgestellten Art sind deshalb in gewisser Weise unhandlich und unselbständig (indem sie jeweils von zwei konkreten Ausgangs-Strukturen abhängen).

2.1.2 Zwei alternative Formulierungen der Logik des Schachbretts

2.1.2.1 *Ein* Modell mit mehreren Kontextmengen

Das Problem der Unselbständigkeit von Modell-Produkten lässt sich auf sehr nahe liegende Art lösen, die kaum mehr als eine Notationsvariante ist: Man fasst einfach die zu Grunde liegenden Modelle in einem Tupel zusammen; und man lässt, was bisher als Produkt-Struktur definiert war, in die Definition der Wahrheitsbedingungen einfließen. Man erhält so anstelle eines Modell-Produkts aus zwei zuvor für sich definierten Modellen ein selbständiges **Produktmodell**. Auf diese Art formuliert z.B. Kutschera für eine andere Anwendung[9] eine typische Klasse von Modellen (nämlich sogenannte TxW-Modelle). Ein $S5^2$-Rahmen hat dann die Form eines Quadrupels $\langle W_1, R_1, W_2, R_2\rangle$. Das entsprechende Produktmodell hat einfach die Form $\langle W_1, R_1, W_2, R_2, V\rangle$, wobei V charakterisiert ist wie folgt:

> V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Paar aus $W_1 \times W_2$, genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei die Werte für die atomaren Formeln beliebig sind, aber ansonsten gilt:
> (i) $V(\sim\alpha,\langle k, k'\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle k, k'\rangle)=0$[10]
> (ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle k, k'\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle k, k'\rangle)=0$ oder[&] $V(\beta,\langle k, k'\rangle)=1$
> (iii*) $V(\Box_i\alpha, \langle k, k'\rangle)=1$ gdw für alle $\langle k'', k'\rangle$ aus $W_1{\times}W_2$ gilt: wenn k R_i k“, dann $V(\alpha,\langle k'', k'\rangle)=1$[11]

Wie man auch ganz allgemein für jedes n das n-dimensionale Produktmodell definieren kann, ist offensichtlich.[12]

2.1.2.2 Modelle mit lediglich *einer* Kontextmenge: Partitionsmodelle

Modelle mit mehreren Kontextmengen sind aber für bestimmte Anwendungen immer noch intuitiv unbefriedigend. So könnte jemand in Bezug auf das Schachbrett sagen: Man sollte als basale Entitäten, die ein Schachbrett bilden, nicht Reihen, sondern

---

[9] Vgl. Kap. II 1.2. und Kutschera, „TxW-completeness“ (1997).

[10] Statt von einer Wertzuweisung mit Bezug auf $W_1{\times}W_2$ und $\langle k, k'\rangle$ kann man auch einfach von einer Wertzuweisung für ein beliebiges k aus W_1 *und* ein beliebiges k’ aus W_2 sprechen und etwa „$V(\alpha, k, k')$“ oder „$V_{k,k'}(\alpha)$“ schreiben. Die letztere ist die von Kutschera a.a.O. selbst benutzte Notation.

[11] Zum Schritt von (iii) in der Definition des Modellprodukts zu (iii*) vgl. **[B8]**.

[12] Ein Rahmen hat die Form $\langle W_1, R_1, ..., W_n, R_n\rangle$, und bei der Charakterisierung des für das Modell hinzugefügten V steht statt „$\langle k, k'\rangle$“ jeweils „$\langle k_1, ..., k_n\rangle$“ etc. und statt „$W_1{\times}W_2$“ natürlich „$W_1\times ... \times W_2$“.

Felder ansehen. Es hat etwas Gekünsteltes, gerade die Felder aus Reihen aufzubauen und nicht umgekehrt.

Wie müsste die Definition eines Modells aussehen, die dieser Intuition gerecht wird? Zunächst wird sie auf der Definition einer *Struktur* beruhen, die auf Feldern aufbaut. Da die Längsreihen und die Querreihen die Menge der Felder jeweils *partitionieren*, also erschöpfend unter sich aufteilen, soll eine solche Struktur **Partitionsstruktur** heißen. Dafür, wie ein *Modell* darauf aussieht, gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

- In der ersten Variante werden im Fall der Schachbrett-Deutung Formeln relativ auf *Felder* bewertet; wie diese individuiert sind, spielt dabei keine Rolle. Da in diesem Fall die Rede über das Schachbrett auf die Rede über seine Felder reduziert wird, soll dabei von einem ***reduktiven*** **Partitionsmodell** die Rede sein.
- Die zweite Variante beruht auf dem Gedanken, dass man zwar die einzelnen Reihen oder Achsen als Mengen von Einzelelementen betrachtet, aber dennoch die Bewertung der Formeln in Bezug auf eine Längsreihe und eine Querreihe machen möchte. Da man so über Felder *und* Reihen sprechen kann, soll diese Art des Modells ***hybrides*** **Partitionsmodell** heißen. Sein Gebrauch ist im Falle der Logik des Schachbretts vielleicht am besten damit zu motivieren, dass man zwar die Felder als basal ansehen mag, jedes Feld aber erst als *dieses* Feld individuiert wird, indem es gerade das Schnittfeld einer bestimmten Längs- und Querreihe ist und durch diese Position seine charakteristischen Koordinaten erhält: Ein zurechtgeschnittenes Stück Furnier ist ja noch nicht *das* Feld a1 oder *das* Feld e4, bevor es an seinen Platz geleimt wird.

Während die Grundidee auch der zweiten Variante einfach ist, ist die Ausführung etwas komplizierter **[B9]**. Beim *reduktiven* Partitionsmodell haben die Wahrheitsbedingungen allgemein die Form V(α, k)=1, wobei k ein Feld ist. Die Bedingung für die Modaloperatoren lautet:

$V(\Box_i\alpha, k)=1$ gdw für alle k' aus W gilt: wenn $k\, R_i k'$, dann $V(\alpha, k')=1$.

Beim *hybriden* Partitionsmodell werden Werte zunächst den atomaren Formeln in Bezug auf Felder zugewiesen (z.B. I(p, k)=1). Die rekursiv formulierten Wahrheitsbedingungen beziehen sich dann aber auf Paare aus Längs- und Querreihe. Die Bedingung für die atomare Formel lautet dabei, wobei a und a' Längs- und Querreihe sind:

$V(\alpha,\langle a, a'\rangle) =1$ gdw α eine atomare Formel ist, $\{k\} = a \cap a'$ und $I(\alpha, k)=1$.

Etwas komplizierter ist die Bedingung für die Modaloperatoren. $V(\Box_i, \langle a, a'\rangle)$ ist gerade dann 1, wenn für jedes Schnittfeld von Reihen a" und a"', das zum Schnittfeld von a und a' in der Beziehung R_i (z.B. „liegt darüber") steht: $V(\alpha, \langle a'', a'''\rangle) = 1$ **[B10]**.

Der Gedanke, über ein Feld als Schnittstelle von Reihen sprechen zu können, hat im Folgenden wichtige Entsprechungen:

- die Rede von einer tempo-modalen Position als einer Schnittstelle eines Zeitpunkts und eines Weltverlaufs
- die Rede von einem event als Schnittstelle eines Ortes mit einer Zeit.

Die Erweiterung auf n Dimensionen ist offensichtlich. Das Vollständigkeitsresultat von Gabbay und Shehtmann überträgt sich auf die alternativen Semantiken (und weist sie damit tatsächlich als gleichwertige Alternativen aus) **[B11]**.

2.1.3 Produkte von K_{lin}

In Kap. I 2.2.3 wurde die Sprache K_{lin} zunächst ohne die temporale Interpretation eingeführt, mit der man sie üblicherweise motiviert. Tatsächlich hat sie ja an sich ebenso wenig irgendetwas spezifisch Temporales wie irgendeine formale Sprache an sich eine Deutung hat.

- Es ist offensichtlich, wie man ein zweidimensionale Produkt von K_{lin} definieren kann, und auch, wie sich diese Definition auf n Dimensionen erweitern lässt **[B12]**.
- Ebenso offensichtlich ist, dass dieses eine *räumliche* Deutung als Logik des Schachbretts oder auch, allgemeiner, einer zweidimensionalen Ebene erfahren kann.
- Schließlich ist offensichtlich, dass sich ein zweidimensionales K_{lin} ebenso durch Forderungen für Dichte, Randlosigkeit etc. verfeinern lässt wie ein eindimensionales und man dies entsprechend axiomatisch berücksichtigen kann.

Im Fall von ${K_{lin}}^2$ als Logik des Schachbretts kann man z.B. die Relationen R_1 und R_2 zwischen Reihen deuten als „liegt vor“ und “liegt links von“. Die *Deutungen*, nicht aber die Relationen selbst, sind natürlich abhängig von der Perspektive des jeweiligen Spielers oder Zuschauers. Entsprechendes gilt für die mit Hilfe von R_1 und R_2 definierten Relationen zwischen Feldern.

Da bereits K_{lin} zwei basale Modaloperatoren besitzt, werden in der Definition der Grundsyntax von ${K_{lin}}^2$ mit Hilfe der üblichen Formregeln immerhin schon insgesamt vier basale Operatoren eingeführt: „$\Box_1$“, „$\Box_2$“, „$\boxdot_1$“ und „$\boxdot_2$“. $\ulcorner\Diamond_i\urcorner$ kürzt $\ulcorner\sim \Box_i \sim\urcorner$ ab, und $\ulcorner\Diamonddot_i\urcorner$ kürzt $\ulcorner\sim \boxdot_i \sim\urcorner$ ab. Auch zu jedem ${K_{lin}}^n$-Modell gibt es klarerweise entsprechende Partitionsmodelle.

Ein recht leistungsfähiges Herleitungsspiel ${K_{lin}}^2$ erhält man, wenn man einfach die Axiomatik für K_{lin} verdoppelt, also einmal mit „$\Box_i$“ und einmal mit „$\boxdot_i$“ hinschreibt (com) und (chr) hinzufügt:

(com) $\ulcorner \Diamond_i \Diamonddot_k \alpha \equiv \Diamonddot_k \Diamond_i \alpha \urcorner$
(chr) $\ulcorner \Diamond_k \boxdot_i \alpha \rightarrow \boxdot_i \Diamond_k \alpha \urcorner$ [13]

[13] Man erinnere sich daran, dass $\ulcorner \Diamond_k \Box_i \alpha \rightarrow \Box_i \Diamond_k \alpha \urcorner$ und $\ulcorner \Diamonddot_k \boxdot_i \alpha \rightarrow \boxdot_i \Diamonddot_k \alpha \urcorner$ bereits K_t-herleitbar sind (vgl. Kap. I 1.2.2.2); außerdem erinnere man sich, dass die „internen“ (com)-artigen Gesetze

Aus (chr) folgt sehr schnell, analog zu [B4], $\ulcorner \diamondsuit_i \Box_k \alpha \rightarrow \Box_k \diamondsuit_i \alpha \urcorner$. Zu dieser Axiomatik lassen sich drei Dinge feststellen:

- Sie ist bezüglich K_{lin}^2 korrekt **[B13]**;
- das Vollständigkeitsresultat von Gabbay und Shehtmann ist *nicht* einschlägig, die Vollständigkeit ist sogar schon ausgeschlossen **[B14]**;
- auch ohne Vollständigkeit erweist sich die Axiomatik aber als recht umfassend und daher in der Anwendung wertvoll.

Der dritte Punkt bedarf einer Erläuterung: Man kann unterschiedlicher Ansicht darüber sein, wie schlimm die Unvollständigkeit eines Herleitungsspiels ist. Sind Vollständigkeitsbeweise tatsächlich „für jede Logik von grundlegender Bedeutung“[14], so ist es nicht verwunderlich, dass in der bisher ausführlichsten Untersuchung multidimensionaler Logiken die nicht vollständige Axiomatisierbarkeit von $S5^3$ und verwandter Sprachen als „big flaw“ gewertet wird.[15] Die dort „compass logics“ genannten Sprachen werden offenbar deshalb als „’naïve approach’“[16] auf lediglich zwei Seiten skizziert und nicht weiter untersucht.[17]

Benutzt man wie hier die Diskussion modallogischer Sprachen zur philosophischen Klärung von räumlichen, zeitlichen und alethisch-modalen Grundbegriffen, so erscheint diese Einschätzung der Schachbrett- und Würfellogiken als Überreaktion. Denn im Hinblick auf die philosophische Anwendung hat die vollständige Axiomatisierbarkeit nicht den Stellenwert, den sie im Hinblick auf andere Anwendungen, etwa in der Informatik, haben mag. Das heißt nicht, dass Herleitungsspiele überhaupt für die philosophische Anwendung uninteressant sind. Es ist nur nicht so, dass sie erst etwas wert sind, wenn sie vollständig sind. Ein denkbarer Einwand gegen diese Einschätzung ist:

> Die bloße Korrektheit ist billig zu haben. Ein Spiel, dessen einzige Regel darin besteht, irgendeine bestimmte *allgemeingültige* Formel so oft hinschreiben zu dürfen, wie man will, ist ja bereits per def. ein korrektes Herleitungsspiel.

Das stimmt zwar, wäre aber erst dann ein Argument für die Geringschätzung jedes unvollständigen Herleitungsspiels, wenn alle widerspruchsfreien, aber unvollständigen Herleitungsspiele so trivial wären wie im Beispiel, so dass es bei der Qualität eines Herleitungsspiels immer um alles oder nichts ginge. Diese Einstellung würde aber

---

$\ulcorner \Diamond_i \Diamond_k \alpha \equiv \Diamond_k \Diamond_i \alpha \urcorner$ und $\ulcorner \diamondsuit_i \diamondsuit_k \alpha \equiv \diamondsuit_k \diamondsuit_i \alpha \urcorner$ für randlose Modelle, nicht aber für Modelle mit Randbesitz gelten.

[14] So Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S. xxi.

[15] MDML, Kap. 2.6., S.78f. Dort werden sie zusammenfassend „compass logics“ genannt.

[16] A.a.O. S.79.

[17] A.a.O. S.79f. Die Autoren untersuchen als Alternative dazu sogenannte RCCs, “region connecting calculi” (S.80ff). Die stellen historisch gesehen eine begrüßenswerte Erweiterung der Ende der 60er Jahre des 20. Jahrhunderts von Hamblin entwickelten Intervallsemantik für Flächen und ausgedehnte Körper bzw. Raumregionen dar, spielen aber für den in der vorliegenden Studie verfolgten Ansatz keine weitere Rolle.

verkennen, was ein *gutes* Herleitungsspiel ganz abgesehen von seiner Vollständigkeit leistet.[18]

(1) Praktischer Nutzen: Gerade bei längeren Formeln und komplizierten mehrdimensionalen Modellen wäre es sehr mühsam, die Allgemeingültigkeit einer Formel immer erst anhand der modelltheoretischen Definitionen zu beweisen. Weiß man, dass sich gewisse Operatoren und Kombinationen von Operatoren z.B. als S5-Operatoren verhalten, so spart ein gutes widerspruchsfreies Herleitungsspiel zur Ermittlung allgemeingültiger Formeln Arbeit, die sich sonst gar nicht bewältigen ließe.

(2) Systematisierung: Ein gutes Herleitungsspiel erlaubt einen Einblick in die Systematik der ansonsten ungeordneten Masse der allgemeingültigen Formeln. Es ist umso besser, je mehr Formeln es systematisiert. Das triviale Herleitungsspiel ist dabei das schlechteste denkbare Beispiel, da es überhaupt keine Systematisierung erreicht. Ein vollständiges Herleitungsspiel dagegen ist, was den *Umfang* der Systematisierung angeht, ein *non plus ultra*. Es kann nur noch in einem *qualitativen* Sinne von einem ebenfalls vollständigen Herleitungsspiel übertroffen werden, das eleganter ist (z.B. weniger Axiome benötigt). Doch auch ein unvollständiges Herleitungsspiel kann eine großes Stück an Systematisierung leisten.

Das Streben nach der systematischen Einbeziehung einer möglichst großen Menge allgemeingültiger Formeln in ein Herleitungsspiel verhindert dabei, dass man sich mit einem trivialen Herleitungsspiel zufrieden gibt. Definiert man als das *Streben nach Vollständigkeit* eines Herleitungsspiels eben deshalb das Streben nach der systematischen Einbeziehung einer *möglichst großen* Menge allgemeingültiger Formeln, weil im Falle der Vollständigkeit der *maximale* Umfang dieser Menge erreicht wäre, so ergibt die Behauptung Sinn, dass Vollständigkeit das Ideal ist, dem man bei der Axiomatisierung nachstrebt, selbst wenn man weiß, dass eine vollständige Axiomatisierung nicht zu erwarten ist.

2.2 Modallogiken für den dreidimensionalen Raum

Nach dem zu Logiken der Ebene Gesagten liegt eine analoge Erweiterung der dort diskutierten Sprachen für dreidimensionale Modelle sehr nahe. Sie stellt weder definitionstechnisch noch intuitiv ein Problem dar. Für die Axiomatisierung von $S5^3$ und $K_{lin}{}^3$ bieten sich naheliegenderweise die folgenden Axiomatiken an:

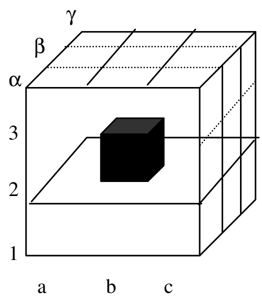
[18] Historisch lässt sich anmerken: Es ist die Systematisierung, die für die Axiomatik Euklids immer Bewunderung hervorgerufen hat, während man an Vollständigkeit die längste Zeit über gar nicht gedacht hat.

- für $S5^3$ eine verdreifachte S5-Axiomatik mit hinzugefügten (com)- und (chr)-Schemata für je verschieden-indizierte Operatoren;
- für K_{lin}^3 eine verdreifachte K_{lin}-Axiomatik mit hinzugefügten (com)- und (chr)-Schemata für je verschieden-indizierte Operatoren.

Zunächst lässt sich festhalten: Beide Axiomatiken sind für Modelle der jeweiligen Sprachen korrekt **[B15]**.[19] Es ist inzwischen aber auch bekannt, dass bereits $S5^3$ durch die angegebene Axiomatik nicht vollständig axiomatisiert wird **[B16]**.[20] Für K_{lin}^3 sieht die Lage ähnlich aus **[B17]**, was nach dem entsprechenden Ergebnis für K_{lin}^2 nicht überrascht.

Es ist zu bemerken, dass K_{lin}^3 weder eine Metrik noch den Begriff einer geraden Linie voraussetzt.[21] Letzteres ist praktisch, da man somit auch eine Teilkomponente der Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie, in der der Begriff der geraden Linie keine Rolle mehr spielen kann, als dreidimensionalen Raum interpretieren kann.

Es ist ferner bemerkenswert, dass K_{lin}^3-Modelle *keine Löcher* zulassen. Aus den (com)-Axiomen sofort herleitbar ist die Formel „$\Diamond_2\Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_2 p$“. Diese Formel wäre aber nicht allgemeingültig, wenn durchlöcherte Modelle zugelassen wären. Sie wird nämlich im folgenden Modell an 2cβ falsch.



Angenommen, allein für 3bβ, den Zentralwürfel der oberen Ebene, sei „p“ wahr. So ist für 3cβ „$\Diamond_1 p$“ wahr. Damit ist für 2cβ „$\Diamond_2\Diamond_1 p$“ wahr. Nun ist mittels R_1 von 2cβ aus allein 2aβ zugänglich, da 2bβ fehlt. Von 2aβ ist aber mittels R_2 nur 3aβ zugänglich. 3aβ ist jedoch kein „p“-Würfel, da allein für 3bβ „p“ wahr ist. Also ist „$\Diamond_1\Diamond_2 p$“ für 2cβ falsch. Damit ist „$\Diamond_2 \Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1 \Diamond_2 p$“ für 2cβ falsch.[22]

---

[19] Vgl. auch MDML, S.378 mit Bezug auf Proposition 3.13 (S.131) ist de facto eine Feststellung der Korrektheit. Zur Notation vgl. MDML, S.223.

[20] Gegenmodell: MDML, Kap. 8.1, S.379f. Allgemeines Argument: MDML, S.380, Theorem 8.2. mit Berufung auf Johnson, “Nonfinitizability of classes of representable polyadic algebras”. Allerdings ist (vgl. ebd.) $S5^3$ rekursiv aufzählbar, vgl. dazu Hirsch / Hodkinson, “Step by Step – building representations in algebraic logic”.

[21] Ihre Bedingungen sind auch diejenigen, die Gauss’sche Koordinaten-Kurven charakterisieren. Diese können im Spezialfall rechtwinklig zueinander stehende gerade Linien sein, müssen es aber nicht. Vgl. Sklar, “Space, Time and Spacetime“ (1974), S.31ff.

[22] Erste Überlegungen zur Axiomatisierung solcher Modelle finden sich bei Agi Kurucz / Michael Zakharyaschev: „A Note on Relativized Products of Modal Logics“, in: P. Balbiani et al. (Hrsg.):

Ist das Postulat der Unzerschlissenheit ein *realistisches* Postulat? Mit „Unzerschlissenheit" ist gemeint, dass der Raum keine Löcher in dem Sinn enthält, das gewisse Orte in ihm einfach fehlen. Zweifellos gehört es zu den vorrelativistischen Intuitionen zum Raum, dass derlei mit Orten im Raum nicht passieren kann. Hat sich diese Intuition schon allein durch die theoretische Möglichkeit so genannter „Schwarzer Löcher" als revisionsbedürftig herausgestellt? Die Frage ist noch nicht im Zusammenhang mit einer dreidimensionalen Raumlogik ohne Berücksichtigung der Zeit zu behandeln. Denn was auch immer Schwarze Löcher sind – sie betreffen die Raumzeit, nicht einfach den Raum. Selbstverständlich ist es keineswegs, dass Schwarze Löcher ausgerechnet in *der* Art Löcher wären, wie die angegebene defiziente Produktstruktur solche aufweist. Ob Raumzeit-Gebiete extremer Massenverteilung noch vom Anwendungsbereich einer Produktlogik erfasst werden können, ist freilich eine ernst zu nehmende Frage.

2.3 Modallogiken für die klassische Raumzeit

2.3.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll die Möglichkeit diskutiert werden, multidimensionale Logiken zur Darstellung der klassischen Raumzeit zu nutzen. Mit klassischer Raumzeit ist das raum-zeitliche Kontinuum gemeint, wie es sich noch ohne Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie darstellt. Am Gedanken, Raum und Zeit zusammengefasst als Raumzeit zu betrachten, ist ja noch nichts spezifisch Relativistisches, wenn auch die konsequente Durchführung dieses Gedankens erst durch die spezielle Relativitätstheorie propagiert wurde. Modallogiken für die klassische Raumzeit sollen so eingeführt werden, dass ihre Modelle später als *Bausteine* für Modelle der relativistischen Raumzeitlogik verwendet werden können, kurz gesagt: als Beschreibungen der Raumzeit mit Bezug auf *ein*, im klassischen Fall noch absolut gesetztes, Koordinatensystem.

Im Folgenden soll zunächst kurz diskutiert werden, wie sich vierdimensionale Varianten der im vorangegangenen Kapitel diskutierten Produktlogiken als klassische Raumzeitlogiken deuten ließen. Im weiteren Verlauf sollen diese Logiken, der besseren Handhabbarkeit wegen, aber auch zur Kontrastierung von Raum und Zeit, zu zweidimensionalen Sprachen reduziert werden. In ihnen wird bewusst auf die feinkörnige Darstellung von drei Raumdimensionen verzichtet, und es werden monomodale Raumlogiken, wie sie aus Kap. I 1.3.3 bekannt sind, mit den aus Kap. I 1.3.2 bekannten linearen Zeitlogiken kombiniert. In der philosophischen Deutung wird

---

Advances in Modal Logic 4, London: King's College Publications 2003, S.221-242. Zugänglich unter http://www.aiml.net/volumes/volume4.

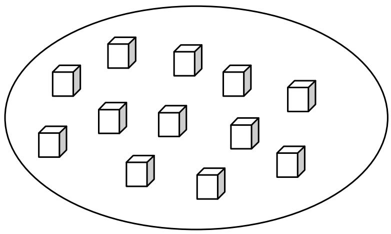
der Schwerpunkt zunächst darauf liegen, einige übertragbare Ergebnisse der in Kap. I 2.1 diskutierten zweidimensionalen Logiken neu zu interpretieren.

2.3.2 K_{lin}^4 und $S5^4$ als Raumzeitlogiken – events

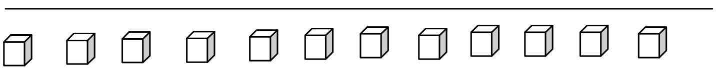
2.3.2.1 $S5^4$-Modelle und K_{lin}^4-Modelle

Die Erweiterung der in Kap. I 2.2 diskutierten dreidimensionalen Logiken um eine vierte Dimension und deren Deutung als Zeitdimension bei Deutung der anderen drei Dimensionen als Raumdimensionen liegt intuitiv außerordentlich nahe und ist technisch nicht weiter schwierig zu bewerkstelligen. Natürlich sieht man einer Modellbeschreibung ohne Deutung nicht an, *welche* Dimension als Zeitdimension zu deuten ist. Aber das deckt nicht den Schluss darauf, dass zwischen räumlichen Dimensionen und Zeitdimension kein Unterschied besteht, höchstens, dass man ihn mit dieser Art der Beschreibung nicht einfangen kann, sondern in der Deutung hinzusetzen muss.

Man kann sich $S5^4$-Modelle als untereinander durch eine S5-Relation geordnete S5-Momentanräume vorstellen:



Auch die Erweiterung des dreifachen zum vierfachen K_{lin}-Produkt mit verschiedenen Modellvarianten ist offensichtlich. K_{lin}^4 besitzt acht Grundoperatoren. Sofort lässt sich wieder festhalten, dass alle Konkretisierungen der (com)- und (chr)-Formeln auf der Grundebene mit beliebigen *voneinander verschiedenen* Indizes (nunmehr aus {1, 2, 3, 4}) K_{lin}^4-allgemeingültig sind. Man kann sich K_{lin}^4-Modelle als untereinander durch das Zusammenspiel von zwei K_{lin}^4-Relationen geordnete K_{lin}^3-Momentanräume vorstellen:



Es lässt sich aus analogen Gründen zu den dreidimensionalen Fällen festhalten, dass die nahe liegenden Axiomatiken, nunmehr mit Indizes aus {1, 2, 3, 4}, auch für die vierdimensionalen Produkte jeweils zwar korrekt, aber unvollständig sind.

2.3.2.2 Die Deutung von K_{lin}^4

$S5^4$ ist nicht sehr ausdrucksstark, was sich ganz besonders für denjenigen Operator bemerkbar macht, den man als Zeitoperator deutet. Er erhält ja nicht mehr als die recht undifferenzierte Deutung „immer", der entsprechende Diamant die Deutung „irgendwann". Es bietet sich daher an, die Deutung sofort anhand von K_{lin}^4 zu diskutieren.

Interessanterweise verläuft die Deutung in zwei voneinander unabhängigen Stufen. Zunächst entscheidet man, welche sechs der acht Operatoren und ihnen zu Grunde liegenden Zugänglichkeitsrelationen man räumlich deutet und welche zwei zeitlich. Bei den Zeitoperatoren steht dann die Entscheidung an, welchen man als welche Zeitrichtung (zukünftig / vergangen) deutet. *Völlig getrennt davon* steht dann die perspektivische Deutung der Raumoperatoren (links / rechts, kopfwärts / fußwärts, vorne / hinten) an. Man kann eine gegebene Deutung der Zeitoperatoren ganz frei mit einer beliebigen der vierundzwanzig realistischen Deutungen der Raumoperatoren kombinieren. Es ist bemerkenswert, dass diese Freiheit nicht eingeschränkt wird, wenn das einzige Koordinatensystem eines K_{lin}^4–Modells zu einem Koordinatensystem unter vielen in der relativistischen Betrachtung wird. An dieser Stelle unterscheiden sich Raum- und Zeitkoordinaten einfach spürbar voneinander: Raumkoordinaten sind und bleiben diejenigen Koordinaten, die man mit perspektivischer Freiheit deuten kann.

Dass vierdimensionale Produktmodelle ebenso wie dreidimensionale nicht nur unzerschlissen, sondern auch verinselungsfrei sind, schließt in der Deutung nicht die Existenz von Paralleluniversen als logischer Möglichkeit aus, sondern besagt nur, dass man nie zwei davon auf einmal in den Blick bekommt.

Beachtung verdient, dass nun der Verwendung von Produktmodellen und von reduktiven Partitionsmodellen verschiedene ontologische Verpflichtungen zu Grunde liegen können: Traditionellerweise mag jemand davon ausgehen, dass Ereignisse *an* Raumstellen *zu* Zeitstellen stattfinden, wobei Raumstellen und Zeitstellen zu verschiedenen, eigenständigen Sorten von Entitäten gehören. Produktmodelle zwingen ihn nicht dazu, beides zu verschmelzen. Die gegebene Darstellung von Momentanräumen zu Zeitpunkten vermeidet sogar die (ohnehin unanschauliche) Idee einer vierten Schnittebene, die zu derselben ontologischen Kategorie gehört wie die räumlichen Schnittebenen. Wer Partitionsmodelle befürwortet, *mag* die darin vorkommenden Bewertungskontexte mit Koordinaten-Quadrupeln aus drei einen Raumpunkt angebenden Koordinaten und einer einen Zeitpunkt angebenden Kooordinate identifizieren. Aber eigentlich legt der Gebrauch von Partitionsmodellen - mit bloß *einer* Kontextmenge - eine andere Ontologie nahe: Die Elemente der Kontextmenge sind (lediglich in vier Koordinaten *eingebundene*) primitive Entitäten, eine bisher noch nicht angesprochene Sorte von Wahrheitsgelegenheiten in eigenem Recht. Für diese Wahrheitsgelegenheiten hat sich seit Minkowskis berühmtem Vortrag „Raum und Zeit" von 1908 der englische Name **event** eingebürgert, den

Lawrence Sklar auf vernünftige Weise als „definite location in spacetime" präzisiert.[23] I.F. wird von ihnen auch als Raumzeitpunkten die Rede sein. Die Definition von reduktiven Partitionsmodellen ermöglicht also eine *eventisierte* Raumzeitlogik. Was das wiederum für den Status von Orten und Zeiten mit sich bringt, wird unten am einfacheren Fall der zweidimensionalen Raumzeitlogiken zu diskutieren sein. Nur ist schon hier nochmals zu betonen, dass der Begriff des events und der vierdimensionalen Raumzeit an sich die Relativitätstheorie nicht voraussetzt.

Dass die nahe liegende Axiomatik für K_{lin}^4 trotz ihrer Unvollständigkeit sehr leistungsfähig ist, lässt sich an Folgendem sehen: Für K_{lin}^4 lassen sich, wie überhaupt für K_{lin}^n, „grobkörnige" reflexive Operatoren mit der Deutung „Es ist überall auf der i-Achse der Fall, dass" einführen, indem man $\ulcorner \boxminus^r_i\alpha \urcorner$ als $\ulcorner \Box_i\alpha \wedge \alpha \wedge \boxdot_i \alpha \urcorner$ abkürzt. Es lässt sich zeigen, dass es sich bei ihnen um S5-Operatoren handelt und dass jede Konkretisierung von $\ulcorner \boxminus^r_i \boxminus^r_k \boxminus^r_j \urcorner$ mit verschiedenen i, k, j wieder ein S5-Operator ist **[B18]**.

Da man bei der Deutung deutlich zwischen räumlichen und zeitlichen Operatoren unterscheidet, fällt auf, dass mit drei der vier möglichen Konkretisierungen intuitiv nichts Rechtes anzufangen ist. Es sind diejenigen Kombinationen, bei denen Operatoren, bei denen man sich für die räumliche Deutung entschieden hat, mit dem Operator kombiniert werden, den man zeitlich deutet. Die Kombination der drei als Raumoperatoren gedeuteten Operatoren dagegen hat die ganz natürliche Lesart „überall". Es bietet sich an, *diesen* S5-Operator wieder als „E" zu notieren und seine Diamant-Variante, die mit der Kombination der drei räumlich gedeuteten Varianten äquivalent ist, als „S", den übrig bleibenden zeitlich gedeuteten Operator wieder als „O" (für „omnitemporal") und seinen Diamanten mit „T" (für „temporal"). Mit „p" als „Es geschieht etwas Böses" kann man jetzt z.B. die hübsche Liedzeile „Das Böse ist immer und überall" als „OEp" notieren.

Es fällt auf, dass für „S", „T", „O" und „E" die (com-) und (chr-)Gesetze gelten, obwohl die räumlichen Operatoren definitorisch komplexer sind als die zeitlichen **[B19]**. Außerdem gelten die (com)- und (chr)-Gesetze für die Operatoren auf der Grundebene, die man, zeitlich gedeutet, wieder als „F", „G", „P" und „H" notieren wird, einerseits und „S" und „E" andererseits **[B20]**. Dies legt den folgenden Gedanken nahe: Ist einem nicht an der Darstellung der Feinstruktur des Raumes gelegen, so kann man eine Raumzeitlogik benutzen, in der "S" und "E" wieder *primitive* S5-Operatoren sind. Ist obendrein die Feinstruktur der Zeit unwichtig, so kann man auch „T" und „O" als primitive S5-Operatoren einsetzen. Die Logiken, mit denen man dann arbeitet, sind durch die eben geführten Beweise als echte Grobeinstellungen von K_{lin}^4 nachgewiesen, und umgekehrt mag man K_{lin}^4 als eine Verfeinerung von ihnen ansehen.

[23] Sklar, „Space, Time and Spacetime" (1974), S.56f.

2.3.3 $S5^2$ und $S5\times K_{lin}$ als Logiken für die klassische Raumzeit

2.3.3.1 Technische Beschreibung

Die erwähnten Grobeinstellungen sind selbst nichts anderes als zweidimensionale Produktlogiken, nämlich $S5^2$ und $S5\times K_{lin}$. Der Nachteil von $S5^2$ ist die geringe Ausdruckskraft bezüglich der temporalen Dimension. Es bietet sich für die Betrachtung von Logiken für die klassische Raumzeit an, einen genaueren Blick nur auf $S5\times K_{lin}$ zu werfen.

$S5\times K_{lin}$ ist als Produktlogik unproblematisch: Ebenso wie man verschiedene Zahlen miteinander multiplizieren kann, kann man auch das Produkt zweier *verschiedener* Modallogiken bilden, auch wenn wir bisher nur Produkte von gleichen Logiken betrachtet haben. Das Alphabet von $S5\times K_{lin}$ hat die Grundoperatoren „E", „G", „H"; und „S", „F" und „P" sind als ihre jeweiligen „Diamanten" definiert. Sie sind mit den üblichen Formregeln eingeführt. Ein Produkt-Modell für $S5\times K_{lin}$ („**Weltblatt**") hat die für ein zweidimensionale Produktlogik inzwischen selbstverständliche Form $\langle W_1, R_1, W_2, R_2, V\rangle$.

Dabei sind W_1 und W_2 nichtleere, disjunkte Mengen (von Bewertungskontexten). R_1 ist eine Äquivalenzrelation auf W_1, und zwar soll es sich um die *universelle* Relation auf W_1 handeln. R_2 ist eine asymmetrische, transitive und stark lineare Relation auf W_2. V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Paar aus $W_1\times W_2$ genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei die Werte für die atomaren Formeln beliebig sind, aber ansonsten gilt:

(i) $V(\sim\alpha,\langle s, t\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle s, t\rangle)=0$
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle s, t\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle s, t\rangle)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,\langle s, t\rangle)=1$
(iii) $V(\mathsf{E}\alpha, \langle s, t\rangle)=1$ gdw für alle $\langle s', t\rangle$ aus $W_1\times W_2$ gilt:
wenn s R_1 s', dann $V(\alpha,\langle s', t\rangle)=1$
(iv) $V(\mathsf{G}\alpha, \langle s, t\rangle)=1$ gdw für alle $\langle s, t'\rangle$ aus $W_1\times W_2$ gilt:
wenn t R_2 t', dann $V(\alpha,\langle s, t'\rangle)=1$
(v) $V(\mathsf{H}\alpha, \langle s, t\rangle)=1$ gdw für alle $\langle s, t'\rangle$ aus $W_1\times W_2$ gilt:
wenn t' R_2 t, dann $V(\alpha,\langle s, t'\rangle)=1$.

Neben den Formeln, die allgemeingültig sind, weil „E" ein S5-Operator ist und weil „G" und „H" K_{lin}-Operatoren sind, sind auch die (com)- und (chr)-Gesetze allgemeingültig, also

(com) $\mathsf{FS}p \equiv \mathsf{SF}p$, $\mathsf{PS}p \equiv \mathsf{SP}p$,
(chr) $\mathsf{FE}p \rightarrow \mathsf{EF}p$, $\mathsf{PE}p \rightarrow \mathsf{EP}p$, $\mathsf{S\,G}p \rightarrow \mathsf{GS}\,p$, $\mathsf{SH}p \rightarrow \mathsf{HS}p$.

Eine nach dem in Kap. I 2.1 Ausgeführten unproblematischerweise korrekte und leistungsfähige Axiomatik für $S5\times K_{lin}$ besteht aus folgenden Komponenten:

1. einer S5-Axiomatik für „E“ und „S“
2. einer K_{lin}-Axiomatik für „H“ und „G“
3. (chr-FE) $\ulcorner FE\,\alpha \rightarrow EF\alpha \urcorner$ (chr-PE) $\ulcorner PE\,\alpha \rightarrow EP\alpha \urcorner$.

Dazu läst sich festhalten:

- Aus den (chr)-Axiomen sind sofort auch (chr-SG) $\ulcorner SG\alpha \rightarrow GS\alpha \urcorner$ und (chr-SH) $\ulcorner SH\alpha \rightarrow HS\alpha \urcorner$ herleitbar.
- Ziemlich überraschend ist, dass nunmehr die (com)-Gesetze (com-FS) $\ulcorner FS\,\alpha \equiv SF\alpha \urcorner$, (com-PS) $\ulcorner PS\,\alpha \equiv SP\alpha \urcorner$ herleitbar sind und deswegen nicht mehr axiomatisch gefordert werden müssen **[B21]**. Das ist ja nicht allgemein so und liegt im Sonderfall am Zusammenspiel von K_t- und S5-Elementen.[24]
- Unter den weiteren herleitbaren Formeln ist besonders (rom) erwähnenswert, also „$SPSp \rightarrow EPSp$“ bzw. „$SFSp \rightarrow EFSp$“ **[B22]**.
- Anders als bei den dreidimensionalen Logiken spricht nichts prinzipiell dagegen, dass eine Axiomatik für $S5{\times}K_{lin}$ vollständig sein kann. Tatsächlich hat Reynolds 1997 eine vollständige Axiomatik für $S5{\times}K_{lin}$ angegeben, die lediglich insofern über eine Aufsummierung der Axiomatiken für S5 und K_{lin} plus (com)- und (chr)-Gesetze hinausgeht, als sie noch eine Form der so genannten Gabbay’sche Irreflexivitätsregel hinzufügt **[B23]**.

2.3.3.2 Die Deutung von $S5{\times}K_{lin}$

Die intendierte Deutung von Produktmodellen für $S5{\times}K_{lin}$ besteht in Folgendem:

- Die Elemente von W_1 werden als Orte angesehen. Ein verinselter Raum ist nicht darstellbar.
- Die Elemente von W_2 werden als Zeitpunkte angesehen. Das erzwingt nicht die Interpretation der Orte als Raumpunkte, legt dies aber als natürliche Interpretation nahe.
- R_1 wird als „hat einen räumlichen Abstand von oder ist identisch mit“ gedeutet.
- R_2 wird als „früher als“ gedeutet.

Damit erhalten die Operatoren die bekannten Deutungen. Allerdings ist zu beachten, dass die Bewertung einer Formel nun *für einen Ort zu einer Zeit* erfolgt. Die räumlichen Operatoren sind also auf den Bewertungszeitpunkt, die zeitlichen Operatoren auf den Bewertungsort relativiert:

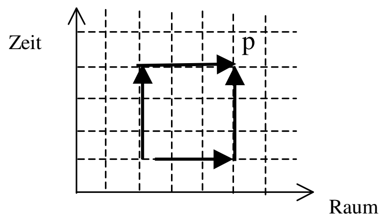
E Es ist ***zur Zeit*** *vor Ort* überall der Fall, dass
S Es ist ***zur Zeit*** *vor Ort* irgendwo der Fall, dass
H Es war *zur Zeit* ***vor Ort*** immer der Fall, dass

[24] Meines Wissens hat dies in anderem Zusammenhang zuerst Stefan Wölfl bemerkt. Vgl. Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.163f.

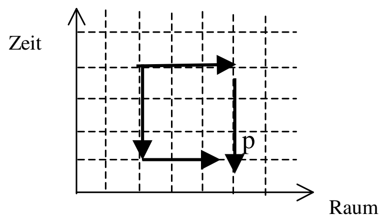
P Es war *zur Zeit* ***vor Ort*** der Fall, dass
G Es wird *zur Zeit* ***vor Ort*** immer der Fall sein, dass
F Es wird *zur Zeit* ***vor Ort*** der Fall sein, dass

Wie die Bewertung von Formeln für einen Ort zu einer Zeit erfolgt, lässt sich besonders gut verdeutlichen, wenn man sich fragt, welche intuitiv plausiblen Aussagen nun den (com)- und (chr)-Gesetzen und (rom) entsprechen. Man kann sich dazu recht natürlich einer zweidimensionalen Darstellungsweise bedienen, die i.F. oft ohne Kommentar weiter eingesetzt werden soll. Allerdings muss man sich klarmachen, dass man hier entweder bewusst von zwei Raumdimensionen absieht und nur eine *Linie* im Raum in ihrer zeitlichen Entwicklung betrachtet (nichts zwingt zu der Annahme, W_1 enthalte die Orte des *ganzen* Raums) oder dass man einfach auf eine *Darstellung* der dreidimensionalen Struktur des Raums verzichtet. Die (com)-Gesetze bedeuten nun:

„FSp ≡ SFp“: Es wird genau dann hier der Fall sein, dass es irgendwo der Fall ist, dass p, wenn es zur Zeit irgendwo der Fall ist, dass es dort der Fall sein wird, dass p.



„PSp ≡ SPp“: Es war genau dann hier der Fall, dass es irgendwo der Fall ist, dass p, wenn es zur Zeit irgendwo der Fall war, dass es dort der Fall ist, dass p.



„FEp → EFp“: Wenn p irgendwann überall der Fall sein wird,
dann ist es schon jetzt überall der Fall,
dass dort [⇐ überall] irgendwann p der Fall sein wird.

„PEp → EPp“: Wenn p irgendwann überall der Fall war,
dann ist es auch jetzt noch überall der Fall, dass dort p der Fall war.

„$\mathsf{SG}p \rightarrow \mathsf{GS}\,p$“: Wenn p von jetzt ab irgendwo immer der Fall sein wird, dann wird es hier immer so sein, dass dann irgendwo p der Fall ist.

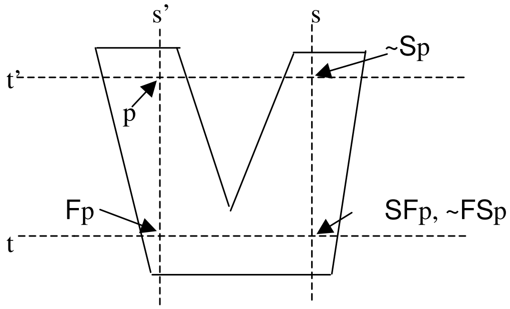
„$\mathsf{SH}p \rightarrow \mathsf{HS}\,p$“: Wenn p irgendwo bis jetzt immer der Fall war, dann war es hier schon immer so, dass dann irgendwo p der Fall war.

„$\mathsf{SFS}p \rightarrow \mathsf{EFS}p$“: Wenn es auch nur irgendwo so ist, dass p irgendwo der Fall sein wird, dann ist es *überall* so.

Bemerkenswert ist auch, wie in der Deutung plausibel wird, warum die „falschen (chr)-Gesetze“ eben keine Gesetze sind. „$\mathsf{EP}p \rightarrow \mathsf{PE}p$“ ist z.B. kein Gesetz, weil es zwar überall (auf der Erde) der Fall ist, dass dort irgendwann einmal Nacht war, es aber nie der Fall war, dass dies überall zugleich der Fall war. Und „$\mathsf{HS}p \rightarrow \mathsf{SH}\,p$“ ist z.B. kein Gesetz, weil (in halbwegs überschaubarer Zeit) die Erde zwar immer irgendwo gewesen sein mag, aber es deshalb noch lange nicht einen einzigen Ort gibt, an dem sie immer war, wenn sie sich um die Sonne bewegt. Man könnte „$\mathsf{HS}p \rightarrow \mathsf{SH}p$“ gerade als die Formel erklären, die, wäre sie ein Gesetz, Bewegung unmöglich machen würde, und sie die **Parmenides-Formel** nennen. Zum Glück für die raumzeitliche Deutung von $S5\times K_{lin}$ ist sie ebensowenig $S5\times K_{lin}$-allgemeingültig wie der ganz parallel gebaute und wohlbekannte Quantoren-Shift-Fehlschluss („Wenn es für jede Finalkette ein Endziel gibt, dann gibt es *ein* Endziel für alle Finalketten“) prädikatenlogisch allgemeingültig ist.

2.3.3.3 Die Unzerschlissenheit der Raumzeit

Man sieht, dass durch das (com)-Gesetz „$\mathsf{FS}p \equiv \mathsf{SF}p$“ behauptet wird (Konditional von links nach rechts): Wenn ich durch Abwarten an demselben Ort in die Situation kommen kann, dass *dann* im Irgendwo dieses Ortes p der Fall ist, so gibt es im Irgendwo des jetztigen Ortes einen Ort, an dem man lediglich abwarten müsste, um in eine p-Situation zu kommen. Und (in der Richtung „$\mathsf{SF}p \rightarrow \mathsf{FS}p$“): Wenn es im Irgendwo des jetztigen Ortes einen Ort gibt, an dem man lediglich abwarten müsste, um in eine p-Situation zu kommen, so kann ich auch gefahrlos da abwarten, wo ich bin, und werde mich doch irgendwann im Irgendwo eines p-Ortes befinden. Ist das unplausibel, so gibt es keine realistische Deutung von $S5\times K_{lin}$ als Raumzeitlogik. Tatsächlich erzwingt also die ernsthafte Verwendung $S5\times K_{lin}$ als Raumzeitlogik die nichttriviale These, dass die Raumzeit unzerschlissen ist. Ein Ort, der jetzt zu meinem Irgendwo gehört, kann sich dann nie aus ihm verabschieden, und zu einem Ort, zu dem ich jetzt einen Abstand habe, werde ich immer einen haben. Die Raumzeit wird also nicht die Form einer an der Wäscheleine aufgehängten Jeans haben, so dass an Ort s zu Zeit t ein Ort s’ zugänglich ist, an dem später, zu t’, p der Fall ist, s’ aber zu t’ nicht mehr im Irgendwo von s liegt:



Dass mit ähnlichen Diagrammen veranschaulichte Strukturen in der Kosmologie als „**trousers-worlds**“[25] ernsthaft diskutiert werden, deutet darauf hin, dass die Behauptung, eine Produktlogik liefere realistische Modelle, im Hinblick auf ihren Anwendungsbereich alles andere als trivial ist. Es ist aber immer zu beachten, wie die Elemente eines Diagramms zu interpretieren sind. Bei der Darstellung einer Hosenwelt wird ein Hosenbein eigentlich ein Bündel von Weltlinien oder möglichen Lichtwegen darstellen. Es ist aber nicht gesagt, dass es völlig unmöglich ist, zwei events auf verschiedenen Hosenbeinen zu koordinieren. Immerhin ist auch im Beispiel von beiden *zu t'* die Rede. Genügt dies, um ihnen gegenseitige Zugänglichkeit zuzuschreiben, so ist das Beispiel nicht wirklich ein Problem. In dieser Richtung werden in Teil III weitere Überlegungen anzustellen sein.

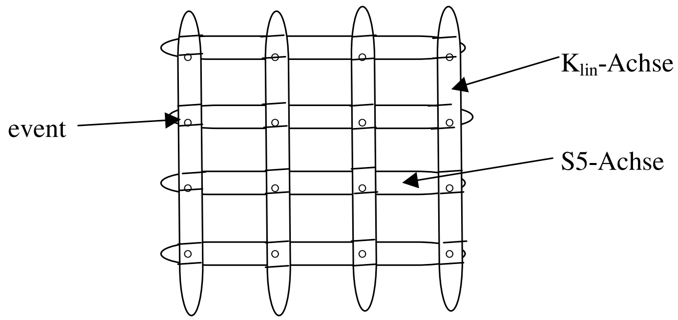
2.3.3.4 Orte, Zeitpunkte, Koordinaten

Für $S5{\times}K_{lin}$ lassen sich wiederum leicht reduktive Modelle definieren. Die erste Frage, die sich für die raumzeitliche Deutung dieser Modelle stellt, ist, worum es sich bei den Elementen der Kontextmenge handeln soll. Die Antwort liegt nach dem zu $K_{lin}{}^4$ Gesagten auf der Hand: events. Partitionsmodelle sind, kurz gesagt, die *eventisierten* Versionen von Produktmodellen, die mit primitiven Orten und Zeiten arbeiten. Wer von Orten und Zeiten als voneinander unabhängigen Entitäten ausgeht, wird also kaum einen Anlass sehen, $S5{\times}K_{lin}$ mit Partitionsmodellen als Raumzeitlogik zu verwenden. Doch auch jemand, der die Annahme von events befürwortet, mag die Verwendung des *reduktiven* Partitionsmodells für wenig sinnvoll halten. Dort werden Formeln ja *nur* noch für events bewertet, das Ziel war aber doch eine Kombination von *Raum*logik und *Zeit*logik. Man wollte die Rede über Orte und Zeiten ja nicht abschaffen, sondern bloß kombinieren!

[25] Vgl. Sklar, „Space, Time and Spacetime“ (1974), S.306f, und Müller, „Arthur Priors Zeitlogik“ (2002), S.257, Fußnote 243.

Dieser Gedanke legt die Verwendung von *hybriden* Partitionsmodellen nahe. Das Partitions*modell* beruht auf einer Partitions*struktur*, die man sich im Prinzip wie folgt vorstellen muss:

- Die Menge aller events ist einerseits komplett in Klassen von maximalem Umfang „verpackt“, für die gilt: Beliebige events e, e‘ aus einer solchen Klasse stehen in einer Äquivalenz-Relation R_1 zueinander. Diese Klassen sind S5-Achsen (nach der Definition in [B9] zu Kap. I 2.1). Dabei ist das Wort „Achse“ zur Veranschaulichung hilfreich, aber nicht zu wörtlich zu nehmen.
- Die Menge aller events ist andererseits komplett in Klassen von maximalem Umfang „verpackt“, so dass für beliebige events e, e‘ aus einer solchen Klasse gilt: Entweder steht e in einer Relation R_2 zu e‘, oder umgekehrt, oder e und E‘ sind identisch. Dabei ist R_2 asymmetrisch, transitiv und schwach linear ist. Diese Klassen sind K_{lin}-Achsen (d.h. maximale Teimengen von W, für die gilt: xRy oder yRx oder x=y).
- Die Schnittmenge einer Klasse aus dem ersten „Paket“ (über R_1) mit einer Klasse aus dem zweiten „Paket“ (über R_2) enthält immer nur genau *ein* event.



Für die raumzeitliche Deutung ist die Frage entscheidend, worum es sich bei den S5-Achsen und den K_{lin}-Achsen eigentlich handeln soll. Drei Antworten liegen auf der Hand. Die erste lautet:

<u>1. Antwort</u>
S5-Achsen sind als Zeitpunkte zu deuten.
K_{lin}-Achsen sind als Orte zu deuten.

Indem bei hybriden Partitionsmodellen Aussagen für geordnete Paare aus Achsen der zwei verschiedenen Sorten bewertet werden, werden sie demnach für einen Ort zu einer Zeit bewertet. Ebenso offensichtlich ist:

<u>2. Antwort</u>
S5-Achsen sind als Momentanräume zu deuten
K_{lin}-Achsen sind als Ortsgeschichten zu deuten

3. Antwort
S5-Achsen sind als maximale Mengen gleichzeitiger events zu deuten.
K_{lin}-Achsen sind als maximale Mengen gleichortiger events zu deuten.

Eins, zwei und drei zusammenzählen heißt hier nichts anderes als feststellen: Wer die Annahme von events befürwortet, für den sind Zeiten und Orte keine primitiven, sondern komplexe Entitäten, die sich analysieren und definieren lassen. Ein Ort ist eigentlich eine Ortsgeschichte durch die Zeit hindurch, und das ist nichts anderes als die Menge aller gleichortigen events. Ein Zeitpunkt ist eigentlich ein Momentanraum und ist damit nichts anderes als die Menge aller gleichzeitigen events. Dieser Gedanke wird wiederum zwar erst von der Relativitätstheorie nahegelegt, ist aber noch lange nicht selbst relativistisch, was man daran sieht, dass von Gleichzeitigkeit ohne Relativierung auf ein Bezugssystem und von *der* Zeit die Rede ist. Für eine erste Stufe der Raumzeitlogik ist er auch deshalb schon interessant, weil er den Begriff des Ortes und der Zeitstelle präzisiert und außerdem eine Klärung des Begriffs der **Koordinate** mit sich bringt. Eine Achse in einer S5×K_{lin}-Struktur ist in dem ganz wörtlichen Sinn eine Koordinate, als durch sie Mengen von events als gleichzeitige oder gleichortige *koordiniert* werden. Eine S5×K_{lin}-artige Partitionierung, wie sie beschrieben wurde, ist somit in der Deutung von S5×K_{lin} nichts anderes als ein **raumzeitliches Koordinatensystem**, bei dem von der räumlichen Feinstruktur abgesehen wird. Es ist dabei bemerkenswert:

- Dieselbe Event-Menge erlaubt ganz unterschiedliche Partitionierungen, und es können ganz verschiedene Partitionierungen auf ihr definiert werden.
- Die Interpretationsfunktion eines Modells, die wiedergibt, was für Zustände an einer „event location" bestehen, ist von der konkreten S5×K_{lin}-artigen Partitionierung dieses Modells ganz unabhängig.

Der in Richtung der Relativitätstheorie weisende Gedanke an *verschiedene* mögliche Partitionierungen der Raumzeit liegt damit schon recht nahe. Bevor er eine Rolle spielt, soll aber in Teil II die Spatialisierung von tempo-modalen Verzweigungen der Einfachheit halber zunächst unter *klassischen* Voraussetzungen betrachtet werden.

TEIL II

TEMPO-MODALES KONTINUUM UND ALTERNATIVEN IN DER KLASSISCHEN RAUMZEIT

What you were is forever who you are.

But the future cannot be preserved in a jar; one jar must remain empty...

KAPITEL 1

Die zukünftige Seeschlacht

1.1 Einleitung

Man kann die Ausarbeitung der verschiedenen Ansätze zum Problem der *contingentia futura* als eine *der* Erfolgsgeschichten der formalen Logik ansehen. Innerhalb weniger Jahrzehnte ist es in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts gelungen, ein seit der Antike diskutiertes philosophisches Problem mit existenziellen Implikationen, das zuvor ebenso schwer exakt zu formulieren wie auch nur ansatzweise zu lösen war, mit Hilfe der Mittel der formalen Logik in einer Fülle von möglichen Varianten genauestens nachzuspielen und mögliche Lösungen in zuvor nicht möglicher Eindeutigkeit zu formulieren. Der Durchbruch gelang dabei Arthur Prior mit der Idee, Operatoren der Modallogik als Tempusoperatoren zu deuten (vgl. Kap. I 1.3.2). Alle in der Folgezeit entstandenen Ansätze bauen auf dieser Idee auf. Zwei der wichtigsten Ansätze stammen wiederum von Prior selbst, nämlich der so genannte ockhamistische und der so genannte Peirceanische Ansatz. Die formale Darstellung geschieht entweder im Ausgang von den in Kap. I 1.3.2 bereits vorgestellten verzweigten K_b-Strukturen oder aber im Rahmen der kombinierten Zeit- und Modallogik (**KTM**). Die rein zeitlogischen Ansätze sind in der Regel früher entstanden.

Seit Mitte der 80er Jahre des 20. Jahrhunderts haben KTMs besonders starke Beachtung erfahren. Bei ihnen werden Zeitstellen und mögliche Welten als zwei Kontextmengen einer multidimensionalen Logik auseinandergehalten. Eine Formel wird jeweils relativ auf ein Paar aus Zeitstelle und möglicher Welt bewertet. Eine besonders gut erforschte KTM ist die Sprache, die Franz von Kutscheras Aufsatz „T×W-completeness“ von 1997 untersucht und die i.F. T×W genannt werden soll.[1]

Es empfiehlt sich, die Debatte von ihrem neuesten Stand her darzustellen. Zentrale Texte, auf die i.F. einzugehen sein wird, sind daher die 1994 entstandene, sowohl für die Systematisierung bisheriger Ansätze wertvolle als auch mit einem eigenen Ansatz höchst kreative Dissertation „Indeterministische Zeitlogik“ von Kimio Harada sowie die zwischen 1986 und 1997 entstandenen Arbeiten Franz von Kutscheras zur KTM. Dabei ist folgendes Verfahren zweckmäßig:

1. Zunächst wird Kutscheras Modellbildung diskutiert. Dabei werden KTM-Modelle als inzwischen schon alte Bekannte aus Teil II erscheinen, nämlich als Produktmodelle.

[1] Kutschera, „T×W-completeness“ (1997), dieselbe Benennung auch in Thomason, „Combinations of Tense and Modality“ (1984).

2. Es soll dann eine Sprache definiert werden, die von Kutscheras Vorschlag nur insofern geringfügig abweicht, als dafür die **Historizität** der Zugänglichkeitsrelation zwischen Weltverläufen zu Zeitpunkten explizit gefordert wird:

    Weltverläufe sollen zu t nur dann Alternativen zueinander sein,
    wenn sie bis zu einschließlich t identisch sind.

Diese Sprache soll **lingua franca** (**LF**) heißen. Denn es wird sich zeigen, dass sich alle bisher verfolgten Lösungsansätze in ihr als gemeinsamem Rahmen darstellen und vergleichen lassen.[2] Das wird ausführlich geschehen. Es wird dargestellt,

- wie die Vertreter der verschiedenen Positionen über die zukünftige Seeschlacht sprechen;
- wie sie jeweils auf unterschiedliche Weise dasselbe, recht starke Argument eines Deterministen zurückweisen;
- wieso eine der Positionen, der so genannte Ockhamismus, philosophisch unhaltbar ist;
- wieso die haltbaren Positionen allesamt Varianten der These von der Unabgeschlossenheit der Weltgeschichte sind, die Kimio Harada „Hemiaktualismus“ genannt hat;
- wieso die von Thomason vertretene und die so genannte Peirceanische Position sich letztlich in ihrer Interpretation der Korrespondenztheorie der Wahrheit unterscheiden.[3]

Terminologisch ist es wichtig, den Begriff „Ockhamismus“ richtig zu verstehen: Ein routinierter Zeitlogiker, der einen Blick auf die Definition von LF wirft, wird sie als Erweiterung von Kutscheras KTM erkennen und als erste Reaktion etwas sagen wie „Ja, das ist eine typische ockhamistische Logik“. Er wird dabei das Wort „ockhamistisch“ zur Beschreibung ihres technischen Aufbaus und wegen bestimmter

---

[2] Einen ähnlichen Ansatz, freilich mit rein technischer Motivation, verfolgt in den letzten Jahren auch Alberto Zanardo (z.T. zusammen mit mit Valentin Goranko). Der neueste Stand findet sich in ihrem papier „From linear to branching-time temporal logics: transfer of semantics and definability“. Es findet sich in vorläufiger Version auf Zanardos Homepage unter http://www.math.unipd.it/~azanardo/#papers. Dort finden sich auch Hinweise auf weitere Arbeiten Zanardos.

[3] Zur historischen Motivation der Namen vgl. PPF Kap. 7, S.121f, S.132. Ockhamistische und peirceanische Ansicht gehen im Kern auf PPF, Kap.7, zurück. Eine der peirceanischen Ansicht entsprechende Logik ist von Burgess, „Decidability for Branching Time” (1980), “The Unreal Future” (1978) eingehender untersucht worden, und der ockhamistische Ansatz kann als Vorfahre des in der Kombinierten Zeit- und Modallogik (Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), Kutschera, „TxW-completeness“ (1997), „Zwei modallogische Argumente...“ (1986), „Bewirken“ (1986), GAMUT, „Language, Truth and Meaning“, Bd.2, Kap.1, Thomason, „Combinations of Tense and Modality“ (1984)) üblichen Ansatzes gelten. Der thomasonianische Ansatz ist eine in Thomason, „Indeterminist Time and Truth-Value Gaps” (1970) vorgeschlagene Anwendung der zuerst in van Fraassen, „Singular Terms, Truth-Value Gaps and Free Logic“ (1966) entwickelten Supervaluationstechnik.

allgemeingültiger Formeln verwenden. So soll dieses Wort hier *nicht* verwendet werden. Vielmehr soll das Wort „ockhamistisch" für eine bestimmte *Deutung* von LF verwendet werden. Diese Deutung hat zwar die Entwicklung von Sprachen dieses Aufbaus *angeregt*. Tatsächlich aber ist ihr Aufbau unabhängig von der Deutung. LF kann deshalb hier als Basis dienen, obwohl die ockhamistische Deutung dieser Sprache abzulehnen ist.

1.2 Kutscheras Kombination aus temporaler und modaler Logik T×W

In KTMs sind tempo-modale Positionen keine Primitiva, sondern Schnittstellen je einer Zeitstelle mit einem möglichen Weltverlauf bzw. ein möglicher Weltverlauf *zu* einer Zeit oder, formal ausgedrückt: geordnete Paare aus möglichem Weltverlauf und Zeitstelle. Der formale Apparat einer KTM ist üblicherweise neutral gegenüber der Frage, als was man mögliche Weltverläufe ansieht. Doch lassen sich Weltverläufe in KTMs unproblematisch im folgenden Sinn interpretieren: Mögliche Weltverläufe lassen sich repräsentieren durch Weltbeschreibungen in Gestalt von (nunmehr mit Zeit-Parameter versehenen) Interpretationsfunktionen der *atomaren* Formeln einer aussagenlogischen Sprache.[4]

Eine der gebräuchlichsten KTMs ist Kutscheras Sprache TxW. Das Alphabet von TxW enthält das übliche aussagenlogische Vokabular und als Modaloperatoren die Zeichen „H", „G", „N" und „□". Die Formregeln sind die üblichen. Eine TxW-Struktur sieht fast genauso aus, wie es für Strukturen von Produktmodellen typisch wäre. Man kann es nämlich als Tupel der Form $\langle W_1, <, W_2, A_2, A_t \rangle$ definieren.[5] Dabei sind W_1 und W_2 nichtleere Mengen (von Kontexten), deren Elemente der besseren Unterscheidbarkeit wegen mit "t" bzw. "h" notiert werden. W_1 wird als Menge von Zeitstellen gedeutet und daher aus mnemotechnischen Gründen „T" genannt, W_2 einfach „W", was an „Weltverlauf" erinnern mag und woraus sich auch der Name „T×W" erklärt. < ist eine asymmetrische, transitive und stark lineare Zugänglichkeitsrelation auf W_1. A_2 und A_t sind Zugänglichkeitsrelationen auf W_2. Und zwar ist A_2 einfach die universelle Relation auf W_2; A_t, der einzige Zusatz zu einem gewöhnlichen Produktmodell, ist eine Äquivalenzrelation mit Zeitstellen-Parameter *t*,[6] für die die folgende Einschränkung gilt:

Für alle t, t' (aus T): Wenn $h\ A_t\ h'$ und $t'\ A_1\ t$, dann $h\ A_{t'}\ h'$.

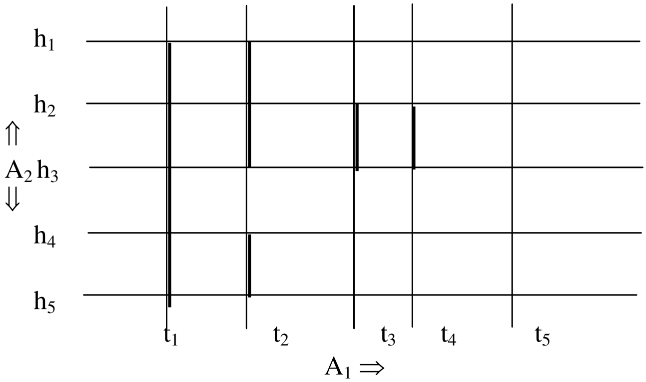
---

4 Vgl. Kap. I 3.1.

5 Bei Kutschera, a.a.O., S.242, fehlt der harmlose explizite Bezug auf A_2, so dass seine Strukturen Quadrupel sind.

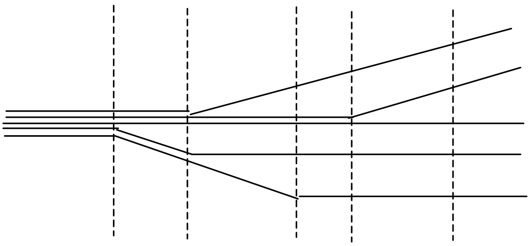
6 Streng genommen handelt es sich dabei um eine ganze Familie von Zugänglichkeitsrelationen zwischen h's aus W_2: für jedes t aus T eine. Man kann auch sagen: Hier handelt es sich um eine Funktion, die Paaren aus Elementen von T (Zeitpunkten) und von W_2 (Alternativen) Mengen von Elementen aus W_2 (Alternativen) zuordnet.

Am besten liest man „h A_t h'" als „h und h' sind *zu t* Alternativen zueinander". Was die typische Einschränkung bedeutet, sieht man, wenn man eine T×W-Struktur als S5×K_{lin}-Strukturen ansieht, in die A_t nachträglich eingeflochten wurde. Zwei mögliche Weltverläufe, die zu t Alternativen zueinander sind, müssen an allen Zeitstellen vor t ebenfalls Alternativen zueinander gewesen sein. Alternativen können sich auseinander entwickeln, aber sie können nicht zusammenfließen, wenn sie einmal getrennt waren.

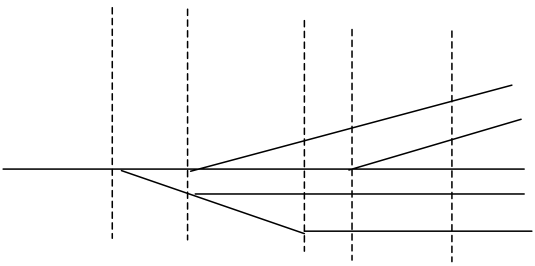


fette Striche: Zugänglichkeits-Brücken via A_t

Man kann die Modelle freilich auch wie Baumkronen darstellen, was üblicher sein dürfte:



Man kann sie auch *so* darstellen, wobei man aber beachten muss, dass der Stamm und dickere Äste nach wie vor eigentlich ganze *Bündel* von Weltverläufen sind:



Ein T×W-Modell ist ein Tupel $\langle T, <, W, A_2, A_t, V\rangle$, so dass gilt:
(1) $\langle T, <, W, A_2, A_t\rangle$ ist eine T×W-Struktur
(2) V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Element von T×W einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei gilt:[7]
(i) $V(\sim\alpha,\langle t,h\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t,h\rangle)=0$
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle t,h\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t,h\rangle)=0$ oder[&] $V(\beta,\langle t,h\rangle)=1$
(iii) $V(\mathsf{G}\alpha,\langle t,h\rangle)=1$ gdw für *alle* t' gilt: wenn t < t', dann $V(\alpha,\langle t',h\rangle)=1$
(iv) $V(\mathsf{H}\alpha,\langle t,h\rangle)=1$ gdw für *alle* t' gilt: wenn t' < t, dann $V(\alpha,\langle t',h\rangle)=1$
(v) $V(\Box\alpha,\langle t,h\rangle)=1$ gdw für jedes h' mit h A_2 h' (d.h.: *jedes* h' aus W) gilt: $V(\alpha,\langle t,h'\rangle)=1$
(vi) $V(N\alpha,\langle t,h\rangle)=1$ gdw für jedes h' mit h A_t h' gilt: $V(\alpha,\langle t,h'\rangle)=1$.

Wie üblich ist „M“ als „~ N ~“ definiert und „F“ als „~ G ~“. „N“ ist ein historischer Notwendigkeitoperator. Von „□“ räumt Kutschera selbst ein, dass er diesen Operator aus rein technischen Gründen, nämlich zwecks vollständiger Axiomatisierbarkeit, eingeführt hat.[8] Allerdings lässt die Diamant-Variante zu diesem Operator eine intuitiv ganz einleuchtende Deutung zu. „◊“ lässt sich nämlich lesen als „Es ist der Fall oder könnte jetzt auch der Fall sein, dass“. Hierbei denkt man an (hinsichtlich der Alternativenmenge) *verinselungsfreie* Modelle. Bei ihnen muss es für zwei beliebige h, h' ein t geben, so dass h und h' an t untereinander zugänglich sind. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass T×W-Modelle nicht unbedingt verinselungsfrei sind. Es können darin mehrere unabhängige Baumstrukturen „übereinander“ vorkommen, so dass je zwei Weltverläufe aus der einen und der anderen Baumstruktur zu keinem Zeitpunkt gegenseitig zugänglich sind.

1.3 Die Sprache LF: T×W mit Historizität und Verinselungsfreiheit

Die übliche Deutung von T×W-Strukturen kennt einen ebenso präzisen wie plausiblen Begriff der Alternative:[9]

[7] Sieht man einen möglichen Weltverlauf h als eine auf Zeitstellen relativierte Bewertungsfunktion für atomare Formeln an, so wird einer atomaren Formel natürlich zu t und h gerade der Wert zugewiesen, den sie *gemäß h* für t hat.

[8] Vgl. Kutschera, “T×W-completeness”, S.247. Den eigentlichen Beweis führt Kutschera mit T×W-Modellen äquivalenten Modellen, in denen Zeitpunkte formal gesehen Mengen von auf isochronen tempo-modalen Positionen sind, d.h. Positionen, an denen es jeweils „gleich spät“ ist. Aus diesem Grund benötigt er zwar keine Metrik, aber doch die Box als Isochronie-Operator. Vgl. die Definition des STW-Modells, S.242f und besonders den Beweisschritt (b) für Theorem 1.1. auf S.243.

[9] Vgl. Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“, S.ix („Inhaltsgleichheit“); GAMUT, „Language, Truth and Meaning“, Bd. II, Kap. 2.5; Strobach, „Logik für die Seeschlacht“ (1998), S.107 (zu anderen, korrekturbedürftigen Punkten darin vgl. Fußnote 26 der Einleitung zu dieser Studie).

Ein möglicher Weltverlauf h und ein möglicher Weltverlauf h' sind zu t gerade dann Alternativen zueinander, wenn h und h' bis zu (incl.) t inhaltlich identisch sind.

Es ist zu beachten, dass diese *Definition*, entgegen dem ersten Anschein, keine Entscheidung für „lower cuts" und gegen „upper cuts" bei der Verzweigung bedeutet, sondern vielmehr die Entscheidung für die eine *oder* die andere Möglichkeit in einer zusätzlichen These formuliert werden kann, die sich auf die Definition beruft: „lower cuts" liegen grundsätzlich vor, wenn es immer letzte Zeitpunkte gibt, zu denen Alternativen *im Sinne der Definition* untereinander zugänglich sind, „upper cuts", wenn es immer erste Zeitpunkte gibt, zu denen Alternativen *im Sinne der Definition* untereinander nicht mehr zugänglich sind.[10]

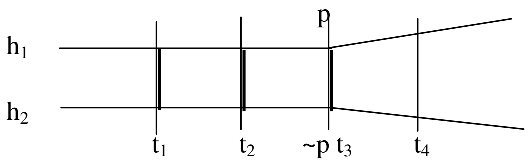
Dieser Begriff der Alternative passt besonders gut zu einer indeterministischen Logik, da er geradezu die Kehrseite der brauchbarsten zur Zeit bekannten Definition von „Determinismus" ist.[11] Demnach sollte man nämlich sagen:

Determinismus die These, dass inhaltlich vollkommen identische vorhergehende Zustände der Welt auch identische Folgezustände haben müssen.
Indeterminismus ist dagegen die Ansicht, dass zum selben vorhergehenden Zustand verschiedene Folgezustände möglich sind.

Dem genannten Begriff der Alternative zufolge kann es für einen Deterministen zu einem möglichen Weltverlauf immer nur eine einzige Alternative geben: diesen Weltverlauf selbst. Verschiedene mögliche Weltverläufe müssen sich bereits in ihren Anfangsbedingungen (bzw. beliebig früh) unterschieden haben. Der Indeterminist dagegen meint, dass es *verschiedene* mögliche Weltverläufe geben kann und auch gibt, die zu gewissen Zeiten Alternativen zueinander sind. Dass Weltverläufe, die zu einem Zeitpunkt t Alternativen zueinander sind, bis zu einschließlich t inhaltlich identisch sein müssen, soll hier das **Prinzip der Historizität** genannt werden. Dieses Prinzip wird in allen von K_b-Strukturen ausgehenden Sprachen stillschweigend beachtet. Denn in ihnen sind ja tempo-modale Positionen Primitiva, und es wird pro tempo-modaler Position einer Formel genau ein Wahrheitswert zugeordnet wird. Es sind dagegen T×W-Modelle zulässig, bei denen dies nicht der Fall ist, z.B. das folgende:

[10] Vgl. zu einer genaueren Diskussion von „upper" und „lower cuts" Kap. II 2.3.2.3 und Kap. IV 1.2, IV 1.2.2.

[11] Vgl. dazu Esfeld, „Einführung in die Naturphilosophie" (2002), Kap. 4, S.35f mit Bezug auf Earman, „A Primer on Determinism" (1986), S.13. Implizit wird diese Charakterisierung auch verwendet in Jedan und Strobach, „Modalities by Perspective" (2002), Part II, S.79, constraint (2).



Dieses Modell ist insofern ungewöhnlich, als h_1 und h_2 zu t_3 untereinander zugänglich sind, obwohl zu t_3 bezüglich h_1 „p“ wahr ist, bezüglich h_2 aber falsch.[12] Das ist durch die T×W-Semantik nicht verboten: Zwar müssen zwei mögliche Weltverläufe, wenn sie zu t *via* A_t zugänglich sind, auch immer zuvor *via* A_t gegenseitig zugänglich gewesen sein. Aber dass sie zu irgendeinem Zeitpunkt via A_t zugänglich sind, schließt nicht aus, dass ihre Interpretationsfunktionen für diesen Zeitpunkt ebenso stark voneinander abweichen, wie wenn sie nicht zugänglich wären. Die Zugänglichkeit ist nicht an die Interpretationsfunktion gekoppelt oder mit ihrer Hilfe charakterisiert. Die Interpretationsfunktion spielt für die Zugänglichkeit einfach überhaupt keine Rolle. Man fragt sich freilich dann angesichts der intendierten Deutung: Was soll es in diesem Fall eigentlich *heißen*, dass h_1 und h_2 zu t_3 *noch* untereinander zugänglich und damit *erst* für die Zukunft Alternativen zueinander sind?

Es spricht viel dafür, solche Modelle als nicht intendiert einzustufen. Semantisch gesehen ist es nicht weiter schwer, sie auszuschließen. Man fordert einfach die Historizität:

h und h’ sind zu t gerade dann Alternativen zueinander, wenn
(1) h A_t h’
(2) Für alle t’ mit t’ A_1 t oder t’ = t und jede atomare Formel α gilt:
$V(\alpha,\langle t',h'\rangle)= V(\alpha,\langle t',h\rangle)$.

Sieht man mögliche Weltverläufe selbst als auf Zeitstellen relativierte Interpretationsfunktionen für atomare Formeln an, so kann man (2) auch so formulieren:

(2*) $h(\alpha,t') = h'(\alpha,t')$ für alle t’ mit t’ A_1 t oder t’ = t.

Ein T×W-Modell, für das gilt, dass h A_t h’ genau dann der Fall ist, wenn (2) bzw. (2*) erfüllt ist, soll ein **historizistisches** T×W-Modell heißen. Die Sprache **LF** soll der Plausibiliät der Historizitäts-Forderung gerecht werden:

- LF soll genau so definiert sein wie T×W mit der Ausnahme von zwei Abweichungen:
- In der Definition des Modells ist Historizität gefordert
- In der Definition der Struktur ist Verinselungsfreiheit gefordert.

[12] Es spielt für den Einwand keine Rolle, dass t_3 der letzte (dargestellte) Zeitpunkt der Zugänglichkeit ist. Man könnte ebenso mit t_2 argumentieren oder mit einem beliebig weiter zurück liegenden Zeitpunkt, was den Eindruck der Absurdität noch verstärken mag.

Die Zugänglichkeitsrelation nicht nur über die Eigenschaften der Struktur, sondern mit Hilfe einer *Modell*eigenschaft, nämlich über die Wahrheitswerte von atomaren Formeln zu charakterisieren, ist ungewöhnlich. Dies wird jedoch für den weiteren Gang der vorliegenden Studie von großer Wichtigkeit sein. Denn in Kap. II 3 und im ganzen Teil IV wird es erforderlich, die Zugänglichkeit von Alternativen an die Gleichartigkeit des Vergangenheitslichtkegels oder an die Gleichartigkeit abgesehen vom Zukunftlichtkegel zu binden. Und ich sehe keine Möglichkeit, diese Bedingungen zu formulieren, ohne den Begriff der Gleichartigkeit mit Hilfe der Wahrheitswerte atomarer Formeln auszubuchstabieren.

Was für Möglichkeiten gibt es, das Szenario der zukünftigen Seeschlacht mit LF darzustellen? Eine ganze Reihe, nämlich je eine für jeden Vertreter einer der bisher vertretenen Positionen.[13]

1.4 Das Seeschlacht-Szenario im Rahmen von LF

1.4.1 Die Ansicht des Ockhamisten

Es ist zunächst ausdrücklich festzuhalten, dass der Ockhamist den V-Wert 1 als „wahr" und der V-Wert 0 als „falsch" deutet. Er liest den Ausdruck „$V(\alpha,\langle k,h\rangle)=1$" als „$\alpha$ ist für die tempo-modale Position k bezüglich des möglichen Weltverlaufs h wahr". Das „bezüglich" lässt sich dabei vernünftigerweise nur als „für den Fall der Verwirklichung von" deuten.

Er deutet die zeitlogischen Operatoren wie für K_{lin}, also auch „F" als „Es wird der Fall sein, dass". Er wird zur Erläuterung hinzufügen, dass er damit weder etwas so Schwaches wie „Es wird vielleicht der Fall sein, dass" noch etwas so Starkes wie „Es wird bestimmt der Fall sein, dass" meine. „F" hat seiner Ansicht nach vielmehr überhaupt keinen modalen Beigeschmack, sondern ist ein reiner Tempusoperator. „N" ist in seiner Deutung ein Operator für **historische Notwendigkeit**. Er lässt sich *zunächst noch* unterschiedslos wie folgt lesen:

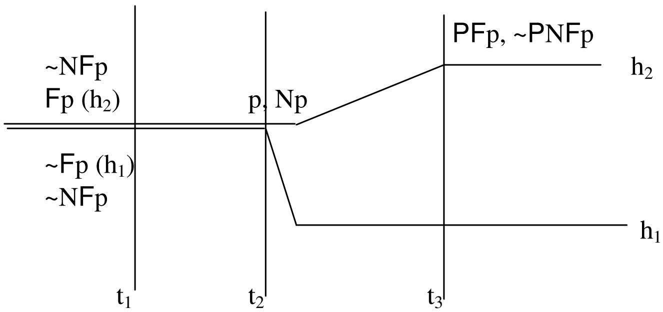
N = Es ist unabänderlich, dass
Es ist unvermeidlich, dass
Es steht fest, dass

Die Idee, dass es so etwas wie Notwendigkeit nicht nur aus Gründen der logischen Form, sondern auch aus Gründen der zeitlichen Position geben muss, lässt sich bis zu der These zurückverfolgen, die sich gegen Ende von Aristoteles' Diskussion des Problems der *futura contingentia* in Kap. 9 in „De interpretatione" (19a23f) findet:

[13] Die Systematik folgt Haradas IZL.

> Freilich ist es für das, was ist, notwendig, daß es ist, wenn es ist, und für das, was nicht ist, notwendig, daß es nicht ist, wenn es nicht ist.[14]

Stellt man mögliche Weltverläufe in einem Baumdiagramm dar, so wird deutlich, wie das als eine indeterministische These zu verstehen ist: An t_1 steht bezüglich *beider* dargestellter Weltverläufe das Stattfinden der Seeschlacht noch nicht fest, denn zu den Kandidaten für die Wirklichkeit gehört noch der mögliche Weltverlauf h_1, in dem keine Seeschlacht stattfindet. Die Formel „p“ stehe für „Es findet eine Seeschlacht statt“.



Das Seeschlacht-Szenario, ockhamistisch

Der Ockhamist erzählt die Geschichte der zukünftigen Seeschlacht anhand der V-Werte der eingetragenen Formeln: „NFp“ hat zu t_1 sowohl bezüglich h_2 als auch bezüglich h_1 den V-Wert 0. Der Grund dafür ist, dass „Fp“ zwar zu t_1 bezüglich h_2 den V-Wert 1 erhält, bezüglich h_1 zu t_1 aber den V-Wert 0. Für t_3 erhält in h_2 wegen der Seeschlacht in h_2 an t_2 die Formel „PFp“ den V-Wert 1. Die Formel „PNFp“ erhält aber trotz Seeschlacht den V-Wert 0, da $\langle t_2,h_2\rangle$ im Seeschlacht-Szenario die einzige "p"-Position ist. Da jede Alternativen zu h_2 zu t_2 (hier der Einfachheit halber: nur h_2 selbst) die Seeschlacht enthält, ist zu t_2 in h_2 nicht nur der V-Wert von „p“ 1, sondern auch der von „Np“. Man sieht daran auch schon ohne weiteres:

> „$p \rightarrow Np$“ ist LF-allgemeingültig, „$Fp \rightarrow NFp$“ dagegen nicht.

Es ist ferner zu bemerken, dass nicht *nur* Aussagen wie „Es findet eine Seeschlacht statt“ an einer tempo-modalen Position historisch notwendig sein können, sondern dass auch alle aus logischen Gründen notwendig wahren Aussagen, z.B. alle PC-Theoreme und alle K_t-Theoreme, diesen Status haben, und zwar an *jeder* Position **[B1]**.

[14] Übersetzung: Weidemann (To men oun einai to on otan v, kai to mh on mh einai otan mh v, anagkh).

1.4.2 Die Ansicht des Peirceaners

Der Peirceaner[15] deutet wie der Ockhamist bereits die V-Werte 1 und 0 als „wahr“ bzw. als „falsch“. Er kümmert sich einfach nicht um die Deutung von Formeln, in denen „F“ ohne „N“ davor auftaucht. Die Wendung „Es wird der Fall sein, dass“ wird für ihn allein durch „NF“ plausibel wiedergegeben. Deshalb definiert auch auch das Zeichen „**F**“ einfach als Abkürzung für „NF“ und benutzt davon abgesehen das Zeichen „F“ nicht.[16] Auch der „N“-Operator hat damit seinen Dienst getan und wird vom Peirceaner nicht weiter beachtet. Der **F**-Operator des Peirceaners hat ja selbst einen modalen Beigeschmack. Er wird dazu sagen, dass dieser Beigeschmack in der Bedeutung des Tempus Futur enthalten ist, dass man das „bestimmt“ in der Deutung also auch weglassen kann. „Tensed statements“ über die Zukunft, die man zunächst für rein zeitliche Aussagen hält, sind seiner Meinung nach eben in Wirklichkeit immer schon tempo-modale Aussagen.

Den metasprachlich-schematischen Ausdruck „$V(\alpha, \langle t,h\rangle) = 1$“ deutet der Peirceaner etwas anders als der Ockhamist.[17] Der Ockhamist bezieht sich mit dem „h“ dabei auf eine *ganze* mögliche Weltgeschichte, denn er liest ja diesen Ausdruck als „α ist im Falle der Verwirklichung von h zu t wahr“. Für den Peirceaner dagegen ist der Ausdruck „$\langle t,h\rangle$“ einfach die *Koordinatenangabe* einer tempo-modalen Position. Doch was bedeutet es, von der tempo-modalen Position $\langle t,h\rangle$ zu sprechen, wenn man eine Variante von $T\times W$ benutzt? Offenbar dies: „$\langle t,h\rangle$“ bezeichnet t in denjenigem Zustand der Welt, bei dessen Verwirklichung h zu t noch ein Kandidat für die Wirklichkeit ist. Dieser Zustand liegt nur dann vor, wenn bis zu incl. t all das verwirklicht wurde, das von h (als Beschreibung aufgefasst) als zu bis zu incl. t Verwirklichtes behauptet wird, wenn also die Welt zumindest erst einmal bis zu incl. t die Geschichte h wahrgemacht hat. „$\langle t,h\rangle$“ bezeichnet t in demselben Zustand wie „$\langle t,h'\rangle$“, falls h und h’ zu t historizistische Alternativen zueinander sind. Man kann sagen, dass „$\langle t,h\rangle$“ für ihn eine *halbe* Weltgeschichte bezeichnet, nämlich h bis zu incl. t (und damit auch h’ bis zu incl. t, wenn h’ zu t historizistische Alternative zu h ist). „$\langle t,h\rangle$“ bezeichnet einen Standpunkt zu t unter der Annahme einer gewissen möglichen Weltentwicklung bis zu incl. t. Der Peirceaner deutet also den Ausdruck „$V(\alpha, \langle t,h\rangle) = 1$“ als:

> α ist für denjenigen Fall zu t wahr, dass h zu t noch Kandidat für die Wirklichkeit ist. bzw.: α ist für denjenigen Fall zu t wahr, dass h und alle h bis zu (mindestens und incl.) t gleichenden möglichen Weltverläufe zu t noch Kandidaten für die Wirklichkeit sind.

---

[15] Vgl. Fußnote 3 zu diesem Kapitel.

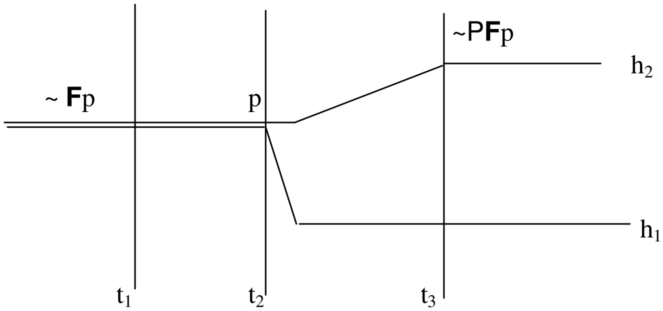
[16] Die Definierbarkeit des Peirceanischen F-Operators geht bereits auf Prior zurück. Vgl. PPF Kap. 7, S.130: „the rather strong [Peircean] ‚will be‘ is simply the Ockhamist ‚necessarily will be‘“.

[17] Dies ergibt sich aus der implizit vorausgesetzten, natürlichen Deutung, wenn man ein Tafelbild mit einer Verzweigung erläutert („Nehmen wir an, wir seien an dieser Stelle, die Welt habe sich also zunächst *so* entwickelt...“). Harada hat (vgl. IZL, S.266), offenbar aufgrund eines Missverständnisses von Priors PPF, 130f, eine andere Deutung.

Dabei heißt „⟨t,h⟩" soviel wie: „zu t, und zwar bei h-artiger Entwicklung bis zu einschließlich t".

Die Idee, dass man beim Bewerten von Formeln bzw. Äußern von Sätzen einen Standpunkt in einer halbfertigen Welt einnimmt, mag man, einen glücklichen Ausdruck Haradas übernehmend, „**Hemiaktualismus**" nennen. Nur sieht man damit auch: Harada hat Unrecht, den Hemiaktualismus allein durch seine eigene, von der Position des Peirceaners abweichenden Auffassung verwirklich zu sehen.[18]

Im Seeschlacht-Szenario in der Darstellung des Peirceaners erhält „**F**p" an $\langle t_1,h_2\rangle$ (bzw. $\langle t_1,h_1\rangle$) den V-Wert 0. Für $\langle t_3,h_2\rangle$ erhält daher die Formel „P**F**p" ohne weiteres den V-Wert 0, wie übrigens auch schon an $\langle t_2,h_2\rangle$.



Das Seeschlacht-Szenario, Peirceanisch

Die Situation an $\langle t_2,h_2\rangle$ zeigt übrigens, dass „p → P**F**p" nicht allgemeingültig ist. Verhielte sich „**F**" in puncto Allgemeingültigkeit wie der „F"-Operator, so dürfte das nicht passieren.[19] Doch er verhält sich, als Abkürzung für „NF", ziemlich anders.

1.4.3 Die Ansicht des Thomasonianers

Der auf Bas van Fraassen zurückgehende und zuerst von Richmond Thomason detailliert auf das Seeschlacht-Problem angewendete Ansatz[20] erzählt die Geschichte der zukünftigen Seeschlacht nicht anhand von V-Werten. Der Vertreter dieses Ansatzes soll hier der Einfachheit halber Thomasianer genannt werden. Für seine

[18] An diesem Befund ändert auch das rein technische Resultat Haradas nichts, dass sich der „F"-Operator in seinem Sinne in rein technischer Hinsicht quasi-ockhamistisch verhält, *falls* der An-Kontext hinter das Ende aller Zeiten verlegt wird, und dass er sich quasi-peirceanisch verhält, *falls* der An-Kontext vor alle Zeit verlegt wird **[B2]**. Denn dieses technische Resultat wird den Peirceaner und den Ockhamisten kaum davon überzeugen, dass sie so etwas je vorgehabt hätten.

[19] Eine rein Peirceanische Logik mit „**F**" als primitivem Zeichen lässt sich, wie John Burgess 1980 gezeigt hat, dennoch nicht nur korrekt, sondern auch vollständig axiomatisieren. Vgl. John P. Burgess, "Decidability for Branching Time" (1980).

[20] Vgl. Fußnote 3.

Position ist entscheidend: V-Werte deutet er gar nicht. Die Werte 1 und 0 als Werte der V-Funktion sind für ihn völlig bedeutungslose Verrechnungseinheiten. Dafür deutet die S-Werte 1 und 0 als „wahr“ und „falsch“, die wie folgt definiert sind:

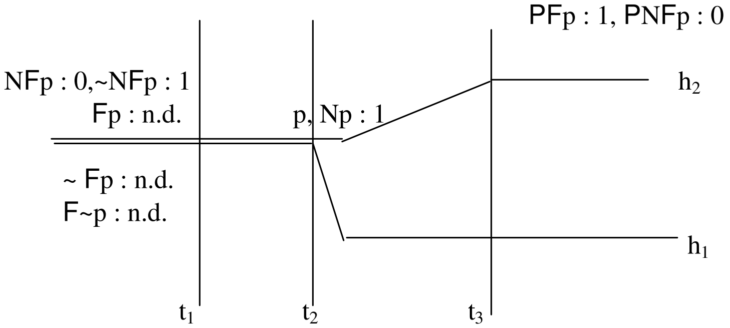
> $S(\alpha, \langle t,h\rangle)=1$ gdw für jeden möglichen Weltverlauf h‘ mit hA_th‘ gilt: $V(\alpha, \langle t,h'\rangle)=1$.
> $S(\alpha, \langle t,h\rangle)=0$ gdw für jeden möglichen Weltverlauf h’mit hA_th‘gilt: $V(\alpha, \langle t,h'\rangle)=0$.

Den metasprachlichen Ausdruck „$\langle t,h\rangle$“ deutet auch der Thomasonianer als „zu t, und zwar bei h-artiger Entwicklung bis zu incl. t“. Für *ihn* bedeutet „$S(\alpha, \langle t,h\rangle) = 1$“:

> α ist für denjenigen Fall zu t wahr, dass h zu t noch Kandidat für die Wirklichkeit ist.

Und „$S(\alpha, \langle t,h\rangle) = 0$“ bedeutet für ihn, dass α für diesen Fall falsch ist.

S-Werte weisen eine dramatische Besonderheit auf: Es wird nicht unbedingt jeder Formel für jede tempo-modale Position ein Wert zugewiesen. Gibt es einen möglichen Weltverlauf h und einen möglichen Weltverlauf h’ mit hA_th‘, so dass $V(\alpha,\langle t,h\rangle)=1$, aber $V(\alpha,\langle t,h'\rangle)=0$, so ist $S(\alpha,\langle t,h^{(\prime)}\rangle)$ nicht definiert.



Das Seeschlacht-Szenario, thomasonianisch („n.d.“ = „nicht definiert“)

So ist im Seeschlacht-Szenario $S(Fp,\langle t_1,h_2\rangle)$ nicht definiert, ebensowenig $S(F{\sim}p,\langle t_1,h_2\rangle)$. Auch „~Fp“ hat keinen S-Wert für $\langle t_1,h_2\rangle$. Denn es ist ja $V(Fp,\langle t_1,h_1\rangle)=0$ und damit $V({\sim}Fp, \langle t_1,h_1\rangle)=1$, zugleich aber $V(Fp, \langle t_1,h_2\rangle)=1$ und damit $V({\sim}Fp,\langle t_1,h_2\rangle)=0$. Für $\langle t_1,h_2\rangle$ erhält „NFp“ den S-Wert 0, weil sowohl $V(NFp,\langle t_1,h_1\rangle)=0$ als auch $V(NFp, \langle t_1,h_2\rangle) = 0$ ist. Für $\langle t_3,h_2\rangle$ erhält die Formel „PFp“ den S-Wert 1. Denn in jedem bis zu inklusive t_3 h_2-artigen Weltverlauf h ist ja $V(PFp, \langle t_3,h\rangle)=1$ und dies, weil jeweils $V(Fp, \langle t_1,h\rangle)=1$ ist. Die Formel „PNFp“ erhält aber trotz Seeschlacht für $\langle t_3,h_2\rangle$ den S-Wert 0.

Ein weiterer dramatischer Effekt der thomasonanischen Deutung ist: Alle LF-allgemeingültigen Formeln haben auch an allen tempo-modalen Positionen den S-Wert 1, so auch „$Fp \vee {\sim} Fp$“. Es wird damit das das angesichts von Kap. I 1.1 Unwahrscheinliche verwirklicht: In der thomasonanischen Deutung von LF gibt es kein Pendant zum Bivalenzprinzip. Dennoch hat LF ein Pendant zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $\ulcorner\alpha \vee \sim \alpha\urcorner$ ist LF-allgemeingültig.

1.4.4.Die Ansicht des Haradianers

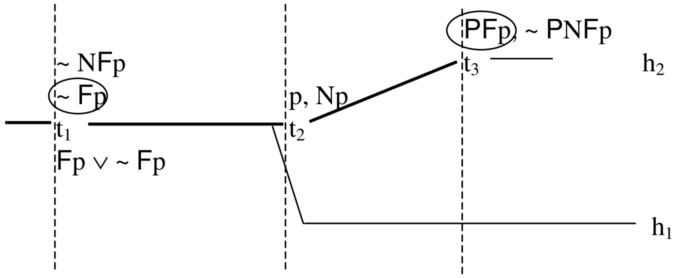
Kimio Harada hat in seiner 1994 erschienenen Dissertation „Indeterministische Zeitlogik" einen bemerkenswerten weiteren Vorschlag zur Darstellung des Seeschlacht-Szenarios gemacht. Ihre Einbeziehung in den Rahmen von LF ist komplizierter als bei den anderen Ansätzen, aber sie ist durchführbar. Dabei soll ein Anhänger von Haradas Idee der Einfachheit halber als Haradianer bezeichnet werden. *Nicht* übernommen werden soll in den Rahmen von LF der von Harada verwendete „J"-Operator. Er ist als „hier/wirklich" zu lesen. Sein Vorkommen bei Harada deutet freilich schon auf ein wichtiges Element in Haradas Modellen hin: eine als „Jetzt"-Position ausgezeichnete tempo-modale Position. Doch Haradas Grundidee lässt sich auch ohne diesen Operator wiedergeben. Ja, sie lässt sich letztlich sogar wiedergeben, ohne dass man eine Jetzt-Position pro Modell auszeichnet.[21] Diese hat nämlich den Nachteil, die Modelle statisch zu machen, so dass man, um eine Entwicklung darzustellen, ganze Sequenzen von einander ähnelnden Modellen betrachten muss.

Im Sinne der hier gewählten Darstellung gesagt: Der Haradianer akzeptiert, wie der Thomasonianer, V-Werte nicht als Wahrheitswerte. Aber auch S-Werte interessieren ihn nicht. Was er als Wahrheitswerte deutet, sind H-Werte. Den Ausdruck „$H(\alpha,\langle t,h\rangle)=1$" deutet er so, wie der Thomasonianer den Ausdruck „$S(\alpha, \langle t,h\rangle)=1$" deutet und der Peirceaner den Ausdruck „$V(\alpha, \langle t,h\rangle)=1$", nämlich als: „$\alpha$ ist für denjenigen Fall zu t wahr, dass h und alle h bis zu (mindestens und incl.) t gleichenden möglichen Weltverläufe zu t noch Kandidaten für die Wirklichkeit sind". Den Ausdruck „$H(\alpha,\langle t,h\rangle)=0$" deutet er entsprechend.

Wie ermittelt man H-Werte? Der Grundgedanke ist: Ein Zeitpunkt kann mehrere Rollen spielen. Er kann der Zeitpunkt sein, *für* den man eine Formel bewertet. Und er kann der Zeitpunkt sein, *an* dem man eine Formel bewertet. Gleiches gilt für tempo-modale Positionen. Fallen bei der Bewertung einer Formel An- und Für-Position auseinander, so wären die resultierenden Werte als *Wahrheits*werte oft kontraintuitiv.[22] Für den Wahrheitswert einer Gesamtformel sollten also An- und Für-Position also zusammenfallen. Schließlich haben H-Werte das Format „$H(\alpha,\langle t,h\rangle)$" und nicht etwa „$H(\alpha,\langle t,t',h\rangle)$. Das heißt aber nicht, dass nicht im Verlauf der sukzessiven Bewertung einer Formel An- und Für-Position auseinanderfallen könnten und die dabei entstehenden Werte nützliche Verrechnungseinheiten sind. Wie das sein kann, sieht man am besten am Beispiel des Seeschlacht-Szenarios.

[21] Dies ist auch das Vorgehen in Kamp, „Formal Properties of ‚now'" (1971).

[22] Vgl. in diesem Sinne auch IZL, S.312f, Fußnote 51: „Da es aber [...] ziemlich merkwürdig erscheint, eine Aussage nicht aus der Sicht der Äußerungszeitstelle zu bewerten [...]".



Das Seeschlacht-Szenario nach Harada

Die Menge der für die Bewertung einer Gesamtformel relevanten zugänglichen Weltverläufe wird *alle* Bewertungsschritte hindurch von der An-Position bestimmt, während die Für-Zeitstelle von Schritt zu Schritt variieren kann. Für eine Bewertung *an* $\langle t_1,h_1\rangle$ sind h_1 *und* h_2 relevant. Da in diesem Fall der „F"-Operator wie das Peirceanische „**F**" einen modalen Beigeschmack hat, ist $H(Fp,\langle t_1,h_1\rangle)=0$. Da H-Werte, anders als die S-Werte des Thomasonianers, *immer* definiert sind und die aussagenlogischen Junktoren sich wie üblich verhalten, ist $H({\sim}Fp,\langle t_1,h_1\rangle)=1$.[23] Jede Instanz des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erhält deshalb auch immer den H-Wert 1. Der Peirceaner ist's zufrieden. Erst recht ist $H(NFp,\langle t_1,h_1\rangle)=0$, denn „N" verhält sich wie üblich. Man erhält $H(p,\langle t_2,h_2\rangle)=1$ und $H(Np,\langle t_2,h_2\rangle)=1$ aus den gleichen Gründen wie der Ockhamist, und man erhält immer für „$p\rightarrow Np$" den H-Wert 1. Für die Bewertung einer Gesamtformel *an* $\langle t_3,h_2\rangle$ zählen nur noch diejenigen Weltverläufe, die an t_3 noch Alternativen zu h_2 sind. Dies sind aber nur Weltverläufe mit „p" an $\langle t_2,h_2\rangle$. An $\langle t_3,h_2\rangle$ *für* $\langle t_1,h_2\rangle$ bewertet ergibt sich für „Fp" die Verrechnungseinheit 1. Denn alle einschlägigen Weltverläufe haben dann ja „p" nach $\langle t_1,h_2\rangle$. Deshalb ergibt sich $H(PFp,\langle t_1,h_1\rangle)=1$. Dagegen erhält man $H(PNFp,\langle t_1,h_1\rangle)=0$. Denn durch den „N"-Operator werden rückblickend wieder mehr Möglichkeiten eröffnet. Er übertrumpft hier gleichsam die An-Position. In der Deutung heißt das: Nachdem die Seeschlacht eingetroffen ist, stand sie auch bevor – aber nicht notwendigerweise. Darin ist sich der Haradianer mit dem Thomasonianer einig. Eine solche ausgleichende Ansicht ist technisch möglich, wie auch immer man sie motiviert. Die genauen Definitionen zum Nachrechnen finden sich in **[B3]**.

Zwischen der thomasonianischen und der haradianischen Ansicht lassen sich zwei wichtige Unterschiede feststellen:
(1) H-Werte entsprechen dem Bivalenzprinzip.
(2) Für S-Werte gilt: Folgt eine tempo-modale Position $\langle t',h\rangle$ auf eine tempo-modale Position $\langle t,h\rangle$ und ist eine Formel α an $\langle t,h\rangle$ ohne S-Wert, so kann für $\langle t',h\rangle$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ einen S-Wert erhalten, und zwar auch den als „wahr" gedeuteten S-Wert 1. Hat α an $\langle t,h\rangle$ den S-Wert 0, so kann aber für $\langle t',h\rangle$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ nicht den S-Wert 1 erhalten (und umgekehrt). Das heißt in der Deutung kurz: Die Vergangenheitsform einer zuvor

[23] Man sieht daran, dass H-Werte nicht einfach S-Wert-Lücken mit dem Wert 0 auffüllen. Vielmehr ist in einem Fall die S-Wert-Lücke mit dem H-Wert 1 und im anderen mit dem Wert 0 versehen.

wahrheitswertlosen Aussage kann wahr werden. Für den Ansatz von Harada gilt dagegen: Folgt eine tempo-modale Position $\langle t',h\rangle$ auf eine tempo-modale Position $\langle t,h\rangle$ und ist eine Formel α an $\langle t,h\rangle$ falsch, so kann für $\langle t',h\rangle$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ den H-Wert „wahr" erhalten. Das heißt in der Deutung: Sogar die Vergangenheitsform einer zuvor *falschen* Aussage kann wahr werden. Die in der Abbildung eingekreisten Formeln zeigen dies deutlich.

1.5. Das Seeschlacht-Problem

Die Gemeinsamkeit aller behandelten indeterministischen Ansätze dürfte zur Genüge klar geworden sein: dass „in" manchem möglichen Weltverlauf von t aus gesehen *morgen* eine Seeschlacht stattfindet, aber nicht in jedem, sorgt dafür, dass gewisse Formeln zu t *nicht* wahr werden, deren Wahrheit den Determinismus bestätigen würde, und zwar „NFp" bzw. „**F**p" vor der Schlacht und „PNFp" bzw. „P**F**p" danach. Doch ist das schon eine Antwort auf ein Argument eines Deterministen, der die Wahrheit seiner Ansicht aus logischen Gründen beweisen will? Nein. Wie sieht ein solches Argument also aus, das man berechtigterweise das Seeschlacht-*Problem* nennen kann?

Darüber herrscht in der Literatur keine Einigkeit. Kutscheras Rekonstruktion ergibt zwar ein interessantes Deterministen-Argument in verschiedenen Varianten.[24] Es ist aber technisch so kompliziert, dass ich es letztlich als Aristoteles-Interpretation für anachronistisch halte. Harada analysiert vernünftig vier Schritte eines Deterministen-Arguments. Sein Schema hat den im Folgenden ausgeführten Vorschlag angeregt. Aber gegen Haradas formale Rekonstruktion ergeben sich eine Reihe von Einwänden.[25] Sie haben v.a. damit zu tun, dass er nicht mit einer metrisierten Logik arbeitet und auch nicht versucht, Datumsangaben in seine Rekonstruktion einzubinden. Einer detaillierten Kritik ist hier ein Vorschlag vorzuziehen, wie es sich besser machen lässt.

Eine Möglichkeit, auf metrisierte Operatoren zu verzichten und dennoch die Datumsangabe in die formale Rekonstruktion mit einzubeziehen, besteht darin, die komplexe Struktur der Aussage p = „Es findet eine Seeschlacht statt, und es ist der X.Y.ZZ (etc.)" als *Konjunktion* auszunotieren.[26] Dabei lässt sich Kutscheras

[24] Vgl. Kutschera, „Aristoteles und Diodor" (1986).

[25] Harada sieht zwar richtig, dass die Verteilung des Zukunftsoperators über die Alternation entscheidend ist. Aber er prüft die falschen Formeln, nämlich „F(p ∨ ~p)" / „Fp ∨ F~p" bzw. „**F**(p∨~p)" / „**F**p ∨ **F**~p". Es ergeben sich damit bei Haradas Rekonstruktion, kurz gesagt, v.a. die folgenden Probleme: (1) „F p" und „F ~p" sind gar nicht unbedingt kontradiktorisch entgegengesetzt: Beides kann sogar bezüglich derselben Weltgeschichte wahr sein, wenn z.B. morgen darin eine Seeschlacht stattfindet und übermorgen nicht. (2) „**F**~p" ist im Seeschlacht-Szenario selbst wahr: Irgendwann wird die Seeschlacht wieder aufgehört haben. (3) „**F**p" und „**F**~p" sind kompatibel, wenn etwas in allen Weltgeschichten eintrifft und dann auch wieder vorbei ist.

[26] Vgl. zu diesem Verfahren – noch ohne expliziten Isochronieoperator – bereits mein „Logik für die Seeschlacht" (1998), das in manch anderem Detail allerdings korrekturbedürftig ist (siehe Fußnote 26 zur Einleitung dieser Studie).

Isochronie-Operator „□“ sinnvoll einsetzen, denn Datumsangaben sind *unter allen Umständen* wahr:

$\Box q \;\&\; r$ mit
q = es ist der X.Y.ZZ (etc.) r = es findet eine Seeschlacht statt.

Wichtig an einer Datierungs-Aussage (von der wir annehmen wollen, dass sie beliebig genau ist) ist Folgendes: Sie ist im Präsens nie zuvor wahr gewesen und wird nie wieder wahr sein. Statt „q“ sollte man also eigentlich genauer schreiben: „$H{\sim}q \wedge q \wedge G{\sim}q$“. Es bietet sich daher an, die folgende Abkürzung einzuführen:

$\ulcorner \Box(H{\sim}\alpha \wedge \alpha \wedge G{\sim}\alpha) \urcorner$ lässt sich stets als $\ulcorner \underset{\cdot}{\alpha} \urcorner$ abkürzen.

Harada gliedert das in De int. Kap.9 diskutierte logische Argument für den Determinismus sinnvollerweise zunächst in vier informale Schritte auf:

„1. Prämisse: Es ist wahr, daß es morgen der Fall sein wird, daß eine Seeschlacht stattfindet oder nicht stattfindet.
2. Erste Folgerung: Es ist wahr, daß es morgen entweder der Fall sein wird, daß eine Seeschlacht stattfindet, oder daß es morgen der Fall sein wird, daß keine Seeschlacht stattfindet.
3. Zweite Folgerung: Entweder ist es wahr, daß es morgen der Fall sein wird, daß eine Seeschlacht stattfindet, oder es ist wahr, daß es morgen der Fall sein wird, daß keine Seeschlacht stattfindet.
4. Konklusion: Entweder steht es fest, daß es morgen der Fall sein wird, daß eine Seeschlacht stattfindet, oder es steht fest, daß es morgen der Fall sein wird, daß keine Seeschlacht stattfindet.“[27]

Man kann, dieser informalen Analyse folgend, nun ein Deterministen-Argument im Sinne des folgenden Schemas vorbringen, wobei „F“ für einen noch nicht näher spezifizierten Zukunftsoperator steht und „W“ für „Wahrheitswert“ (*dieses* Schema untersucht Harada selbst *nicht*):

A	$W(F\,q, \langle t_1,h_1\rangle)=1$	Annahme
1	$W(F\,((q\wedge r) \nabla (q\wedge{\sim}r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus A)
2	$W(F(q\wedge r) \nabla F(q\wedge{\sim}r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **1**)
3	(a) $W(F(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ oder (b) $W(F(q\wedge{\sim}r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **2**)
4	Falls (a), so steht die Wahrheit von „$F(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**), Falls (b), so steht die Wahrheit von „$F{\sim}(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**).	

[27] IZL, S.240.

Die Annahme „A“ schaltet den Ausgangspunkt vor, dass der morgige Tag auf jeden Fall bevorsteht, was auch immer an ihm passieren mag. Wie werden die Vertreter der einzelnen Ansätze dieses Schema für sich konkretisieren?

<u>Version des Peirceaners</u>

A $V(\mathbf{F}\, q, \langle t_1,h_1\rangle)=1$	Annahme	ok
1 $V(\mathbf{F}\, ((q\wedge r) \nabla (q\wedge \sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus A)	ok
2 $V(\mathbf{F}\, (q\wedge r) \nabla \mathbf{F}\, (q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **1**)	non sequitur
3 (a) $V(\mathbf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ oder (b) $V(\mathbf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **2**)	nein
4 Falls (a), so steht die Wahrheit von „$\mathbf{F}(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**), Falls (b), so steht die Wahrheit von „$\mathbf{F}\sim(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**).		ja, na und?

<u>Version des Haradianers</u>

A $H(\mathsf{F}q, \langle t_1,h_1\rangle)=1$	Annahme	ok
1 $H(\mathsf{F}((q\wedge r) \nabla (q\wedge \sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus A)	ok
2 $H(\mathsf{F}(q\wedge r) \nabla \mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **1**)	non sequitur
3 (a) $H(\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ oder (b) $H(\mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **2**)	nein
4 Falls (a), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**), Falls (b), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}\sim(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**).		ja, na und?

<u>Version des Ockhamisten</u>

A $V(\mathsf{F}q, \langle t_1,h_1\rangle)=1$	Annahme	ok
1 $V(\mathsf{F}((q\wedge r) \nabla (q\wedge \sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus A)	ok
2 $V(\mathsf{F}(q\wedge r) \nabla \mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **1**)	ok
3 (a) $V(\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ oder (b) $V(\mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **2**)	ok
4 Falls (a), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**), Falls (b), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}\sim(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**).		nein

<u>Version des Thomasonianers</u>

A $S(\mathsf{F}q, \langle t_1,h_1\rangle)=1$	Annahme	ok
1 $S(\mathsf{F}((q\wedge r) \nabla (q\wedge \sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus A)	ok
2 $S(\mathsf{F}(q\wedge r) \nabla \mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **1**)	ok
3 (a) $S(\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ oder (b) $S(\mathsf{F}(q\wedge \sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$	(aus **2**)	nein
4 Falls (a), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**), Falls (b), so steht die Wahrheit von „$\mathsf{F}\sim(q\wedge r)$“ schon zu t_1 mit h_1 als Wirklichkeitskandidatin fest (aus **3**).		ja, na und?

Wie ist die vierfache Version des Schemas zu verstehen? Zunächst fragt sich, warum man **1** akzeptieren sollte. Da „$q \wedge r$“ und „$q \wedge \sim r$“ nicht kontradiktorisch entgegengesetzt sind, kann man nun dafür nicht damit argumentieren, dass auch in der Zukunft der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt. Vielmehr sollte man davon ausgehen, dass der morgige Tag bestimmt kommt (A). Ist immer entweder „r“ oder „$\sim r$“ wahr, so muss auch mit „q“ zusammen entweder „r“ wahr sein oder „$\sim r$“. Wird „q“ bestimmt wahr, so wird also entweder „$q \wedge r$“ oder „$q \wedge \sim r$“ wahr. Was diesen Schritt angeht, sind alle Positionen einig.

Den Schritt von **2** auf **3** lehnen Peirceaner und Haradianer aber bereits ab. Die Disjunktion impliziert ja die Alternation, und über die verteilt der „$\mathbf{F}$“-Operator des Peirceaners nicht. Das Seeschlacht-Szenario selbst ist dazu ein Gegenbeispiel: Damit $V(\mathbf{F}\,(q\wedge r) \vee \mathbf{F}\,(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ gegeben ist, darf nicht sowohl $V(\mathbf{F}\,(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=0$ als auch $V(\mathbf{F}\,(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=0$ vorliegen. Es ist aber weder $V(\mathbf{F}\,(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ gegeben, denn man hat $V(q\wedge\sim r, \langle t_2,h_1\rangle)=1$. Noch liegt $V(\mathbf{F}\,(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ vor, denn man hat $V(q\wedge r, \langle t_2,h_2\rangle)=1$. Der Haradianer argumentiert in *dieser* Situation (wenn auch nicht beim Rückblick) genauso.

Der Ockhamist weist darauf hin, dass für *seine* Version der Übergang von **1** auf **2** gerechtfertigt ist. Wenn „$\mathsf{F}((q\wedge r)\ \nabla\ (q\wedge\sim r))$“ den V-Wert 1 hat, so auch „$\mathsf{F}(q\wedge r)\ \nabla\ \mathsf{F}(q\wedge\sim r)$“ **[B4]**. Da sich Ockhamist und Thomasonianer nicht unterscheiden, was die Einschätzung der allgemeingültigen Formeln angeht, wird der Thomasonianer für den Übergang von **1** auf **2** genauso argumentieren.

Der Ockhamist akzeptiert auch den Übergang von **2** auf **3**: Bei V-Werten, die er als Wahrheitswerte ansieht, muss er annehmen, dass eines der Disjunktionsglieder den V-Wert 1 hat, wenn die Disjunktion wahr ist. Der Thomasonianer dagegen akzeptiert den Übergang von **2** auf **3** nicht. V-Werte sind für ihn Verrechnungseinheiten, keine Wahrheitswerte. Als Wahrheitswerte sind allein S-Werte ernst zu nehmen. Nun ist aber, obwohl $S(\mathsf{F}((q\wedge r)\ \nabla\ (q\wedge\sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ vorliegt, sowohl $S(\mathsf{F}((q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)$ als auch $S(\mathsf{F}((q\wedge r)\ \nabla\ (q\wedge\sim r)), \langle t_1,h_1\rangle)$ nicht definiert. Denn man hat $V(q\wedge r, \langle t_2,h_1\rangle)=0$ und auch $V(q\wedge\sim r, \langle t_2,h_2\rangle)=0$.

Den Schritt von **3** auf **4** schließlich verweigert auch der Ockhamist. Auch er vertritt ja eine indeterministische Position: Auf das Feststehen der Wahrheit von „$\mathsf{F}(q\wedge r)$“ kann man seiner Ansicht nach nur schließen, wenn $V(N\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ vorliegt, aber nicht schon aus $V(\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$. $V(N\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ liegt aber nicht vor. Denn es ist $V(N\mathsf{F}(q\wedge r), \langle t_1,h_2\rangle)=0$. Und auf das Feststehen der Wahrheit von „$\mathsf{F}(q\wedge\sim r)$“ kann man seiner Ansicht nach nur schließen, wenn $V(N\mathsf{F}(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ vorliegt, aber nicht schon aus $V(\mathsf{F}(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_2\rangle)=1$. $V(N\mathsf{F}(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=1$ liegt aber nicht vor. Denn es ist $V(\mathsf{F}(q\wedge\sim r), \langle t_1,h_1\rangle)=0$.

1.6 Welche Lösung ist die beste?

1.6.1 Die Schwäche des Ockhamismus für Alternativen

Nachdem die Vertreter der indeterministischen Ansätze der Herausforderung durch den Deterministen im Zusammenhang mit dem Seeschlacht-Problem auf so viele verschiedene Arten begegnen konnten, stellen sich die folgenden Fragen: Welche Antwort ist die beste? Zunächst lässt sich festhalten: sicher *nicht* der ockhamistische Ansatz.

Das Problem mit der ockhamistischen Position besteht freilich *nicht* darin, dass „$p \rightarrow \mathsf{HF}p$“, als Umformung eines K_t-Axioms, LF-allgemeingültig ist. Das kann dem Peirceaner, der das Tempus Futur ohnehin nicht durch „F“ ausdrücken will, aber gleichfalls LF benutzt, egal sein.

Das Problem ist auch *nicht*, dass der Vertreter der ockhamistischen Position den in die ernsthafte Bewertung eingehenden möglichen Weltverlauf bereits als den wirklichen voraussetzt. Wenn er sowohl Indeterminist als auch noch bei Verstand ist, so wird er das nicht tun.[28] Denn man muss sich fragen: Stehen in diesem Fall zu einem ausgezeichneten möglichen Weltverlauf h die anderen möglichen Weltverläufe mit derselben Vergangenheit bis zu t an t noch als *reale* Alternativen offen? Würde einer von *ihnen*, z.B. h', verwirklicht, was einer *realen* Alternative doch wohl möglich sein muss, so würde h' die (ganze) Wirklichkeit und nicht h. h ist aber bereits ausgezeichnet. Die von h verschiedenen möglichen Weltgeschichten mit derselben Vergangenheit bis zu t können daher nur als theoretische Möglichkeiten oder Denkmöglichkeiten angesehen werden, nicht mehr als reale, und „M“ (= „~N~“) könnte allenfalls noch epistemisch gelesen werden als „es ist vorstellbar, dass“.[29]

Schließlich ist das Problem mit der ockhamistischen Position auch *nicht*, dass der Ockhamist die Zeit wie von ihrem Ende her betrachtet, was ihm eigentlich aber noch nicht möglich ist. Dies ist zwar im Wesentlichen Haradas Interpretation. Ein vernünftiger Ockhamist wird sich aber gegen diese Interpretation verteidigen, indem er sagt:

> Ich weise doch gerade deshalb der Formel „$\mathsf{F}p$“ für t den Wahrheitswert „wahr“ nur bezüglich einer solchen möglichen Zukunft zu, in der „p“ einmal wahr wird, weil ich mich *nicht* ans Ende der Zeit stellen oder sie gleichsam von der Seite aus überblicken kann.

---

[28] Formal steht diese Möglichkeit natürlich offen. Kutschera führt (am Ende von "T×W-completeness") sogar einen Vollständigkeitsbeweis für eine Logik ohne Isochronieoperator, bei der ein kompletter möglicher Weltverlauf ausgezeichnet ist und mit einem Aktualitätsoperator angesprochen werden kann. Aber dies ist keine Logik mehr, die noch eine ernsthafte indeterministische Deutung zulässt. Der Aktualismus ist ein Determinismus.

[29] Vgl. dazu aber Kap. I 1.3.1.

Und er wird darauf hinweisen, wie er den Ausdruck „$V(\alpha, \langle t,h \rangle) = 1$“ deutet, nämlich als: „$\alpha$ ist zu t im Falle der Verwirklichung von h wahr.“ Es ist also nicht recht zu verstehen, wieso sich der Ockhamist, anders als die anderen, anderswo hinstellen soll als dorthin, wo er steht, um das zu tun, was er tut.

Was man dem Ockhamisten wirklich vorwerfen kann, ist, dass er nicht das tut, was er tun *sollte*, indem man sagt:

> Du *solltest* dich dazu äußern, was der *aktuelle* Wahrheitswert einer futurischen Aussage zu t ist, so wie die Dinge zu t stehen. Es geht nicht um den Wahrheitswert zu t bezüglich einer möglichen Weltgeschichte.

Der Ockhamist wird darauf hinweisen, dass er es so nicht meint. Er wird nämlich kontern:

> Es ist gar nicht einzusehen, warum man unbedingt aktuelle Wahrheitswerte vergeben muss. Das Besondere an Zukunftsaussagen ist gerade, dass sie das haben, was Prior bei seiner Beschreibung des ockhamistischen Systems „’wait and see’ character“ nennt.[30] Es gibt so etwas wie ein *provisorisches Futur*.[31] Es ist – z.B. bei der von Prior angeführten Pferdewette – kein Widerspruch zu sagen „Eclipse *wird* gewinnen, auch wenn es anders kommen kann“. „$V(\mathsf{F}p,\langle t,h \rangle)=1$“ heißt nichts anderes, als dass „$\mathsf{F}p$“ *für den Fall* zu t wahr ist, dass h verwirklicht wird. Ich behaupte doch gerade nicht, dass „$\mathsf{F}p$“ *zu* t *rebus sic stantibus et simpliciter* wahr ist. Das dürfte ich schließlich nur tun, wenn „p“ in *allen* möglichen Zukünften von t wahr würde. Ich sage nur: *Wenn* sich die Welt zu einer Welt entwickelt, in der Eclipse zu t’ gewinnt, so ist zu t „Eclipse wird gewinnen“ wahr und wir sagen damit die Wahrheit; wenn nicht, dann nicht.

Ich meine inzwischen, dass diese Position nicht haltbar ist: Es ist vielmehr tatsächlich zu verlangen, dass sich eine Logik für das Problem der *contingentia futura* zum aktuellen Wahrheitswert einer Aussage zu einem Zeitpunkt und einer bis zu diesem Zeitpunkt vollendeten Entwicklung äußert. Diese Äußerung mag darin bestehen, dass man auf die Zuweisung eines aktuellen Wahrheitswertes zu einem Zeitpunkt verzichtet, gerade weil die provisorischen, weltrelativen Wahrheitswerte voneinander abweichen (so macht es der Thomasonianer); doch die Frage danach für irrelevant zu erklären, wäre eine Flucht aus der semantischen Verantwortung.

---

[30] PPF, S.123.

[31] „the sense in which [‚It will be that p’] is true ... when it is not necessary but will occur all the same“, PPF, S.130.

1.6.2 Die Seeschlacht und die Korrespondenztheorie der Wahrheit

Worin unterscheiden sich die haltbaren Positionen – die des Peirceaners, die des Thomasonianer und die des Haradianers? Gibt es eine darunter, die sich als besonders plausibel auszeichnet, bleibt das Urteil in der Schwebe, oder ergänzen sie sich sogar?

In Kap. I 1.1 war als Korrespondenztheorie der Wahrheit festgehalten worden, dass das Wesen der wahren Aussage darin besteht, dass man damit die Wirklichkeit treffend darstellt, und dass das Wesen der falschen Aussage darin besteht, dass man damit eine treffende Darstellung der Wirklichkeit verfehlt. Man kann auch die Blickrichtung umkehren und sagen, dass eine Aussage gerade dann wahr ist, wenn die Wirklichkeit zu dieser Aussage berechtigt, und falsch, wenn sie das nicht tut. Das wird ein Vertreter der Korrespondenztheorie (anders als jemand, der Beweisbarkeit als Voraussetzung für Wahrheit ansieht), so erklären, dass man zu einer Aussage berechtigt sein mag, ohne davon überhaupt schon wissen zu können - *etwa so, wie man bereits Erbe sein mag, ohne je vom Erbonkel gehört zu haben*. Freilich muss die Wirklichkeit so weit sein, dass sie zur Aussage berechtigt. Gerade das hatte in Kap. I 1.1 zu einem Einwand gegen das Bivalenzprinzip geführt:

> Ist die Wirklichkeit noch nicht weit genug, um zu einer gewissen Aussage zu berechtigen, so kann man nicht sagen, dass die Aussage denjenigen Teil der Wirklichkeit, dessen Bild sie entwirft, trifft; aber man kann auch nicht sagen, dass sie ihn verfehlt.

Steht „p“ für „Eclipse gewinnt“, so ist der Thomasonianer ja gerade deshalb der Meinung, dass weder „Fp“ noch „~Fp“ *noch* „F~p“ vor dem Rennen überhaupt schon einen Wahrheitswert hat.

Gegen diese Position hatten sich bereits zwei denkbare Gegenpositionen aus dem Lager der Korrespondenztheoretiker ergeben, die sich im Hinblick auf das Seeschlacht-Szenario oder das Szenario des Pferderennens kurz wiedergeben lassen wie folgt:

> (1) Wenn die Wirklichkeit zum Zeitpunkt der Aussage teilweise noch nicht weit genug ist, dann verfehlt jede Aussage, die ein Bild des noch nicht realisierten Teils entwirft, die Wirklichkeit, aber nicht, weil sie sie *schlecht* trifft, sondern weil es noch nichts zu treffen gibt. Die Wirklichkeit berechtigt dann noch nicht zur Aussage, und damit ist die Aussage eben falsch, und es ist wahr, dass sie falsch ist.
>
> (2) Ob die Wirklichkeit bereits zum Zeitpunkt der Aussage weit genug ist, ist egal. Entscheidend ist allein, ob die Aussage ein Bild entwirft, das sich, wenn die Wirklichkeit weit genug ist, als treffend erweist.

Man kann nun leicht die erste Position als die Position des Peirceaners identifizieren, die zweite Position als das – letztlich nicht durchführbare – Programm des

Ockhamisten. Man sieht dann besonders gut, wie der Peirceaner einem Einwand, der die „wait and see“-Lesart des Tempus Futur stark macht, entgegnen könnte, den Prior formuliert wie folgt:

> To the Ockhamist, Peircean tense-logic is incomplete; it is simply a fragment of his own system – a fragment in which contingently true predictions are, perversely, inexpressible. The Peircean can only say “It will be that p” when p’s futurition is necessary; when it is not necessary but will occur all the same, he has to say that “It will be that p” is false; the sense in which it is true eludes him.[32]

Der Peirceaner könnte antworten, anders als für den Ockhamisten, der dies für eine korrekte Beschreibung der Situation hält, sei für *ihn* der Satz „Eclipse wird gewinnen, aber es ist nicht *bestimmt* so“ schlicht widersprüchlich. Das springt in *seiner* Notation, nämlich „$\mathbf{F}p \wedge \sim\mathbf{F}p$“, denn auch sofort ins Auge.[33]

Doch kann es sein, dass „Eclipse wird gewinnen“ *falsch* ist und Eclipse dann doch später gewinnt? Dies erscheint wenigstens sprachlich als Härte. Der Eindruck der Härte steigert sich noch dadurch, dass man auf die Falschheit von „Eclipse wird gewinnen“ aufgrund der Usancen für die Stellung des natürlichsprachlichen Negators im Deutschen kaum anders Bezug nehmen kann als durch den Satz „Eclipse wird nicht gewinnen“. Wie soll es dann geschehen können, dass Eclipse doch gewinnt? Die Erklärung des Peirceaners ist, dass der Satz „Eclipse wird nicht gewinnen“ doppeldeutig ist. Im Sinne von „$\sim\mathbf{F}p$“ ist er zu Beginn des Rennens wahr, dann aber auch mit dem künftigen Sieg von Eclipse ohne weiteres kompatibel; im Sinne von „$\mathbf{F}\sim p$“ schließt er den Sieg von Eclipse aus, ist ja aber auch zu Beginn des Rennens bereits falsch.[34]

Dass der Thomasonianer einen entsprechenden Unterschied nicht machen kann, wird der Peirceaner als Schwachpunkt ansehen. Das harte Urteil, dass „$\mathbf{F}p$“ falsch ist, kann der Peirceaner als eine Art Strafe für die Überschreitung der Behauptungskompetenz rechtfertigen: Bei *futura contingentia* weiß man ja schließlich, dass man ihr zukünftiges Zutreffen nicht behaupten darf, weil einzig die Wirklichkeit dazu berechtigen könnte, sie aber noch nicht so weit ist, das zu tun.

Schließlich wird der Peirceaner keinen Anlass sehen, *im Rückblick* von dieser Einschätzung abzugehen. Dass Eclipse gewinnt, ändert nichts daran, dass man zuvor nicht berechtigt war, zu behaupten, Eclipse werde (= werde *bestimmt*) gewinnen. Genau das ist es aber, was durch „$\sim\mathsf{P}\mathbf{F}p$“ ausgedrückt wird. Es ist daher gar nichts daran auszusetzen, dass zum Zeitpunkt des Siegs von Eclipse die Formel „$p \wedge \sim\mathsf{P}\mathbf{F}p$“ wahr ist. Eine Vergangenheitsaussage stellt sich demnach als eine Aussage heraus, die über die Vergangenheit *als in der Vergangenheit liegende Äußerungsberechtigungen*

---

[32] PPF, S.130.

[33] Ebenso ist übrigens „$\mathbf{F}p \wedge M\sim\mathbf{F}p$“, wie man schnell sieht, ein Widerspruch in sich. Wenn in allen möglichen Zukünften „p“ wahr ist, so steht keine Alternative offen, bezüglich der es eine mögliche Zukunft gibt, in der es dann doch anders kommt.

[34] Schon Prior sieht in der Möglichkeit, die Stellung des Negators informativ zu variieren, den großen Vorteil von Peirceanschen Logiken gegenüber dreiwertigen Ansätzen, vgl. PPF, S.136.

spricht. Das heißt nicht unbedingt, dass nach dieser Ansicht nur *indirekt* über Vergangenes gesprochen wird. Schließlich liegt ja die Äußerungsberechtigung in der Vergangenheit gerade dann vor, wenn sie in der Vergangenheit von der Wirklichkeit gedeckt wurde. Aber es impliziert, dass eine Vergangenheitsaussage der Form ⌜Pα⌝nur berechtigt sein kann, wenn einmal die Berechtigung zur Äußerung von α vorlag.

Der Peirceaner hat eine sehr konsequente Art, die Korrespondenztheorie der Wahrheit auszugestalten: Beim Blick nach vorn wird so sehr auf die gegenwärtige Behauptungskompetenz abgestellt, dass die futurische Aussage als falsch bewertet wird, auch wenn das von ihr skizzierte Bild realisierbar ist und später realisiert wird, wenn dies nur nicht schon feststeht. Und beim Blick zurück wird der Wahrheitswert der Vergangenheitsaussage dadurch ermittelt, dass man zurückrechnet, ob in der Vergangenheit von der Behauptungskompetenz gerechtfertigter Gebrauch gemacht, oder aber ob sie überschritten wurde.

Der *Thomasonianer* geht nicht so weit, die Aussage „Eclipse wird gewinnen" für falsch zu erklären. Offenbar stellt er weniger auf die Behauptungskompetenz ab als auf die Offenheit der Situation, also auf die Tatsache, dass die Wirklichkeit noch kein Wahrmacher für die Aussage über Kontingent-Zukünftiges ist.

Seine Ansicht lässt sich so besser damit vereinbaren, dass man mit den Worten „Eclipse wird gewinnen" eine Wette auf Eclipse abschließen kann. Denn es scheint seltsam, dass man beim Wetten grundsätzlich falsche Sätze äußern sollte, aber weit weniger seltsam, dass man mit der Äußerung von Sätzen wettet, die zum Zeitpunkt der Wette keinen Wahrheitswert haben. Die Aussage „Eclipse wird gewinnen, auch wenn das nicht feststeht" ist für ihn kein Widerspruch. Denn gerade die Wahrheitswertlosigkeit von „Fp" drückt seiner Ansicht nach aus, dass es auch anders kommen kann, als dass „p" später einmal wahr ist.[35]

Beim heiklen Blick zurück nach vorn ist es zunächst sehr erstaunlich, dass „PFp" mit dem Sieg von Eclipse auf einmal wahr ist. Der Peirceaner wird sich die Rückfrage nicht verkneifen können, wie es denn möglich sein soll, dass Wahrheitswertlücken nachträglich aufgefüllt werden. Tatsächlich weicht hier die Position des Thomasonianers deutlich von der Position des Peirceaners ab. Dafür, dass man zu einer Aussage der Form ⌜Pα⌝berechtigt ist, ist es nicht erforderlich, dass jemals zuvor die Berechtigung zur Äußerung von α vorlag. Doch hier werden nicht Wahrheitswertlücken in dem Sinne nachträglich aufgefüllt, dass der Thomasianer meinen würde, nun könne man nachträglich sagen: Vor dem Rennen war „Fp", im Widerspruch zum zuvor Behaupteten, doch wahr, ein Wahrmacher doch vorhanden, der zu dieser Äußerung berechtigte. Er sieht nämlich eine Vergangenheitsaussage gar nicht unbedingt als Aussage an, die über die Vergangenheit *als in der Vergangenheit liegende Äußerungsberechtigungen* spricht. Vielmehr spricht er nach dem Sieg von Eclipse über die Vergangenheit *des* Sieges von Eclipse. Und in der Vergangenheit des Sieges von Eclipse stand dieser nun einmal bevor, wenn er auch nicht unausweichlich

[35] Man bedenke, dass im Kontrast dazu z.B. „F~(p $\wedge$ ~p)" jederzeit den Wahrheitswert „wahr" hat, weil der Nichtwiderspruchssatz auch in Zukunft nicht anders als wahr sein kann.

war.[36] Mit dieser Auffassung ist sogar die folgende durch eine minimale Tempusänderung aus der Position des Ockhamisten hervorgehende Ansicht vereinbar:

> Entwickelt sich die Welt zu einer Welt, in der Eclipse zu t' gewinnt, so *war* zu t „Eclipse wird gewinnen" wahr, wenn nicht, dann nicht.

Es fragt sich nämlich, *wann* man plausiblerweise sagt, dass „Eclipse wird gewinnen" zu t wahr *war*. Die Vergangenheitsform „war" zeigt, dass dies später als t geschehen muss. Doch das Zeitendende ist alles andere als ein plausibler Kandidat als Zeitstelle für diese Äußerung. Einer Formulierung Priors folgend könnte man sagen: dann wenn das „verifying event"[37], der Sieg von Eclipse, stattfindet (oder stattgefunden hat). Als Wahrmacher für die Vergangenheitsaussage fungiert bei alldem die Wirklichkeit zum Zeitpunkt der Äußerung der Vergangenheitsaussage, also die Wirklichkeit als eine, in der Eclipse gewonnen hat.

Der Thomasonianer bleibt mit seiner Ansicht also einfach seiner Betonung des Wahrmachers *zum Äußerungszeitpunkt* treu. Er vertritt eine Wahrmacher-Theorie für den Äußerungszeitpunkt, die sich von der Theorie der Behauptungskompetenz des Peirceaners auf genau beschreibbare Art unterscheidet. Dabei sollte man nicht übersehen, dass es sich bei beiden Theorien um lediglich minimal unterschiedlich akzentuierte Varianten einer Korrespondenztheorie der Wahrheit handelt, nach der eine wahre Aussage eine solche ist, zu der die Wirklichkeit berechtigt.

Muss man sich zwischen der Theorie der Behauptungskompetenz und der Wahrmacher-Theorie für den Äußerungszeitpunkt entscheiden? Es könnte sein, dass beide Ansichten miteinander vereinbar sind und der Peirceaner und der Thomasonianer sich eigentlich bestens ergänzen. Einen Fingerzeig in diese Richtung hat Norman Kretzmann gegeben, als er bei der Kommentierung antiker Kommentare zu Aristoteles' De int. vorschlug, zwischen „truth-values" und „assertion values" zu unterscheiden.[38] Es könnte sein, dass die Wahrheitswerte des Peirceaners einfach als Behauptungswerte und die des Thomasonianers als (faktische) Wahrheitswerte zu verstehen sind. Beides kann in der *lingua franca* koexistieren, und je nach Sprechsituation (etwa Wette vs. ernsthafter Prophezeihung) mag das Tempus Futur einmal dem einen und einmal dem anderen entsprechen.

Haradas Position ist angesichts des deutlichen Unterschiedes zwischen den beiden anderen Positionen, aber auch ihrer möglichen kompletten Koexistenz, ziemlich schwer einzuordnen. Harada sieht den Vorteil seines Vorschlags darin, dass er, anders als der Thomasonianer, das Bivalenzprinzip wahrt. Man kann das als technischen

---

[36] Man beachte, dass „PNFp" auch nach dem Sieg von Eclipse falsch ist.
[37] PPF, S.123.
[38] Vgl. hierzu auch die Unterscheidung zwischen „proposition" und „assertion" in historischem Kontext bei Kretzmann, „Boethius and the truth about tomorrow's sea battle" (1998), S. 38-44; zusammengefasst in meiner Rezension zu „Ammonios: On Aristotle On Interpretation 9..." (1999), S.250. Die dort geäußerte Vermutung, Haradas HAL sei vielleicht, anders als andere Logiken, als Logik der Behauptungswerte interpretierbar, ist als Ergebnis der obigen Analyse als widerlegt anzusehen.

Vorteil sehen, aber es ist nicht ausgemacht, dass die technisch einfachste Theorie immer die sachgerechteste ist.[39] Dass eine Vergangenheitsaussage der Form $\ulcorner P\alpha \urcorner$ wahr werden kann, obwohl α zuvor nicht nur nie wahr, sondern immer *falsch* war, erscheint als über die Position des Thomasonianers hinausgehende Härte. Eine Übertragung der Position Haradas auf Alternativen in der Raumzeit ist zwar denkbar. Aber ihre Ausführung ist so kompliziert, dass dies in einem ungünstigen Verhältnis zum Ertrag steht, wenn sie schon für das tempo-modale Kontinuum letztlich nicht befriedigend ist. Auf eine Darstellung der Übertragung sei daher im Folgenden verzichtet.

1.7 Das Problem der Axiomatisierung von LF

Die Axiomatisierung von historizistischen KTMs ist eine etwas verwickelte Angelegenheit. Dennoch kann der Punkt hier nicht übergangen werden: LF soll ja im Folgenden um eine spatiale Dimension erweitert und später mit einer relativistischen Raumzeitlogik verschmolzen werden. Um zu überblicken, was dabei passiert, ist ein leistungsfähiges Herleitungsspiel von großem Wert.

T×W lässt sich, wie Kutschera in „T×W-completeness“ gezeigt hat, nicht nur korrekt, sondern sogar vollständig axiomatisieren. Die Axiomenmenge lässt sich übersichtlich beschreiben als bestehend aus

- der aussagenlogischen Basis
- den K_{lin}-Axiomen
- einer S5-Axiomatik für „N“
- einer S5-Axiomatik für „□“
- den folgenden Interaktions-Axiomen:

[Brückenaxiom]	(PN)	$\ulcorner PN\ \alpha \rightarrow NP\ \alpha \urcorner$	
[Box-Hierarchie]	(□/N)	$\ulcorner \Box\ \alpha \rightarrow N\ \alpha \urcorner$	
[Produkt-Gesetze]	(com)	$\ulcorner \Diamond\ P\ \alpha \equiv P \Diamond\ \alpha \urcorner$	$\ulcorner \Diamond\ F\ \alpha \equiv F \Diamond\ \alpha \urcorner$
	(chr)	$\ulcorner P\Box\ \alpha \rightarrow \Box P\ \alpha \urcorner$	$\ulcorner F\Box\ \alpha \rightarrow \Box F\ \alpha \urcorner$
		$\ulcorner \Diamond\ H\ \alpha \rightarrow H \Diamond\ \alpha \urcorner$	$\ulcorner \Diamond\ G\ \alpha \rightarrow G \Diamond\ \alpha \urcorner$

Herleitungsregeln sind Subst, MP und NEC-Regeln für „G“, „H“ und „N“ und eine **Nichtreflexivitätsregel** für „G“ und „H“.[40]

---

[39] Übrigens sind seine Bewertungsvorschriften für „F“ und „G“ alles andere als einfach oder natürlich. Die darin vorkommende gekünstelte Fallunterscheidung kann er nur dadurch motivieren, dass sein HAL eben eine technische Mittelstellung zwischen ockhamistischer und Peircescher Logik einnimmt, die dann metaphysisch attraktiv ist, *wenn* es plausibel ist, diese seinem Sinne (An-Kontext am Zeitenende bzw. Zeitenanfang) zu deuten. Doch, wie oben ausgeführt, *ist* es nicht plausibel, sie so zu deuten. Damit fällt die Rechtfertigung weg, und es bleibt der Eindruck des Gekünstelten.

[40] Vgl. I 1.2.1. Kutscheras Beweis beruht auf ausgiebiger Verwendung der Nichtreflexivitätsregel. Es gibt auch einen Beweis für eine korrekte und vollständige Axiomatisierung von T×W ohne Nichtreflexivitätsregel von Di Maio und Zanardo in „A Gabbay-rule free axiomatization of T×W validity“ (1998). Die dort als vollständig bewiesene Axiomatik ist nicht etwa einfach die von

Streng genommen ist ein S5-Axiom für die Box redundant, weil herleitbar.[41] Von den (chr)-Gesetzen ist die zweite Zeile aus der ersten herleitbar, und Kutschera nennt zu Recht nur die erste. Kutschera verwendet ausgiebig das Theorem „$\Box$Gp → G$\Box$p“, das problemlos aus dem zweiten (com)-Gesetz folgt.[42] Die Rolle der Produkt-Gesetze ist klar. Ebenso ist klar, dass das Box-Hierarchie-Axiom gelten muss, dass aber seine Umkehrung nicht gilt: Was sich auf *jeden* Fall ergeben hätte, ist auch historisch notwendig. Aber was historisch notwendig ist, etwa die Seeschlacht nach ihrem Stattfinden, hätte sich nach Ansicht eines Indeterministen nicht in jedem Fall ergeben müssen.

Aus dem Hierarchie-Axiom und der Tatsache, dass „N“ und die Box S5-Operatoren sind, folgt übrigens bereits, dass die (com)- und (chr)-Gesetze auch für dieses Operatorenpaar gelten **[B5]**.

Das Brückenaxiom ist der besonderen Einschränkung auf A_t geschuldet **[B6]**. Es erinnert von seiner Form her stark an die (chr)-Gesetze. Es fällt aber auf, dass sein Pendant, etwa in der Konkretisierung „FNp → NFp“ nicht allgemeingültig ist und deshalb natürlich auch nicht als Axiom vorkommen darf (ebensowenig das damit äquivalente „MGp → GMp“). Denn damit würde verboten, dass sich mögliche Weltverläufe jemals auseinander entwickeln könnten. Der Verallgemeinerung dieser Formel würde ja als semantische Einschränkung gerade entsprechen: Wenn h A_t h’ und t A_1 t’, dann h $A_{t'}$ h’! Es gilt also nur die eine Hälfte der denkbaren (chr)-Gesetze für die Zeitoperatoren und die *historischen* Modaloperatoren „N“ und „M“. Die Allgemeingültigkeit von „PNp → NPp“ bei gleichzeitiger Nicht-Allgemeingültigkeit von „FNp → NFp“ spiegelt wider, dass LF- bzw. T×W-Modelle zwar in Richtung Vergangenheit linear sind, aber in Richtung Zukunft verzweigt sein können. Aus dem Brückenaxiom lässt sich schnell „MHp → HMp“ herleiten **[B7]**.

Ähnliche Beobachtungen lassen sich bezüglicher der (com)-Gesetze für die Zeitoperatoren und die historischen Modaloperatoren machen. Diese müssten ja wie folgt lauten:

(com)(a) $\ulcorner \mathrm{MP}\,\alpha \to \mathrm{PM}\alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner \mathrm{HN}\alpha \to \mathrm{NH}\,\alpha \urcorner$[43]
(b) $\ulcorner \mathrm{FM}\,\alpha \to \mathrm{MF}\alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner \mathrm{NG}\alpha \to \mathrm{GN}\,\alpha \urcorner$
(c) $\ulcorner \mathrm{PM}\,\alpha \to \mathrm{MP}\alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner \mathrm{NH}\alpha \to \mathrm{HN}\,\alpha \urcorner$
(d) $\ulcorner \mathrm{MF}\,\alpha \to \mathrm{FM}\alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner \mathrm{GN}\alpha \to \mathrm{NG}\,\alpha \urcorner$

Wiederum gilt nur die Hälfte davon. Hiervon gelten (c) und (d) nämlich *nicht* als TxW-Gesetze, wie man an den folgenden Gegenbeispielen sieht:

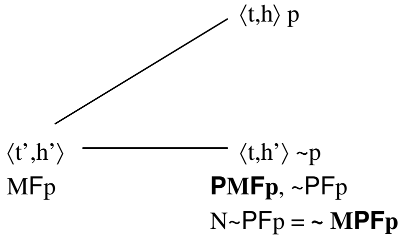
Kutschera verwendete Axiomatik *ohne* Nichtreflexivitätsregel, sondern deutlich komplizierter, und muss hier nicht weiter interessieren.

[41] Kutschera, „T×W-completeness“, S.244.

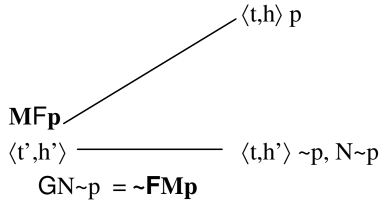
[42] Vgl. Kap. I 2.1. Kutschera behauptet a.a.O. ohne Beweis, dass dieses Theorem allein aus den beiden S5-Axiomatiken, dem Box-Hierarchie-Axiom und den (chr)-Gesetzen folgt (S.244). Er verzichtet daher auf die Nennung der (com)-Gesetze in der Axiomatik. Der explizite Beweis findet sich spätestens bei Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.164.

[43] Für die Äquivalenz vgl. B4 zu Kap. I 2.

zu (c)



zu (d)



Dagegen sind (a) und (b) T×W-allgemeingültig **[B8]**. Aufgrund von Kutscheras Vollständigkeitsbeweis lässt sich festhalten, dass sie auch mit der von ihm angegeben Axiomatik herleitbar sein müssen. Die Beweise sind auch *in concreto* bekannt **[B9]**.[44]

Da LF nichts anderes ist als ein um zwei Zusatzforderungen angereichertes T×W, kann man sichergehen, dass eine korrekte T×W-Axiomatik auch für LF korrekt ist. Außerdem ist sie zweifellos ziemlich leistungsfähig. Ferner lässt sich *ein* spezieller Zug von LF, nämlich die Verinselungsfreiheit, offenbar durch das Zusatzaxiom $\ulcorner \Diamond\alpha \rightarrow \mathsf{PMF}\,\alpha \urcorner$ erzwingen **[B10]**.

So weit, so gut. Das Problem ist: Mit Kutscheras Axiomatik ist die Formel „p → Np" nicht herleitbar. Aber sie ist LF-allgemeingültig. Das liegt, wie sich schon sehen ließ, an der Historizitätsforderung für LF. Es ist aber wiederum nicht so, dass ganz allgemein $\ulcorner \alpha \rightarrow N\alpha \urcorner$ LF-allgemeingültig ist. Das würde ja auch den N-Operator trivialisieren. So erhält, wie bereits bemerkt, zwar „Fp" an t_1 bezüglich h_2 den V-Wert 1, nicht aber „NFp", es erhält also „Fp → NFp" den Wert 0. Kurz: Die uniforme Substitution versagt für LF.

Woher weiß man, dass mit Kutscheras Axiomatik die Formel „p → Np" nicht herleitbar ist? Erstens lässt TxW die unter 1.3 diskutierten nicht intendierten Modelle zu. Diese falsifizieren „p → Np". „p → Np" ist gar nicht TxW-allgemeingültig. Zweitens würde die Herleitbarkeit von „p → Np" zusammen mit der Substitutionsregel die Herleitung der nicht-allgemeingültigen Formel „FNp → NFp" erlauben. Aus beidem folgt: Wenn die Formel mit der T×W-Axiomatik „p → Np" herleitbar wäre, so wäre die T×W-Axiomatik nicht korrekt. Sie ist aber korrekt. Also ist „p → Np" nicht herleitbar. Wird also die Vollständigkeit der T×W-Axiomatik nicht um den Preis intuitiv sehr störender nicht intendierter Modelle erkauft?

Stefan Wölfl hat in einer beeindruckenden, auf T×W-Strukturen aufbauenden Arbeit bei der Diskussion dieses Punktes versucht, die Kutschera-Axiomatik damit zu verteidigen, dass „p → Np" als allgemeingültige Formel[45] für die intendierte Deutung von T×W auch gar nicht plausibel wäre:[46] Es gebe keine klare Abgrenzung rein von der Gegenwart handelnder Aussagen von Aussagen, die einen Bezug auf die kontingente Zukunft mit beeinhalten. Es mag deshalb oberflächlich gesehen

[44] Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik" (1999), S.164.
[45] Es ist i.F. unbedingt zu beachten, dass von der Formel und nicht vom entsprechenden Schema die Rede ist!
[46] Vgl. in der Einleitung zu Wölfl, a.a.O., S. xvi f.

präsentische Aussagen, die mit einfachem „p“ zu formalisieren wären, geben, für welche die als „Np“ zu formalisierende Behauptung „Es steht fest, dass p“ genau so unplausibel wäre wie der Schluss von „Fp“ auf „NFp“.

Ich bin mit dieser Verteidigung nicht recht glücklich. Sprachen für das tempomodale Kontinuum sind für nichts anderes entwickelt worden als zur Wiedergabe unserer Intuitionen zur historischen Notwendigkeit. Es kann angesichts dieser Aufgabe kaum als völlig geglückt gelten, wenn ausgerechnet die der zentralen Aussage im Fazit von Aristoteles’ „De interpretatione“ 9, 19a23f[47] entsprechende Formel „$p \rightarrow Np$“ nicht allgemeingültig wird. Eher wird man den Bereich der als Deutung von atomaren Formeln zugelassenen Aussagen einschränken, als auf die Allgemeingültigkeit von „$p \rightarrow Np$“ zu verzichten. Reine Zustandsaussagen für einen Zeitpunkt scheinen dabei durchaus kein Phantom zu sein, dem man hoffnungslos hinterherjagen müsste, sondern lassen sich plausibel beschreiben.[48] Findet man kein anderes Kriterium dafür, was eine rein präsentische Aussage ist, so mag man sogar angeben, dass es sich eben um eine solche Aussage handelt, mit der als Deutung für „p“ gerade „$p \rightarrow Np$“ plausibel ist. Wäre daher der Eindruck gerechtfertigt, dass Kutscheras Versuch der Axiomatisierung der historischen Notwendigkeit gänzlich misslungen ist und Wölfls Verteidigung der Verteidigung des Fuchses in Äsops Fabel ähnelt, die zu hoch hängenden Trauben seien ohnehin zu sauer? Das kommt darauf an, ob man auf etwas Besseres hoffen kann. Es ist alles andere als einfach, auf die Substitutionsregel zu verzichten. Als Wölfl 1999 seine Studie veröffentlichte, sah es zweifellos so aus, dass die T×W-Axiomatik das Beste sein müsste, was man auch für historizistische Modelle jemals bekommen könnte, ihre besondere Eigenschaft, eben die Historizität, sich also der vollständigen Axiomatisierung entzieht.

In jüngster Zeit hat sich in der Sache aber eine neue Perspektive ergeben. Mark Reynolds hat nämlich 2003 eine ausführliche Skizze eines Beweises dafür vorgelegt, dass eine bestimmte Axiomatik für historizistische Modelle korrekt *und vollständig* ist.[49] Die Sprache, die Reynolds untersucht, enthält keine Kutschera-Box. Diese Axiomatik enthält zunächst die K_{lin}-Axiome, S5-Axiome für „N“ und die folgenden Interaktions-Axiome:[50]

(HN) $P\alpha \rightarrow NPM\alpha$
(MB) $G\bot \rightarrow NG\bot$.

Die von Reynolds vorgeschlagene Axiomatik enthält außerdem die üblichen NEC-Regeln und eine Irreflexivitätsregel. Aber, worauf Reynolds ausdrücklich hinweist:[51]

[47] Vgl. Kap. II 1.4.1.
[48] Vgl. Lewis, Einleitung zu Band II der „Philosophical Papers“, S. IX-X.
[49] Reynolds, „An Axiomatization of Prior’s Ockhamist Logic of Historical Necessity“, in: P. Balbiani et al. (Hrsg.): Advances in Modal Logic 4, London: King’s College Publications 2003, S.355-370. Zugänglich unter http://www.aiml.net/volumes/volume4.
[50] Reynolds, a.a.O. S.358f.
[51] Reynolds, a.a.O. S.359.

Sie enthält keine Substitutionsregel. Dafür enthält sie die folgende Regel, die nun harmlos ist:

(ANF) $p \rightarrow \mathrm{N}p$ für beliebige atomare Formeln p.

Was fängt den Wegfall der Substitutionsregel auf? Alles, was die Axiomatik von Reynolds sonst noch enthält, ist ein so genanntes „limit closure schema". Das hat es allerdings in sich. Reynolds beschreibt es so:

> It is an infinite sequence of axioms one for each n>0. Suppose $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$ are any formulas. The schema allows
>
> $$\text{LC} \quad \Box G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (\Diamond\alpha_i \rightarrow \Diamond F\Diamond\alpha_{i+1}) \rightarrow \Diamond G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (\Diamond\alpha_i \rightarrow F\Diamond\alpha_{i+1})$$

Dabei ist „$G_{\leq}$" ein *reflexiver* G-Operator ($G_{\leq}\alpha := G\alpha \wedge \alpha$). Box und Raute sind in der hier verwendeten Notation „N" und „M". Und das große Konjunktionszeichen verhält sich zu „$\wedge$" wie das Summenzeichen zu „+".

Ist dies das „missing axiom",[52] so ist es von eher begrenztem Gebrauchswert. Das macht die Leistung von Reynolds natürlich nicht weniger beeindruckend. Dennoch soll im Folgenden für LF bei Bedarf Kutscheras Axiomatik für TxW verwendet werden, auch wenn sie für LF unvollständig ist. Die Hauptsache ist die Korrektheit. Zudem ist das von Reynolds erzielte Ergebnis zur Zeit noch mit etwas Vorsicht zu behandeln.[53] Tatsächlich weicht die TxW-Axiomatik, abgesehen von der S5-Axiomatik für die Kutschera-Box und die entsprechenden Interaktions-Axiome *nur* darin von Reynolds ab, dass sie die Substitutionsregel enthält und dafür (ANF) und (LC) nicht enthält. Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass (HN) äquivalent ist mit Kutscheras Brückenaxiom **[B11]**. Ferner lässt sich (MB) mit der TxW-Axiomatik herleiten, und auch die Herleitbarkeit von „$Pp \rightarrow NPp$" bei gleichzeitiger Nicht-Herleitbarkeit von „$Fp \rightarrow NFp$" ist kein Problem **[B12]**.

---

[52] Ebd.

[53] Reynolds, S.356: „A full version of the proof (over 100 pages) is in preparation." Nach freundlicher Auskunft von Mark Reynolds war dies auch Ende 2006 noch der Stand der Dinge.

KAPITEL 2

Welcher Indeterminismus – und warum?

2.1. Einleitung

Es mag zunächst etwas verwundern, dass sich ein Kapitel zur Frage „Warum Indeterminismus?“ nicht am Anfang dieser Studie findet, sondern mitten darin. Zugegeben: Eine *umfassende* Beantwortung der Frage „Warum Indeterminismus?“ könnte wirklich nicht erst an dieser Stelle beginnen, sondern müsste ein ganzes – und ganz anderes – Buch umfassen. Darum kann es also hier nicht gehen, sondern um ein viel begrenzteres Ziel: eine Skizze von Gründen, warum man indeterministische Logiken ernsthaft benutzen könnte, und eine kurze Darstellung derjenigen Gründe, die mich dazu veranlassen, eine solche Logik für wünschenswert zu halten. Die philosophische Auseinandersetzung mit der deterministischen Position hilft, die eigenen Modelle recht zu verstehen und nicht zu überschätzen, aber auch nicht zu verharmlosen.

Zunächst (2.2) wird es darum gehen, die Art von Indeterminismus einzugrenzen, zu dessen Darstellung LF-Modelle sinnvoll sind. Es ist dies ein (a) ontischer Indeterminismus, der (b) vom lediglich epistemischen Indeterminismus begrifflich zu unterscheiden ist, (c) für den Naturgesetze keine Rolle spielen und der sich (d) als Position anschaulich machen lässt, die einen epistemischen Indeterminismus relativ auf ein optimal informiertes Wesen nach sich zieht.

Danach (2.3) sollen verschiedene Bündel von Gründen für diesen Indeterminismus vorgestellt werden:

- naturphilosophische Gründe (2.3.1)
- handlungstheoretische Gründe (2.3.2)
- existenzielle Gründe (2.3.3).

Im Zusammenhang mit den *naturphilosophischen Gründen* (2.3.1) wird sich schnell herausstellen, dass eine gewisse Art von indeterministischer Naturauffassung vom ontischen Indeterminismus vorausgesetzt wird, es sich bei ihrer physikalischen Ausarbeitung aber noch nicht unbedingt um die heutige Quantentheorie handeln muss.

Im Zusammenhang mit den *handlungstheoretischen Gründen* (2.3.2) geht es darum, einerseits vor naiven Annahmen zu warnen, andererseits eine differenzierte Sichtweise gegen deterministische Einwände zu verteidigen. Besonders zu berücksichtigen ist der noch junge und sehr differenzierte STIT-Ansatz von Belnap und seinen Mitstreitern. Dabei wird sich klarstellen lassen, (a) *wie* das Ausscheiden von Alternativen vor sich geht, nämlich zwar durch die Tat oder durch ein Geschehen, nicht jedoch als Ergreifen von Weltverläufen, und (b) dass sich die Alternativenwahl *mit* einem Zeitpunkt entscheidet, nicht *an* ihm.

Zu den *existenziellen* Gründen (2.3.3) lässt sich zwar hier sofort und ohne weiteres festhalten: Weder das Gefühl des Selbsthandelns noch die Möglichkeit normgeleiteten Verhaltens noch die Vorwerfbarkeit einer Tat setzen den Indeterminismus voraus. Es lässt sich aber dennoch skizzieren, dass (a) Humes Ansicht, warum Vorwerfbarkeit *nur* mit einer deterministischen Theorie zu haben ist, letztlich nicht zu überzeugen vermag und (b) worin Vorwerfbarkeit im Rahmen eines differenzierten, nicht-naiven Indeterminismus bestehen könnte. Entgegen einer traditionellen Tendenz zur Meinung, der Determinismus führe nicht zum Fatalismus soll schließlich dafür plädiert werden, dass die Ablehnung des Fatalismus in seiner für das Selbstverständnis *wirklich* bedrohlichen Form doch als starke und respektable Motivation für die Befürwortung des Indeterminismus angesehen werden kann.

Als Fazit (2.4) folgt eine abschließende Einschätzung des argumentativen Status der vorangegangenen Überlegungen.

2.2 Welcher Indeterminismus?

Was führt dazu, dass man ein LF-Modell als *indeterministische* Struktur des tempo-modalen Kontinuums deuten kann? Die Antwort auf diese Frage erlaubt zugleich eine Antwort auf die Frage, von welcher Art von Indeterminismus die Rede sein kann, wenn man die grafischen Darstellungen von LF-Modellen als Bilder für ihn gebraucht. Das Typische an LF-Modellen ist dabei, dass gilt: Zwei bis zu einem Zeitpunkt t völlig identische Interpretationsfunktionen von atomaren Formeln können ab t unterschiedlich fortgesetzt werden. In der Deutung heißt das: Zu einem Zeitpunkt t mit einem bestimmten Weltzustand und einer ganz bestimmten Vergangenheit stehen in der Zukunft in einem ganz bestimmten zeitlichen Abstand von t mehrere verschiedene Folgezustände als realisierbare Alternativen offen.

Damit ist deutlich, wieso solche Modelle nicht Modelle einer deterministischen Weltentwicklung sind: Der Determinismus ist – als kontradiktorisches Gegenteil des hier relevanten Indeterminismus – dadurch definiert, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt t mit einem bestimmten Weltzustand und einer ganz bestimmten Vergangenheit im selben zeitlichen Abstand nur je ein einziger Folgezustand realisierbar ist.

Es geht nicht um einen *lediglich* epistemischen Indeterminismus. Dennoch impliziert der ontische Indeterminismus den epistemischen Indeterminismus. Denn was nicht vorher feststeht, kann man auch nicht vorher wissen. Eine anschauliche (wenn auch nicht wesentliche) Beschreibung des ontischen Indeterminismus wäre, dass man, wenn er wahr ist, an einer gewissen tempo-modalen Position von einem maximal täuschungsfreien und optimal informierten Wesen nicht sagen kann, die ganze Zukunft sei ihm bekannt **[B1]**. Dabei ist es für das Argument unwesentlich, ob das hypothetische Wesen alles zugleich sieht oder nacheinander **[B2]**.

Um Klarheit darüber zu gewinnen, inwiefern ein Vertreter des ontischen Indeterminismus den Satz vom zureichenden Grunde unterschreiben kann, sollte man sich den Satz in der dankenswert präzise gehaltenen Formulierung vor Augen führen, die Leibniz ihm gegeben hat:

> ...aucun fait ne sauroit se trouver [...] existant, sans qu'il y ait une raison suffisante, pourquoi [a] il en soit ainsi [b] et non pas autrement...[1]

Das „non pas autrement" ist nicht etwa bloß eine Worterklärung des „ainsi", sondern der Satz besteht inhaltlich aus zwei Teilen:

(a) Nichts geschieht ohne hinreichenden Grund, warum es geschieht;
(b) nichts geschieht ohne hinreichenden Grund, warum es nicht anders kommt.

Der Vertreter des ontischen Indeterminismus kann behaupten, dass beides voneinander unabhängig ist. In der Tat hat es für die Interaktion zweier Dinge A und B, so wie sie sich tatsächlich abgespielt hat, einen hinreichenden Grund gegeben: Die Beschaffenheit von A und die von B und die des Rests der Welt (der „Randbedingungen"). Denn gerade *daraufhin* (und das heißt nicht nur: „danach") ist ja *als Resultat* des Zusammentreffens geschehen, was geschehen ist, wenn dies auch nicht durch die Beschaffenheit von A, B und des Rests der Welt *determiniert* war. Denn es hätte auch anderes geschehen können. Die Beschaffenheit von A und die von B und die des Rests der Welt sind also kein hinreichender Grund dafür, warum es nicht anders gekommen ist. Man ist gewohnt, *hinreichende* Bedingungen mit *eindeutigen* Bedingungen zu identifizieren. Beides ist aber begrifflich voneinander zu unterscheiden: Man kann behaupten, dass für den Eintritt eines Ereignisses insofern hinreichende Bedingungen vorlagen, als für sein Eintreten keine weiteren Bedingungen erfüllt sein mussten. Und man kann behaupten, dass dies *nur* für den Eintritt *dieses* Ereignisses der Fall war. Im zweiten Fall macht man eine stärkere Behauptung, die von der Behauptung im ersten Fall nicht impliziert wird.[2]

Dass der Indeterminist, der ernsthaft LF-Modelle zur Erläuterung seiner Position heranzieht, meint, dass A und B in ihrem Wesen und die Randbedingungen nicht das Ergebnis determinieren, heißt aber noch nicht etwa, dass bei ihrem Zusammentreffen einfach alles geschehen könnte. Ganz im Gegenteil! Das Wesen eines Dinges mag in

---

[1] Leibniz: Monadologie §32: „... keine Tatsache [kann sich] als [...] existierend herausstellen [...], ohne daß es einen zureichenden Grund gäbe, warum es sich so und nicht anders verhält..." (Übersetzung: H.H. Holz).

[2] Wird dagegen eingewandt, es sei dann nicht zu verstehen, in welchem Sinne die Beschaffenheit von A und die von B und die des Rests der Welt *hinreichend* waren, für das, was geschehen ist, so wird das Herz des Indeterministen nicht am Satz vom zureichenden Grunde hängen. Jedenfalls ist gut zu sehen, in welcher Lesart er ihn, wenn überhaupt, befürwortet und in welcher er ihn ablehnt. Sicherlich sollte man nicht um Worte streiten, wenn man im Zweifelsfall zwei Bedeutungen von „hinreichend" unterscheiden kann: „hinreichend$_1$" = „Alle notwendigen Bedingungen liegen vor, und es muss nichts mehr hinzukommen"; „hinreichend$_2$" = „Es liegen solche Bedingungen vor, dass das fragliche Ereignis nicht mehr ausbleiben kann". Indeterministen müssen beides nicht für gleichbedeutend halten.

ganz erheblichem Maße darin bestehen, dass es die Möglichkeiten von Interaktions-Resultaten einschränkt – sonst wäre das Ding bloßer Spielball, ja eigentlich nicht einmal das, denn ein Ball setzt Widerstand entgegen. Aber warum soll die Möglichkeit der Interaktion zweier Dinge bei identischen Randbedingungen immer nur genau *eine* sein? Eine Einschränkung findet auch dann statt, wenn von unbegrenzten Möglichkeiten von Interaktions-Resultaten mehrere übrig bleiben. Und übrigens mögen die Randbedingungen *oft* auch auf solche Art zur „nomological machine“[3] geordnet sein, dass nur *ein* Resultat einer Interaktion möglich bleibt. In diesem Fall liegen für alle Resultate bis auf eines hinreichende Hinderungsgründe vor. Es gilt aber:

> Es geschieht etwas nur, wenn keine hinreichenden Hinderungsgründe dagegen vorliegen, dass es geschieht.

Man mag das den **Satz vom unzureichenden Hinderungsgrund** nennen. Der Vertreter des ontischen Indeterminismus wird ihn ohne weiteres akzeptieren. Sicher hat es für das Verhalten von A und B bei ihrem Zusammentreffen keinen hinreichenden Hinderungsgrund gegeben – sonst wäre es nicht so geschehen; trotzdem aber hätte anderes geschehen können, woran gleichfalls nichts gehindert hätte. Kurz: Auf die Frage „Warum?“ ist manchmal in vollem Ernst die beste Antwort: „Warum nicht?“.

2.3. Warum dieser Indeterminismus?

2.3.1 Naturphilosophische Gründe

Hat die Physik uns inzwischen gelehrt, dass die Natur sich indeterministisch verhält? Oft liest man mit Berufung auf die Quantentheorie, dass das so sei. Schon deren Väter haben sich seit den 20er Jahren Gedanken in diese Richtung gemacht.[4] Zweifellos hat die Entwicklung der Quantentheorie und einer Möglichkeit, sie indeterministisch zu deuten, den Fall für den Indeterminismus auf eine Weise gestärkt, die Ende des 19. Jahrhunderts wohl noch niemand erwartet hätte. Man sollte jedoch vorsichtig sein, diese Entwicklung als Beweis für den Indeterminismus oder auch nur als Grundlage weiterer philosophischer Argumentation zu nehmen: Zunächst sollte man nicht vergessen, dass die Quantentheorie eine naturwissenschaftliche Theorie ist und naturwissenschaftliche Theorien manchmal durch erfolgreichere abgelöst werden.

---

[3] Diesen glücklichen Begriff hat Nancy Cartwright geprägt. Vgl. z.B. Cartwright, „Where Do Laws of Nature Come From?“ (1997). Zum Versuch einer metaphysisch-realistischen Lesart der Theorie Cartwtrights vgl. mein „The Invisible Lecturer“ (1998). Vom Wesen der Dinge würde sie selbst wohl kaum sprechen, scheint aber eine solche Lesart auch nicht für unmöglich zu halten (vgl. ihre Antwort auf „The Invisible Lecturer“ in „Comments and Replies...“ (1998)).

[4] Zur Einführung Esfeld, „Einführung in die Naturphilosophie“ (2002), Kap.5, S.46-72, sowie, m.E. unübertroffen, Feynman, „QED“ (1985).

Außerdem kann es wohl gegenwärtig auch unter Annahme der Wahrheit der Quantentheorie noch nicht als gesichert gelten, dass man sie wirklich indeterministisch deuten sollte.[5] Schließlich muss es fraglich erscheinen, ob eine physikalische Theorie selbst je den Ausschlag geben kann, ob man sie im Sinne des ontischen Indeterminismus oder im Sinne eines lediglich „nomischen" Determinismus deuten muss, der mit dem ontischen Determinismus kompatibel ist, weil er nur besagt: Die Naturgesetze lassen den Ausgang der Interaktion offen, aber das Wesen von A und B legt ihn fest.

Wenigstens zeigt aber die Möglichkeit einer indeterministischen Deutung der Quantentheorie, dass eine indeterministische Theorie in der Naturwissenschaft ihren Platz haben kann, dass sie denkmöglich ist. Ihr Erfolg hat uns daran gewöhnt, das Kausalgesetz nicht mehr als indisponibel anzusehen. Insofern wird man der Quantentheorie schon heute einen pädagogischen Effekt nicht absprechen können, der den Horizont für vielleicht im Detail ganz anders gestaltete indeterministische Theorien geöffnet hat.[6]

2.3.2 Handlungstheoretische Gründe

2.3.2.1 Die problematische Metapher der Weggabelung

Die typischen Beispiele, die für Verzweigungen in verzweigten Strukturen angegeben werden, sind nicht mikrophysikalische Prozesse, sondern Entscheidungen von Handelnden. Der Gedanke, man solle solche Modelle am besten zur handlungstheoretischen Analyse von Entscheidungssituationen nutzen, hat inzwischen den Charakter eines Forschungsprogramms angenommen.[7] Am einfachsten erklärt man den Ansatz, indem man einen Verzweigungspunkt mit einer Weggabelung vergleicht, und die Entscheidung dafür, welchem Weg man folgen soll, als paradigmatisch für Entscheidungen überhaupt ansieht. Dieses Bild hat eine lange

---

[5] Esfeld, a.a.O., S.70.

[6] Es ist zwar schwer vorstellbar, dass auf der ontologischen Grundebene nur perfekte „nomological machines" vorkommen und auf einer auf der Grundebene supervenierenden weiteren ontologischen Ebene wieder reale Verhaltens-Alternativen zur Verfügung stehen sollen. Doch sind einmal auf der Grundebene reale Alternativen gegeben, so ist nicht einzusehen, warum sich dies nicht auf anderen Ebenen ebenso verhalten soll. Ob und wie dabei der Indeterminismus auf der Grundebene auf nachvollziehbare Weise auf andere Ebenen durchschlägt, ist dabei nicht von prinzipiellem Interesse. Dass Auswirkungen indeterministischer Quanteneffekte sich wegen der großen Mengen beteiligter Teilchen auf der makroskopischen Ebene verlieren, scheint nicht in jedem Fall zuzutreffen, vgl. McCall, „A Model of the Universe", S.275. Der Vorschlag von Eccles („How the Self Controls its Brain" (1994)) ist sicher zu simpel (vgl. Esfeld, a.a.O., S.131), der von McCall (a.a.O., S.275 - 277) sehr skizzenhaft.

[7] Frühes Beispiel: Kutschera, „Bewirken" (1986). Sehr intuitiv: McCall, „A Model of the Universe" (1994), Kap. 9 "Decision and Free Will", S. 250 – 279. Literatur bis 1999: Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik", S.xxi; umfassend auf neuerem Stand: Belnap, Perloff und Xu, „Facing the Future" (2001); ereignislogische Ausdifferenzierung: Kienzle, „Die Bestimmung des Janus" (in Vorb.).

Tradition, auf die mit dem Stichwort der *gubernatio*,[8] des Steuerns in diese oder jene Richtung, Bezug genommen werden soll. Üblich ist es dabei, zwei Alternativen mit je unterschiedlichen Zielzuständen an die Tafel zu zeichnen und zu kommentieren, dies seien zwei mögliche Welten zwischen denen der Handelnde wähle.

Jemand, der in radikaler Weise an die Möglichkeit der punktuellen, von allem Vorhergehenden unabhängigen *gubernatio* glaubt (evtl. zusammen mit der Annahme, der Geist als gubernator könne ziemlich direkt Determinationslücken auffüllen, die ihm eine indeterministische Physik offen lässt[9]), kann natürlich LF-Modelle in dieser Weise interpretieren. Doch inzwischen scheint mir hier eine Warnung vor Naivität, ja selbst vor der Tendenz zu Allmachtsfantasien, angebracht, und dies zugleich mit einer Klarstellung, dass und wie man LF-Modelle auf vernünftige Weise als realistisch befürworten kann.

Die Metaphorik der *gubernatio* an der Weggabelung ist ebenso eingängig wie fragwürdig. Ein nur scheinbar simpler Punkt ist, dass man an einer Weggabelung zu Fuß tatsächlich stehen bleiben und sich nach einiger Überlegung für einen Weg entscheiden kann, während im verzweigten Modell schon das Zögern etwas ist, das alle Alternativen, in denen man nicht zögert, verabschiedet, weil die Zeit vom Zögern unbeeinflusst „voranschreitet".[10] Wenn schon ein Sich-Gabeln eines Weges paradigmatisch sein soll, dann also eher eine Abbiegespur vor einer Autobahnausfahrt, an der man in diesem Tempo vorbeifahren, auf die man aber auch im selben Tempo wechseln kann.

Selbstverständlich kann der Determinist zu dieser Situation ebenso eine Geschichte erzählen wie der Indeterminist, etwa die folgende:

> Wenn ich abbiege, so z.B. deshalb, weil mich der Umstand des kurz zuvor gesehenen Raststättenschildes dort Kaffee erwarten lässt und ich eine Präferenz dafür habe, beim Autofahren nicht müde zu sein. Diese Präferenz und das Wissen um Raststätten und Kaffee habe ich erworben, meine Müdigkeit hat eine Ursache. Wenn mein Gedanke „Soll ich jetzt abbiegen oder nicht?" ein Teil des Kausalprozesses ist, in dessen Verlauf ich abbiege, so muss man sagen, dass die Alternative, nicht abzubiegen, mir zwar als theoretische Möglichkeit in den Kopf gekommen war, ja, so wie die Dinge standen, sogar in den Kopf kommen musste, als *wirkliche* Alternative, so wie ich und die Umstände waren, aber nie bestand.

---

[8] Traditionellerweise (vgl. Thomas von Aquin, „Summa Theologica", I^a q 103 a5) wird Gott auch als *gubernator rerum* konzipiert. Wie bei der causa sui, wo dies ausdrücklich geschah, (vgl. den entsprechenden Artikel im „Historischen Wörterbuch der Philosophie" von Ritter (Hg.)) ist aber auch eine Übertragung auf den Menschen denkbar.

[9] Vgl. Eccles, a.a.O.

[10] Es scheint mir also plausibel, in diesem Sinne Menschen und erst die Natur insgesamt als das zu konzipieren, was in der Terminologie des STIT-Ansatzes „busy chooser" genannt wird: Zu *jedem* Zeitpunkt in der kontinuierlichen Zeit werden Alternativen „abgestoßen". Vgl. dazu Belnap / Perloff / Xu, „Facing the Future", S.49-51. McCall ("Choice Trees" (1990), S.241f) reserviert den Ausdruck "choice" für bewusste Entscheidungen und zweifelt für diese zu Recht an, dass es davon „every moment" (S.241) eine gibt.

Die vielleicht beste Plausibilisierung der *gubernatio* findet sich bei Storrs McCall.[11] McCall hält „criterionless choice", den deutlichsten Fall von gubernatio, zwar nicht für den Standardfall, aber doch für denkbar und lehrreich, um ein Moment der „deliberation" und ein Moment der radikal freien „decision" voneinander zu unterscheiden. McCall verdeutlicht die Möglichkeit von „criterionless choice" an einer „modern version of the dilemma of Buridan's ass",[12] dem „railroad dilemma":

> „You are hiking with your spouse in a wild horseshoe-shaped valley with steep sides through which runs a railway line, and while you are crossing the track a heavy branch falls from a tree, pinning your spouse's leg. While pulling vainly on the branch you hear the whistle of an approaching train. You could succeed in flagging down the train if you ran down the track, but the echoes in the valley make it impossible to tell which direction the train is coming from. Game theory tells us that running in either one of the two possible directions is better than staying put, but exercising our powers of *liberum arbitrium indifferentiae* in these circumstances is not easy [... However, t]here *are* no doubt persons who have the power to choose between these equally balanced delib[eration] reasons, when much hangs on the choice."[13]

Doch es ist klar, dass ein Determinist von dieser Geschichte als Beispiel für *gubernatio* unbeeindruckt bleiben wird. Denn er wird sagen:

> Auch wenn es dem Handelnden selbst nicht einsichtig ist, so ist die Alternative, in der er dahin läuft, wohin er läuft, die einzige, die je wirklich offen stand, weil allein für sie hinreichende Ursachen vorlagen – sonst würde sie ja nicht verwirklicht.[14]

Aber auch wenn der Indeterminist akzeptieren muss, dass der Determinist bei der Beschreibung von Entscheidungsprozessen nicht sprachlos ist, so ist es doch nicht völlig unplausibel, wenn er darauf besteht, es hätte z.B. sowohl die Alternative offen gestanden abzubiegen, als auch die, nicht abzubiegen.

Allerdings muss er sich fragen lassen, (1) welche Alternativen im realistischen Fall bestehen und in welchem Sinn man von Wahl sprechen kann; (2) wie die zeitliche Feinstruktur einer ergebnisoffenen Entscheidung aussieht.

2.3.2.2 Was für Alternativen? Welche Wahl? – Exkurs zu STIT

Zur ersten Frage bemerkt man schnell, dass die Entscheidung nicht wirklich zwischen zwei einzelnen möglichen Weltverläufen als Alternativen stattfindet, sondern

---

[11] Vgl. Kap. 9 von McCall, „A Model of the Universe".

[12] A.a.O., S. 261.

[13] A.a.O., S. 261f.

[14] Zu beachten ist auch für den Indeterministen, dass hier nicht einfach zu entscheiden ist, ob sich der Handelnde kaum mehr als Handelnder fühlt, indem er sich dem Zufall überlässt, oder ob er sich besonders stark als Handelnder fühlt, indem er sich trotz des Fehlens eines überwiegenden Grundes dafür den Impuls zum Loslaufen gibt.

zwischen sehr großen Bündeln von möglichen Weltverläufen, die auch im einzelnen unüberschaubar sind. Denn mit der Entscheidung abzubiegen bleiben noch sehr viele Kandidaten für die Realisierung im Rennen:

(a) solche möglichen Weltverläufe, „in“ denen zumindest für eine Weile und im Raststättenbereich alles so läuft, wie vermutet, X also friedlich zu seinem Kaffee kommt;

(b) solche möglichen Weltverläufe, in denen X während eines Überfall auf die Raststätte zwei Minuten nach dem Abbiegen, noch mit dem Kaffeebecher in der Hand, erschossen wird.

Da anzunehmen ist, dass X, hätte er von dem Überfall etwas geahnt, wohl weitergefahren wäre, fällt es schwer, davon zu sprechen, er hätte diesen möglichen Weltverlauf *gewählt*. Obwohl er im Sinne seiner Entscheidung ist, da er sein Abbiegen enthält, kann man auch nicht davon ausgehen, er habe *diesen* Weltverlauf in seiner Gänze für gut befunden. Hätte er an ihn gedacht, hätte er vielmehr alles getan, um seine Verwirklichung zu verhindern.

Doch die Sache ist noch komplizierter. Während X abbiegen oder weiterfahren mag, mag in China ein Sack Reis umfallen oder stehen bleiben.[15] Angenommen, X biegt ab, und zugleich fällt der Sack Reis um. Soll man nun sagen, X habe mit seinem Abbiegen genau die möglichen Weltverläufe *ausgewählt*, die, um als Kandidaten zur Verwirklichung übrig zu bleiben, *beides* enthalten müssen? Sicher nicht. Allenfalls wird man sagen, X habe durch seine Entscheidung eine ganze Menge möglicher Weltverläufe von der Verwirklichung *ausgeschlossen*, nämlich all die, in denen er nicht abbiegt. Leider konnte X damit den unerwünschten Weltverlauf mit dem Überfall nicht ausschließen. Aber mehr noch: Man sollte außerdem auch nicht denken, die Aussage, X habe alle Weltverläufe, in denen er nicht abbiegt, durch die Entscheidung zum Abbiegen ausgeschlossen, sei gleichbedeutend mit der Aussage, er habe *genau* die möglichen Weltverläufe ausgeschlossen, in denen er nicht abbiegt, und damit habe er doch gewissermaßen die gewählt, in denen er abbiegt. Denn im angenommenen Fall scheiden auch eine Menge möglicher Weltverläufe, *in denen X abbiegt*, als Kandidaten für die Verwirklichung unwiderruflich aus: all die, in denen X abbiegt, aber der Sack Reis stehen bleibt. Soll man sagen, X habe auch die Verwirklichung dieser Weltverläufe *ausgeschlossen*, und zwar ausgerechnet durch seine Entscheidung abzubiegen? Auch das sicher nicht. Allenfalls wird man sagen können: X *wirkt* durch seine Entscheidung abzubiegen *daran mit*, dass nur solche Kandidaten im Rennen bleiben, in denen er abbiegt und der Sack Reis umfällt, indem *er* zumindest all die Kandidaten von der Verwirklichung ausschließt, in denen er weiterfährt.

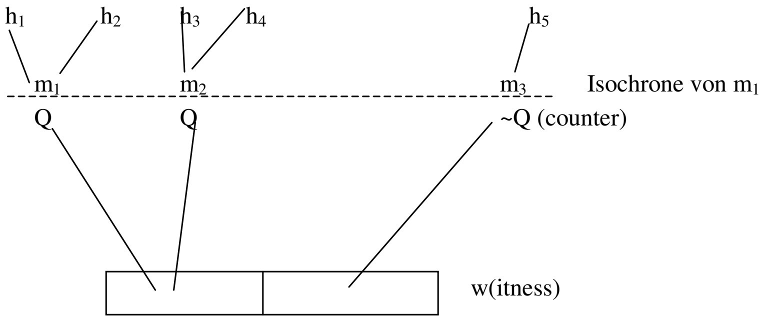
[15] Zu bemerken ist, dass hier der räumliche Abstand argumentativ noch nichts ausmacht. Statt „Ein Sack Reis fällt in China um“ hätte man als Beispiel auch „X muss niesen“ nehmen können, wobei er natürlich gerade da niest, wo er ist und abbiegt.

Es ist an dieser Stelle darauf einzugehen, wie sich der inzwischen beeindruckend weit ausgearbeitet **STIT**-Ansatz[16] der Forschergruppe um Nuel Belnap[17] zu solchen Überlegungen verhält. „STIT“ ist die Abkürzung für „seeing to it that“, was man ungefähr übersetzen mag als „dafür sorgen, dass“. Handlungsaussagen haben nach Ansicht der STIT-Theoretiker immer die logische Form „a stit: Q“, wobei „a“ für einen Handelnden steht und „Q“ für einen beliebigen „declarative sentence“.[18]

Wahrheitsbedingungen für STIT-Formeln sind auf verzweigten Strukturen mit tempo-modalen Positionen definiert. Bewertungen erfolgen ockhamistisch, also jeweils relativ auf ein Paar aus Alternative und (darin enthaltener) tempo-modaler Position. An einer tempo-modalen Position sind die möglichen zukünftigen Alternativen, zu denen diese Position gehört, in Bündel, so genannte „**choice cells**“, partitioniert. Es gibt nun zwei Sorten von „stit-connectives“: **astit** („achievement stit“) und **dstit** („deliberative stit“), deren Wahrheitsbedingungen sich wiedergeben lassen wie folgt:

> Eine Aussage der Form „a astit: Q“ [etwa: „a hat (zuvor) dafür gesorgt, dass (jetzt) Q“] ist für eine (tempo-modale) Position m und eine Alternative h durch m relativ zum Handelnden a wahr gdw
> (i) es gibt eine Position w („witness“) vor m, so dass für alle m’, h’ gilt :
> Wenn m’ mit m isochron ist und jede Alternative durch m’ zu derselben choice-cell von α an w gehört wie h, dann ist „Q“ für m’ und h’ wahr
> (ii) es gibt wenigstens eine Position m“ („counter“) und Alternative h“ durch m“, so dass m“ mit m isochron ist und „Q“ ist falsch für m“ und h“.[19]

So ist z.B. „X astit Q“ im folgenden Fall für m_1 und h_1 (bzw. h_2) wahr:



[16] Die wichtigsten Grundgedanken finden sind zusammengefasst in Belnap / Perloff / Xu, „Facing the Future“, Kap. 1A (S.5-9), 1C (S.14-18), 2A (S.28-39). Die erste, später im Detail korrigierte, Fassung des Ansatzes ist enthalten in Belnaps und Perloffs „Seeing to it That: A Canonical Form for Agentives“ (1988). Belnap, Perloff und Xu zählen von Kutscheras „Bewirken“ (1986) zu den wichtigsten Einflüssen auf den Ansatz (vgl.S.26).
[17] Auch wenn i.F. immer von *den* Autoren die Rede ist, so zeigen doch alle grundsätzlichen und philosophischen Passagen in „Facing the Future“ den unverwechselbaren Stil Belnaps, bei dem Unterhaltsamkeit und Humor ein natürlicher Nebeneffekt von konsequentem Willen zur Nichtredundanz und Klarheit sind.
[18] Dieser mag selbst wieder STIT-Form haben; so ist die logische Form der Unterlassung „a stit: ~ a stit: p“ im Gegensatz zum bloßen „~ a stit: p“.
[19] Vgl. Belnap / Perloff / Xu, Def. 2-4, S.36.

Die Idee ist: Angenommen, dass m_1 verwirklicht wird, so kann man sagen, dass X dafür sorgt, dass „Q" wahr ist, weil er durch seine Entscheidung für die linke choice cell an w die offen stehenden Alternativen auf h_1 bis h_4 reduziert und die Verwirklichung von h_5 ausgeschlossen hat. Die Bedingungen für dstit lauten:

> Eine Aussage der Form „a dstit: Q" [etwa: „a sorgt dafür, dass Q"] ist für eine (tempo-modale) Position m und eine Alternative h durch m relativ zum Handelnden a wahr gdw
> (i) für alle h' durch m, die zu derselben choice-cell von α an w gehören wie h, gilt : „Q" ist wahr für m und h';
> (ii) es gibt wenigstens eine Alternative h" durch m, so dass „Q" falsch ist für m und h".[20]

Die Autoren von „Facing the Future" kommentieren die Bedingungen für dstit:

> „In the present case, the positive requirement is simply that α should act at m in such a way that the truth of [Q] is guaranteed; α should constrain the histories through m to lie among those on which [Q] is true. The negative requirement ... is that [Q] should not be settled true, so that α's actions can be seen as having some real effect."[21]

Nach dieser Analyse bedeutet für etwas zu sorgen, sein Eintreten zu *garantieren*, bevor es eintritt. Der STIT-Ansatz stellt sich also ohne Umschweife der großen Herausforderung für jede indeterministische Handlungstheorie: Wie ist es möglich, dass einerseits verschiedene Alternativen wirklich *offen* stehen und dass dennoch der Handelnde die tatsächlich gegebenen Alternativen so zuverlässig *einschränken* kann, dass man sagen kann, er sei für die Verwirklichung dessen, was geschieht, ursächlich?

Der „astit"-Form steht die Zukunftsbezogenheit ins Gesicht geschrieben („w *vor* m"). Es ist jedoch zu beachten, inwiefern tatsächlich eine Komponente des „achievement" in der Semantik für „astit" verankert ist: Berücksichtigt wird, ob ein bestimmtes vorliegendes Ergebnis („achievement") Resultat einer vorhergehenden Entscheidung war, nicht, ob sich jemand das mit der Entscheidung bloß vorgenommen hatte. Für dstit ist zu beachten: Eine „dstit"-Aussage kann nur wahr sein, wenn an der „Q"-Stelle eine *futurische* Aussage steht.[22] Es fragt sich: Wie passt diese Analyse zum oben Vorgebrachten?[23]

Einerseits ist zu bemerken, dass der STIT-Ansatz sehr beachtliche und differenzierte Ressourcen hat, um den vorangegangenen Überlegungen gerecht zu werden:

[20] Vgl. ebd. Def. 2-5, S.37.
[21] Ebd.
[22] Vgl. a.a.O., S.37f. Denn nur für eine futurische Aussage kann – bei den von den Autoren befürworteten Alternativen-relativen, „ockhamistischen" Wahrheitsbedingungen – ein „counter" existieren, nicht dagegen für eine präsentische Aussage, die ja, auf Grund der Historizität, in jeder Alternative zum Bewertungsmoment wahr sein muss.
[23] Vernachlässigt sei das – jedoch vielleicht nicht unerhebliche - Problem, dass bei astit ein Ergebnis für eine ganz bestimmte Millisekunde garantiert werden muss (dasselbe Ergebnis mit einer Millisekunde Verzögerung wäre nicht mehr isochron)!

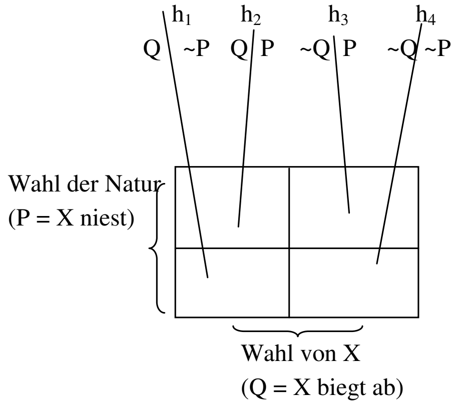
(1) Der STIT-Ansatz ist keine naive *gubernatio*-Theorie, in der einzelne Alternativen ergriffen werden. Die Option zur Auswahl wird ja vernünftigerweise nicht zwischen einzelnen Alternativen, sondern zwischen Bündeln von Alternativen angenommen; *welche* der Alternativen aus der gewählten choice cell verwirklicht wird, steht nicht in der Macht des Handelnden; nur, dass es eine aus der gewählten choice cell sein wird. Die Alternativen sind im einzelnen unüberschaubar.

(2) Das bedeutet auch: Es kann sich eine sehr unerwünschte Zukunft realisieren (z.B. mit Überfall an der Raststätte), die dennoch zur „choice" des Handelnden gehört, weil sie zum beabsichtigten Zeitpunkt das Abbiegen von der Autobahn enthält. Angenommen, eine Überfall-Alternative wird verwirklicht. So sorgt X zum Zeitpunkt des Abbiegens (mit der kurz zuvor erfolgten Entscheidung fürs Abbiegen) dafür, dass er abbiegt (ein astit-Fall); denn alle Alternativen der von ihm gewählten choice cell zum Zeitpunkt der Entscheidung enthalten sein Abbiegen, und das Abbiegen gelingt auch.[24] X sorgt aber nicht zum Zeitpunkt des Überfalls für den Überfall. Denn es befinden sich zwar in manchen der „choices" von X für manche der realisierten Momente vor dem Überfall tatsächlich Überfall-Alternativen. Seine „choice" im Moment seiner Entscheidung zum Abbiegen enthält ja wenigstens eine Abbiegen-plus-Überfall-Alternative, die verwirklicht wird. Es befinden sich aber in keiner der sukzessiven „choices" von X *nur* Überfall-Alternativen.

(3) In der „choice" von X am relevanten Moment müssen auch nicht alle Alternativen enthalten sein, in denen er abbiegt, so dass in den anderen choice cells nur Alternativen enthalten sein können, in denen er nicht abbiegt. Schon aus diesem Grund ist die Aussage, X habe alle Weltverläufe, in denen er nicht abbiegt, durch die Entscheidung zum Abbiegen ausgeschlossen, dem STIT-Ansatz zufolge *nicht* gleichbedeutend mit der Aussage, X habe *genau die und nur die* möglichen Weltverläufe ausgeschlossen, in denen er nicht abbiegt.

(4) Innerhalb einer choice cell ist Raum für die Einwirkung eines anderen Handelnden oder einfach der Natur.[25] Der STIT-Ansatz lässt sich recht einfach auf „multiple agents" ausdehnen. Nichts spricht dagegen, die Natur, die X beim Abbiegen (nicht) niesen bzw. den Reissack in China (nicht) umfallen lässt, als zweiten Handelnden einzubeziehen. Die Situation lässt sich so darstellen:[26]

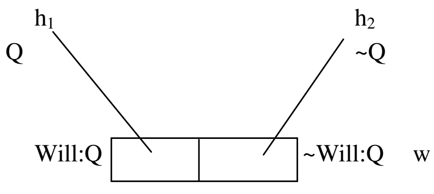
[24] Misslingt das Abbiegen, so kann X auch nicht fürs Abbiegen sorgen. Seine „choice" mag zwar nur Abbiege-Alternativen enthalten, aber es muss sich ja nicht unbedingt eine Alternative aus seiner „choice" realisieren.
[25] Vgl. a.a.O. S.34: „At m_3 the agent a effectively has no choice ... It may be that the outcome can be influenced by some other agent whose choices are not depicted here; or perhaps it is something that just happens, one of nature's choices."
[26] Vgl. a.a.O. fig. 2.3, S.35.



Angenommen, h_1 wird verwirklicht, so ist die Erklärung: Die Natur sorgt dafür, dass X nicht niest, was noch h_1 und h_4 offen lässt, aber h_2 und h_3 ausschließt; und X sorgt dafür, dass er abbiegt, was h_1 und h_2 offen lässt, aber h_3 und h_4 ausschließt. Damit sind h_2, h_3 und h_4 ausgeschlossen.

Andererseits sind schon in den zitierten grundlegenden Definitionen für astit und dstit in einer Art und Weise Probleme enthalten, die mir – wenigstens zur Zeit – die handlungstheoretische Analyse im Sinne von STIT etwas mysteriös erscheinen lassen.

(1) Die dstit-Variante ist meiner Ansicht nach dadurch belastet, dass sich Belnap, Perloff und Xu für den Ockhamismus entscheiden: Je nachdem, bezüglich welcher Alternative durch einen Moment man eine dstit-Formel bewertet, erhält man einen anderen Wert. Die Autoren verkünden denn auch unbekümmert, dass „~ Sett: [α dstit A]“ ein STIT-Theorem ist,[27] wobei „Sett“ von „settled“ abgeleitet ist und dem „N“-Operator von LF entspricht. Das bedeutet vermutlich, dass α im folgenden Fall, *falls* h_1 verwirklicht wird, dafür sorgt, dass die futurische Aussage „Will: Q“[28] wahr ist, und, *falls* h_2 verwirklicht wird, dafür sorgt, dass „Will: Q“ falsch ist.



α dstit: [Will: Q] wahr für w und h_1, falsch für w und h_2.

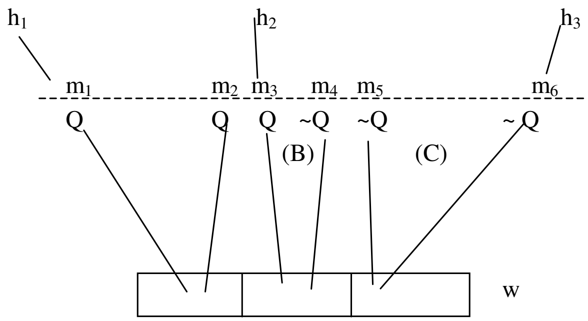
α dstit: [~ Will: Q] wahr für w und h_2, falsch für w und h_1.

[27] A.a.O. S.38.

[28] „Will:“ ist a.a.O. die Notation für einen ockhamistischen „F“-Operator.

Aber wie schafft es α bloß an w (das ja sowohl zu h_1 wie auch zu h_2 gehört), *beides* zu machen? Dadurch dass er dasselbe tut? Nein. Dadurch, dass er „in h_1" etwas anderes tut als „in h_2"? Nein, denn die erreichte Position *gehört* zwar zu Alternativen – aber man handelt nicht an einer Position *bezüglich* einer Alternative so und *bezüglich* einer anderen anders; man handelt einfach *an dieser Position*.

(2) Das interessantere Konzept als dstit scheint mir das "achievement"-Konzept (astit) zu sein. Doch auch dieses Konzept bringt ein verwirrendes Problem mit sich. Das liegt daran, dass es ein sehr hoher Anspruch ist, ein gewisses Ergebnis für die Zukunft zu *garantieren* zu können, wenn die Natur ein „**busy chooser**" ist und in der kontinuierlichen Zeit immer noch dazwischenkommen kann. Betrachten wir das folgende STIT-Szenario:



Eine natürliche Interpretation wäre, dass der Handelnde an w in Bezug auf die Wahrheit von „Q" drei Optionen hat: Er befürwortet sie (linke choce cell); er lehnt sie ab (rechte choice cell); oder sie ist ihm egal (mittlere choice cell). Nun ist es zwar beachtlich, dass STIT als Handlungstheorie Ressourcen dafür hat, die Tatsache der Indifferenz darzustellen. Aber es fragt sich, wieso der Handelnde sich für die mittlere choice cell entscheiden sollte. Eine plausible Antwort wäre: Offenbar steht er nicht vor der Frage „Q oder nicht-Q?", sondern vor drei Alternativen „Q", „B", und „C", wobei ihm klar ist, dass die Wahrheit von „C" die Wahrheit von „Q" ausschließt, aber „B", wahr an m_3 und m_4 (also isochron zu m_1 in der ganzen mittleren choice cell), sowohl mit der Wahrheit von „Q" als auch mit der von „~Q" einhergehen mag.

Vergessen wir diese Interpretation wieder und fragen uns, wie man es darstellen müsste, dass ein Handelnder sich zwar alle Mühe gibt, „Q" wahr werden zu lassen, ihm aber irgendetwas in letzter (Milli)sekunde dazwischenkommt. Dies kann nicht sein, falls eine der Alternativen aus der linken choice cell verwirklicht wird. Denn dann muss es sein, dass der Handelnde mit seiner vorhergehenden Entscheidung an w zugunsten dieser choice cell für die Wahrheit von „Q" sorgt. Es kann aber auch nicht sein, falls eine der Alternativen aus der rechten choice cell verwirklicht wird. Denn dann muss er mit der Entscheidung zugunsten dieser choice cell für die Falschheit von „Q" sorgen. Es kann also der verwirklichte Moment, an dem „~Q" wahr ist, in diesem Fall nur ein Moment aus der mittleren, „gemischten" choice cell sein wie an m_4. Der angemessene Kommentar zu *jedem* fehlschlagenden Versuch, „Q" zum beabsichtigten

Zeitpunkt wahr zu machen, ist demnach offenbar: „Du hast dich nicht genug bemüht (you didn't try hard enough) – sonst hättest du es garantieren können". Die postulierte Fähigkeit, etwas garantieren zu können, hat die Überforderung des Handelnden als Kehrseite.

Möglicherweise ließe sich astit durch folgende Änderung in plausibler Weise abmildern: Innerhalb der choice-Partition wird ein bestimmtes Element als die konkrete Wahl des Handelnden ausgezeichnet, und die astit-Formel darf nur für Momente in Alternativen aus *dieser* choice cell wahr werden (dann nämlich gelingt es dem Handelnden, für etwas zu sorgen). Dann ist freilich die Intuition des Garantierens, die den Autoren von „Facing the Future" offenbar am Herzen liegt, aufgegeben. Denn wenn ein Moment einer anderen choice cell als der gewählten verwirklicht wird, so liegt das nicht daran, dass der Handelnde dies garantiert hat, sondern daran, dass es ihm nicht gelungen ist, seinen Willen durchzusetzen. Die Konsequenzen für die formalen Ergebnisse innerhalb des STIT-Ansatzes vermag ich nicht abzusehen. Persönlich tendiere ich – entgegen STIT – dahin, dass in einer Handlungstheorie Murphy's Law so weit wie irgend möglich berücksichtigt sein sollte und davon auszugehen ist, dass kein Handelnder jemals irgendwie garantieren kann, dass er zustande bringt, was er versucht.

Trotz meiner Zweifel würde ich es begrüßen, wenn das in dieser Studie ganz allgemein zu indeterministischen Situationen in der Raumzeit Ausgeführte STIT-kompatibel ist. Ich sehe auch nicht, was dagegen spricht. Denn die Vorschläge in Teil III und Teil IV sind von jeder besonderen Handlungstheorie unabhängig. Keine Schwierigkeiten sehe ich mit der schönen Beschreibung eines Szenarios in „Facing the Future", in dem von einer *gegenwärtigen* Handlung die Rede ist und Garantien für die Zukunft keine Rolle spielen:

> „When Jones butters the toast ... the nature of his act ... is to constrain the history to be realized so that it must lie among those in which he butters the toast. Of course, such an act still leaves room for a good deal of variation in the future course of events, and so cannot determine a unique history; but it does rule out all those histories in which he does not butter the toast."[29]

2.3.2.3 Wann entscheidet es sich?

Die Feinstruktur einer ergebnisoffenen Situation in der kontinuierlichen Zeit lässt vermuten, dass sich gegen die Möglichkeit des Indeterminismus folgendes Dilemma vorbringen lässt (formuliert am einfachsten Fall mit zwei möglichen Weltgeschichten h_1 und h_2):[30]

---

[29] A.a.O., S.33.

[30] Ein Überblick über die Geschichte des Konzepts zeitlicher Grenzen und der damit zusammenhängenden Probleme findet sich in meinem „The Moment of Change" (1998), allerdings ohne Berücksichtigung modaler Verzweigungen. Wertvolle technische Beobachtungen zu „upper

Entweder es gibt einen letzten Zeitpunkt, zu dem h_1 und h_2 noch ganz übereinstimmen („lower cut") oder es gibt einen ersten Zeitpunkt, zu dem h_1 und h_2 nicht mehr übereinstimmen („upper cut").

1. Im ersten Fall gibt es keinen ersten Zeitpunkt, zu dem h_1 und h_2 nicht mehr übereinstimmen. Zum letzten Zeitpunkt muss es dann aber schon entschieden sein, ob h_1 oder h_2 verwirklicht wird. Denn ab jedem späteren Zeitpunkt wird ja bereits eindeutig entweder h_1 oder h_2 verwirklicht. Zugleich kann aber im letzten gemeinsamen Zeitpunkt noch nicht entschieden sein, ob h_1 oder h_2 verwirklicht wird. Denn zum letzten *gemeinsamen* Zeitpunkt sind h_1 und h_2 noch Alternativen zueinander, d.h. *beide* Möglichkeiten stehen noch zur Verwirklichung offen.

2. Im zweiten Fall gibt es keinen letzten Zeitpunkt, zu dem h_1 und h_2 noch übereinstimmen. Doch wann soll sich dann eigentlich entschieden haben, dass z.B. h_1 und nicht h_2 verwirklicht wird? Zu jedem gemeinsamen Zeitpunkt konnte es sich nicht entschieden haben (der gemeinsame Weg läuft ja gleichsam einfach aus). Aber zum ersten Zeitpunkt der Nichtübereinstimmung muss es sich bereits entschieden haben.

Das vorgebliche Dilemma ist für den Indeterministen auflösbar. Genau gesagt ist eine Entscheidung nicht nötig, weil die erste Alternative nicht die behaupteten Konsequenzen hat und die zweite harmlos ist. Aber das Argument ist sehr ernst zu nehmen. Denn es ist in jedem Fall ein guter Hinweis darauf, wie vorsichtig man sein muss, wenn man die Bildersprache der verzweigten Strukturen verwendet. Es lässt nämlich Abstand nehmen von dem Gedanken, es gebe tatsächlich mögliche Weltgeschichten, die im Laufe der Zeit die mysteriöse Aktivität des „branching" voneinander vornehmen, oder (umgekehrt) durch das Ausscheiden von Alternativen fänden sich mögliche Weltverläufe zusammen wie die Hälften eines von Geisterhand zugezogenen Reißverschlusses. Insbesondere sollte das Argument den Indeterministen dazu bringen, nicht naiv mit dem Konzept eines „Entscheidungspunkts" zu arbeiten. Es ist ja auch kaum das, was er wirklich gebrauchen kann. Denn für eine naiv verstandene Entscheidung an einem Punkt brauchte es eine frühere Entscheidung an einem früheren Punkt etc., und der Determinist wird den Indeterminismus an einem Regressproblem scheitern sehen.

Zunächst sollte man festhalten, dass die Definition der Historizität *beide* Fälle offen lässt. Man denkt zwar zunächst fast automatisch an die erste Alternative, wenn man hört, dass zwei mögliche Weltgeschichten bis zu *inklusive* t Alternativen sind, wenn die für sie charakteristischen Interpretationsfunktionen für die atomaren Formeln bis zu *inklusive* t übereinstimmen. Aber das sagt nur etwas darüber aus, ob zu einem gegebenen Zeitpunkt zwei mögliche Weltgeschichten noch alternativ zueinander sind, aber nichts darüber, ob dieser Zeitpunkt der letzte in einer Reihe von Zeitpunkten mit dieser Eigenschaft ist. Es kann auch genauso gut sein, dass es keinen letzten Zeitpunkt mit dieser Eigenschaft gibt. Die grafische Darstellung verzweigter Strukturen zeigt

cuts" und „lower cuts" bei Verzweigungen finden sich in Mc Call, „Choice Trees", besonders. S.232-238 (zusammengefasst auch in „A Model of the Universe", Appendix 1, S.289 – 294).

eine noch schwerer zu überwindende Tendenz zur ersten Alternative, und zwar gerade, wenn man von der tatsächlichen Breite der Linie, des Stiftes etc. abstrahiert.

Wie kann ein Indeterminist auf das angebliche Dilemma reagieren? Zunächst mag er annehmen, die erste Alternative sei verwirklicht, es gebe also einen letzten gemeinsamen Zeitpunkt. Zweifellos wird dann ab jedem späteren Zeitpunkt bereits eindeutig entweder h_1 oder h_2 verwirklicht. Aber wieso soll das implizieren, dass zum letzten Zeitpunkt, für den h_1 und h_2 übereinstimmen, schon entschieden sein muss, ob h_1 oder h_2 verwirklicht wird? Es wird ja gerade der Determinismus *nicht* vorausgesetzt. Auf den letzten übereinstimmenden Zeitpunkt mag also dies oder jenes folgen (der Gedanke, dies müsse *zuvor entschieden* werden, wäre dagegen so etwas wie Determinismus in Verkleidung). Der letzte übereinstimmende Zeitpunkt lässt beide Möglichkeiten offen; und so spricht nichts dagegen, dass die Welt – *sit venia verbo* – in die eine statt in die andere Möglichkeit *hinübergleitet*.

Des weiteren kann der Indeterminist annehmen, die zweite Alternative sei verwirklicht. Hier kann er den ganzen Punkt zugeben, ohne dass das seiner Position schadet. Es hat sich eben noch zu keinem Zeitpunkt der übereinstimmenden Phase etwas entschieden. Und das ist eigentlich alles. Vielmehr entscheid*et* sich der weitere Verlauf durch das Geschehen, indem es geschieht. Dadurch, dass zu einem Zeitpunkt etwas geschieht, das z.B. mit h_2 nicht mehr kompatibel ist, sondern nur noch mit h_1, *wird* h_1 ausgeschlossen und *ist* eben mit diesem Geschehen, aber auch erst mit ihm ausgeschlossen. Im Rückblick kann man sagen, dass es sich *mit* ihm entschieden hat. Zu sagen, dass es sich *an* ihm entschieden hat, ist dagegen reichlich irreführend. Eine Lücke tritt übrigens nicht auf, da ja *bis* an diesen Zeitpunkt alle Zeitpunkte noch für h_1 und h_2 übereinstimmen. In einem unproblematischen Sinn gibt es damit sogar so etwas wie einen Entscheidungspunkt. Aber er gehört eindeutig zur verwirklichten Alternative.

Welche Annahme ist plausibler? Zunächst sind beide vielleicht weniger verschieden, als man meinen mag: Auch die erste Annahme lässt die Entscheidung *durch Geschehen* zu. Und allein auf die Möglichkeit der Entscheidung durch Geschehen an Stelle der unsinnigen Annahme eines zugleich determinierten und nicht determinierten Entscheidungspunktes kommt es an. Insofern die zweite Alternative das besonders unterstreicht, mag sie besonders sympathisch sein. Es ist denkbar, dass die Befürwortung einer der beiden Alternativen sich aus globaleren Überlegungen ergibt.[31] Es ist aber auch nicht ausgeschlossen, dass die Quantentheorie letztlich zur Einsicht führt, dass das Instrumentarium des Kontinuums zu präzise ist, um hier anwendbar zu sein.[32]

Beide ausgeführten Punkte haben viel miteinander zu tun: Sie warnen vor einer naiven Überbeanspruchung der Metaphorik der Weggabelung und der Entscheidung an einem Gabelungspunkt: Weder findet die Entscheidung *an* einem Punkt vor

[31] In diesem Punkt beachtenswert ist Weidemann, „Zwei Strategien der Kritik an einem Argument für den kausalen Determinismus" (2003). Hier wird auch mit guten systematischen Gründen und gegen Łukasiewicz' „Über den Determinismus" (1930) als wahrscheinlichster Standpunkt des Aristoteles für modale Verzweigungen die zweite Alternative nachgewiesen.
[32] In diesem Punkt ist Teil III meines „The Moment of Change" möglicherweise überoptimistisch.

Trennung der Alternativen statt, noch besteht sie darin, dass dabei eine bestimmte Weltgeschichte oder auch nur das Bündel aller Weltgeschichten, in denen diese Tat vorkommt, ergriffen würde. Der Handelnde handelt einfach, in einem fort, und dadurch scheiden Weltverläufe für immer als Kandidaten für die Verwirklichung aus.

2.3.3 Existenzielle Gründe

2.3.3.1 Humes Herausforderung

Auf den ersten Blick liegt es nahe, im Sinne des Bildes der *gubernatio* anzunehmen, nur der handlungstheoretische Indeterminismus habe für die Verantwortung des Täters einen Platz. Denn nur dieser Indeterminusmus konzipiert ihn als in einem sehr starken Sinn freien Entscheider. Ihm ist, weil er in einer ergebnisoffenen Situation mit Alternativen stand, zuzurechnen, ob die Tat geschah oder nicht. Eine deterministische Theorie scheint dagegen immer in Gefahr zu sein, die Verantwortung aufzulösen, indem sie sie auf Umstände und Vorgeschichte abschiebt, so dass der Täter nur noch wie ein Maschinenteil scheint, das einen von anderswo kommenden Impuls weiterträgt. Doch eine der vielen großen Entdeckungen David Humes ist es, dass man einmal versuchen kann, den Spieß umzudrehen.[33] Der Indeterminismus schafft nach Humes Meinung nicht etwa eine Verbindung zwischen Täter und Tat, sondern zerstört sie. Gäbe es ergebnisoffene Situationen, so dürfte nach Humes Ansicht der Täter die Realisierung einer bestimmten Alternative als etwas empfinden, was ihm völlig unerklärlicherweise wie von außen kommend geschehen und nicht mehr *seine* Tat ist. Im deterministischen Modell dagegen kann er nicht abstreiten, dass es *seine* Präferenzen sind, ohne welche die Tat in hinreichend ähnlichen Situationen ausgeblieben wäre – wenn auch diese Präferenzen alternativlos erworben sind und ihr Ausbleiben nur in einer ganz anderen Weltgeschichte hätte vorkommen können. Nur dieses Modell schafft so, nach Hume, eine Verbindung zwischen Täter und Tat.

Bringt dies den Indeterminismus in Gefahr? Auch wenn Humes Argument sehr stark ist, so scheint es mir doch nicht unangreifbar. Zunächst ist festzuhalten, dass Humes Theorie die faktische Unerklärlichkeit eines Verhaltens auch für den Handelnden selbst nicht ausschließen darf, wenn sie realistisch sein soll („Wie konnte

[33] Hume, Treatise, book II, part iii, section 1: „The [...] object of [...] anger is a person [...]; and when any [...] injurious actions excite that passion, `tis only by their relation to the person or connexion with him. But according to the doctrine of liberty or chance, this connexion is reduc'd to nothing, nor are men more accountable for those actions, which are design'd and premeditated than for such as are the most casual and accidental [...W]here [actions] proceed not from some cause in the character [...] of the person, who perform'd them, they infix not themselves upon him [...] The action itself may be blameable [...] But the person is not responsible for it [...] According to the hypothesis of liberty, therefore, a man is as pure and untainted, after having committed the most horrid crimes, as at the first moment of his birth, nor is his character any way concern'd in his actions; since they are not deriv'd from it [...] `Tis only upon the principle of necessity, that a person requires any merit or demerit from his actions [...]". Wörtlich übernommene Parallel-Passage: Erste „Enquiry", section VIII, part 2 §76.

mir das nur passieren?“). Denn so etwas kommt vor: nicht nur in unerklärlichen Verbrechen[34] oder Herzenswandlungen[35], sondern auch bei der Auswahl eines Nachtischs in der Kantine,[36] wenn man es durch Nachgrübeln über den freien Willen nur lange genug provoziert. Im Prinzip ist das für Humes Theorie kein Problem: Präferenzen müssen nicht durchsichtig sein. Doch man sieht daran, dass das Band zwischen Tat und Täter oft ein reichlich theoretisches sein muss, das zur Beurteilung des praktischen Falles nicht unbedingt viel nützt. Dennoch hindert in der Praxis nichts daran, auch in Fällen unerklärter Motivation Vorwürfe zu machen: Das unerklärliche Verbrechen wird dem Täter in der Regel doch zugerechnet. Unerklärliche Untreue wird trotz ihrer Unerklärlichkeit vorgeworfen. Nur eine ausdrücklich dagegen vorgebrachte Erklärung positive Erklärung durch einen Pfeil Amors o.ä. kann das evtl. verhindern etc. Der Handelnde selbst empfindet dabei sein Handeln, so unerklärlich es ihm sein mag, *simpliciter* als seines.

Es fragt sich, wieso das eigentlich anders sein sollte, wenn Präferenzen, die die Handlung *unausbleiblich* machen, nicht nur unsichtbar, sondern einfach gar nicht vorhanden wären, weil der Indeterminismus in einer bestimmten Form wahr ist. Wieder empfände der Handelnde das Geschehen *in der Regel* einfach als seine Tat, zwar vielleicht als unerklärlich, viel öfter wohl gar nicht als erklärungsbedürftig - doch warum denn als von außen kommend? Warum soll man es nicht einem Menschen zuschreiben, wenn sich in ihm etwas entscheidet, gerade weil es sich *in ihm* entscheidet, wobei die Alternative zu anderem Verhalten offen stand? Eine positive Erklärung, wie die, dass der Betreffende dabei schlief, unter Drogen stand, widerstrebte, ihm die Hand zuckte etc., mag die Zuschreibung verhindern. Aber wenn er bei klarem Verstand in seiner Bewertung der Tatsache, dass es sich so in ihm entschied, nicht widerstrebte – was braucht man mehr, um ihm seine Tat als geglückt oder missraten zuzurechnen? Ist hier die Tat dem Täter wirklich fremder als bei Hume? Nein, es scheint vielmehr, dass in *beiden* Szenarien, dem deterministischen wie dem indeterministischen, dem Täter vorwerfbar ist, *dass die Weltgeschichte in ihm missrät* und er, wenn nichts positiv dagegen spricht, dazu stehen muss.[37] Nur wird in einem Fall die Weltgeschichte[38] deterministisch aufgefasst, im anderen nicht.

Soll man es aber nun wieder als *paradigmatischen* Fall auffassen, dass gar keine Präferenzen vorhanden sind, die eine Handlung unausbleiblich machen? Vielleicht ja, denn es könnte gut sein, dass Präferenzen nur etwas sind, das man nachträglich zuschreibt, und zwar je nachdem wie’s kommt: Stiehlt A die Schokolade nicht, so hatte er eben eine Präferenz dafür, keine Schwierigkeiten mit dem Hausdetektiv zu bekommen, und die war stark genug, um ihn vom Diebstahl abzuhalten; stiehlt er sie,

[34] Man denke etwa an die völlig unkommunizierbare Motivlage in der Mordszene am Ende des ersten Teils von Camus' „L’étranger“.

[35] Vgl. Hofmannsthal, Ariadne auf Naxos, Szene der Zerbinetta: „Immer ein neues / Beklommenes Staunen./ Daß ein Herz so gar sich selber,/ Gar sich selber nicht versteht“.

[36] Vgl. für das Beispiel Nagel, “What Does It All Mean?”, Kap. 6.

[37] Anderer Ansicht: Guckes, „Ist Freiheit eine Illusion?“ (2003), vgl. bes. die Einleitung, S.9 -13 und das Fazit, S.205 - S.220.

[38] Der Ausdruck kann hier ohne weiteres gebraucht werden und ist ggf. angesichts von Teil III und IV auf eine Weltlinie einzuschränken.

so war die Präferenz nicht stark genug.[39] Das ist eine bloße Beschreibung, wie er sich verhalten hat, die leicht als Kausalerklärung missverstanden wird.[40] Andererseits geht man aber doch davon aus, dass eine gute Erziehung einen Handelnden schafft, der *zusammen mit Normalbedingungen* so weit eine „nomological machine" bildet, dass er, wie es Nietzsche ausdrückt „ein Tier" ist, „das versprechen darf".[41] Dies kann ein Indeterminist zugeben. Nur wird er dreierlei klar stellen:
(a) Auf verschiedenen Input hin verhält sich eine „nomological machine" verschieden; der Input aber mag das Ergebnis verschiedenster *indeterministischer* Prozesse sein.
(b) Es war nicht von Beginn an ausgemacht, dass die Erziehung glücken oder scheitern würde.[42]
(c) Es kann auch Situationen geben, die sich nicht als „Normalbedingungen" beschreiben lassen und in denen echte Ergebnisoffenheit vorliegt. Es kann sich dabei um Extremsituationen handeln (Drohung, Folter, Bestechungsversuch o.ä.). Ihre verschiedene Beschreibung durch den Deterministen und den Indeterministen fällt bereits in den Bereich der existenziellen Gründe für den Indeterminismus.

2.3.3.2 Indeterminismus und Fatalismus

„Ausgerechnet der Fatalismus als angebliche Konsequenz des Determinismus soll als wichtiger Grund für den Indeterminismus gelten! Dabei weiß man doch seit wenigstens 2000 Jahren, dass der Determinismus keinen Fatalismus impliziert...". So

[39] Treffend - trotz deterministischer Hintergrundtheorie - Schopenhauers Feststellung (WWV I 1 §18): "Nur die Ausführung stämpelt den Entschluss, der bis dahin noch immer veränderlicher Vorsatz ist."

[40] Für die nachträgliche Fabrikation von Handlungserklärungen sind z.B. die bei Festinger beschriebenen klassischen Experimente zur "kognitiven Dissonanz" interessant: Versuchspersonen, die dafür bezahlt wurden, nach dem Absolvieren einer sehr langweiligen Aufgabe diese als höchst spannend darzustellen, *fanden*, im Nachhinein befragt, die Aufgabe selbst umso spannender, je schlechter sie für ihre Anpreisung bezahlt wurden. Nachträglich erfindet sich die schlecht bezahlte Versuchsperson als Motiv dafür, dass sie die Aufgabe als spannend angepriesen hat, dass sie die Aufgabe spannend fand - bei der Ausführung war ihr gerade so langweilig wie der gut bezahlten Versuchsperson. Vgl. Festinger, „A Theory of Cognitive Dissonance" (1957) sowie Festinger und Carlsmith, „Cognitive consequences of forced compliance" (1959).

[41] Vgl. Nietzsche, „Zur Genealogie der Moral" II 1 (KSA 5, 291): „Ein Tier heranzüchten, das *versprechen darf* – ist das nicht gerade jene paradoxe Aufgabe selbst, welche sich die Natur in Hinsicht auf den Menschen gestellt hat?" Nicht ohne Grund enthält auch „Facing the Future" von Belnap, Perloff und Xu ein ganzes, komplexes Kapitel zum „Promising" (Kap.5).

[42] Der Determinist muss dies behaupten, obwohl er natürlich Recht hat zu sagen, die Erziehung beeinflusse den Menschen; denn wenn man sich vorstelle, sie sei eine andere gewesen, so wäre etwas anderes herausgekommen. Nur stand es schon immer alternativlos bevor, dass dieser Mensch gerade diese Erziehung erfahren würde. Eine differenzierte Theorie der (Selbst-)erziehung zu stabilen Haltungen (in der fortgesetzte Ausübungshandlungen fortgesetzte Einübungshandlungen sind und die Haltung nicht determiniert, weil man ggf. gegen sie antrainieren kann) findet sich im 2. und 3. Buch von Aristoteles' Nikomachischer Ethik. Meiner Ansicht nach liest man den entscheidenden Text, NE III 7, am besten indeterministisch. Vgl. dazu mein „Was heißt es, eine archê in sich zu haben" (erscheint demnächst im von Kullmann herausgegebenen Tagungsband zur Tagung „Handlungstheorie bei Aristoteles" in Blankensee, Juli 2004).

mag sich ein Determinist wundern über die Ankündigung des aktuellen Abschnitts in der Einleitung zu diesem Kapitel. Doch ist die Sache wirklich so klar?

Dass ein Zusammenhang zwischen Determinismus und Fatalismus wenigstens psychologisch nahe liegt, wird schon in „De interpretatione“ 9 deutlich, wo Aristoteles ja die Ansicht referiert (wenn nicht gar selbst vertritt), wenn die morgige Seeschlacht schon heute feststünde, habe es auch keinen Zweck mehr, sich noch irgendwelche Sorgen um die Zukunft zu machen und mit sich darüber zu Rate zu gehen.[43] Andererseits hat schon in der Antike die Diskussion um das so genannte „faule Argument“ (argoj logoj)[44] klar gemacht, das der Determinist sich gegen den Vorwurf, seine Theorie würde, ernst genommen, das Handeln unmöglich machen, zu wehren weiß. „Wenn schon feststeht, dass du gesund wirst, musst du nicht den Arzt rufen“ ist keine Konsequenz einer vernünftigen deterministischen Ansicht. Es macht natürlich etwas aus, ob der Patient den Arzt ruft oder nicht, wenn feststeht, dass der Patient gesund wird, *weil* er den Arzt konsultiert. Nur steht durch seine Präferenzen auch fest, ob er den Arzt ruft oder nicht.

Das „faule Argument“ ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit, auszubuchstabieren, was in De int. 9 als Unbehagen verursachender Gedanke auftaucht. Cicero lässt einmal seinen stoisch beeinflussten Bruder Quintus die Weltgeschichte mit dem Abrollen eines Seils vergleichen.[45]

Was aber ist es genau, das am Determinismus, so wie er durch den Vergleich mit dem abrollenden Seil ins Bild gesetzt wird, existenziell beunruhigt? Es ist vielleicht weniger das Gefühl, nichts in der Hand zu haben, Teil eines Ablaufs, am Seil geführt zu sein: Man handelt ja, auch wenn der Determinismus wahr ist, und es kommt darauf an, auch wenn das Handeln alternativlos ist. Es scheint mir eher etwas anderes zu sein, weshalb der Determinismus letztlich zu einer Weltsicht führt, die ich bedrückend finde: Wenn der Determinismus auch einem begrenzten Wesen gespannte Erwartung und Überraschung ermöglicht, so ermöglicht er doch in einem Sinn, der die Einstellung zu einer gegebenen Situation, den Blick darauf, durchdringt, keine wirkliche *Hoffnung*. Der hier relevante Indeterminismus ist ja durch ergebnisoffene Situationen charakterisiert, der ihm entgegen gesetzte Determinismus durch Alternativlosigkeit. Freilich wird ein konsequenter Determinist sagen: wenn man seine theoretischen Einsichten beherzigt, auch keine Enttäuschung. Diesen existenziellen Punkt hat Spinoza sehr klar und beeindruckend ausgedrückt.[46] Ich bezweifle, dass oft

---

[43] 18b30-33.

[44] Cicero, De fato 28-30, auch bei Long / Sedley, a.a.O., 55S. Cicero benutzt die Benennung dort selbst.

[45] De divinatione 1.127: “[E]st quasi rudentis explicatio sic traductio temporis nihil novi efficientis et primum quicque replicantis.“ Übersetzung (Long / Sedley, The Hellenistic Philosophers 55O): „The passage of time is like the unwinding of a rope, bringing about nothing new and unrolling each stage in its turn.“

[46] „[D]ocet, quomodo circa res fortunae, sive quae in nostra potestate non sunt [...] nos gerere debeamus; nempe utramque fortunae faciem aequo animo expectare; & ferre: nimirum, quia omnia ab aeterno Dei decreto eadem necessitate sequuntur, ac ex essentia trianguli sequitur, quod tres ejus anguli sunt aequales duobus rectis.“ „[Meine Philosophie] lehrt, wie wir uns gegen die Fügungen des Schicksals oder das, was nicht in unserer Macht steht [...], verhalten müssen, nämlich: das eine wie das andere Antlitz des Schicksals mit [mit gleichem Sinn] erwarten und ertragen; weil ja alles aus dem

wieder ein Determinist in theoretischer Hinsicht daraus praktisch so sehr die Konsequenzen gezogen hat wie Spinoza.

Ein konsequenter Determinist wird, um mit einem harmlosen Beispiel zu beginnen,[47] das Endspiel der letzten Fußball-Weltmeisterschaft mit einer Aussage kommentieren müssen wie: „Also ich bitte Sie: Was hätte denn bei dieser Anordnung der Materie im Universum drei Minuten nach dem Urknall auch anderes herauskommen sollen als ein Sieg der italienischen Mannschaft?!" Doch selbst wenn in einem Fußballspiel bestimmte Spieler mit bestimmten Stilen unter bestimmten Bedingungen zusammentreffen – steht damit zu Beginn des Spiels fest, dass und wie in welcher Minute das entscheidende Tor fällt? Steht es, da keine Alternative zur Entwicklung von Menschen, der Geburt gerade dieser Spieler, gerade diesen Zufällen in ihrem Leben und gerade diesem Training offen steht, auch schon Milliarden Jahre zuvor fest? Steht es alternativlos bevor? Mit welcher Einstellung muss jemand, der das tatsächlich beherzigt, das Spiel sehen?[48] Auch wenn er gespannt und überrascht sein, auf den Sieg seiner Mannschaft hoffen kann, so ist es doch nicht die Hoffnung, dass es sich entscheiden wird, während beide Alternativen offen stehen; sondern es kann nur die Hoffnung sein, dass sich die Weltgeschichte als eine herausstellen wird, in der dieses Ergebnis angelegt war. Unmöglich ist es für den Deterministen, zu sagen: „Das Spiel, *gerade so, wie es begann*, hätte anders ausgehen können, aber wir haben halt Pech gehabt".[49] Es ist dies eine andere Art von Hoffnung, eine andere Art von Rückblick.

In derselben Art muss der Determinist jedes noch so unwahrscheinliche Geschehen, sagen wir die Komposition der Jupiter-Symphonie oder die Erfindung des Computers als letztlich unausweichlich hinnehmen; er kann derlei zwar begrüßen und sich darüber freuen, doch ein wenig achselzuckend – wie hätte es denn je anders kommen sollen? Pläne können sich für ihn als realisierbar herausstellen oder als nicht realisierbar. Sie können für ihn, wenn er seine Theorie nicht im Leben vergisst, nicht *in einem ontologisch ernsten Sinn* glücken oder scheitern.

---

ewigen Ratschluß Gottes mit derselben Notwendigkeit folgt, wie aus dem Wesen des Dreiecks folgt, daß seine Winkel zwei rechten Winkeln gleich sind." Ethik, Anmerkung zu II 49 (Übersetzung: Stern, Abweichung in eckigen Klammern: N.St.). Zum Verständnis der Rede vom göttlichen Ratschluss ist zu bedenken, dass Spinoza Gott mit der Welt identifiziert und er daher keine Züge einer Person trägt. Dies ist metaphorische Rede vom naturgesetzlichen Determinismus.

[47] An einem solchen Fußball-Beispiel führt auch GAMUT, „Language, Truth and Meaning" (1991), Bd. 2, Kap. 2.5, in kombinierte Zeit- und Modallogiken ein.

[48] Man denke an die Stelle über die zehntausend Jahre zuvor gemachte Aussage in De Int. 9, 18b30-35.

[49] Humes indirekte Analyse von solchen Aussagen findet sich in der ersten „Enquiry", section VIII, part 1, §73: „By liberty, then, we can only mean a power of acting or not acting, according to the determinations of the will; that is, if we choose to remain at rest, we may if we choose to move, we also may", also im Sinne einer „hypothetical liberty". Das ist kreativ, aber letztlich nicht überzeugend. „Es hätte anders kommen können" analysiert Hume hier im Grunde als „Es hätte anders kommen können, *wenn* andere Bedingungen vorgelegen hätten (z.B. *wenn* jemand anders gewollt hätte, weil er andere Präferenzen gehabt hätte, weil er anders erzogen worden wäre, weil seine Eltern andere Präferenzen gehabt hätten usw. usf., kurz: die Welt andere ‚Anfangsbedingungen' gehabt hätte)". So ist es aber oben nicht gemeint.

Ein ernstes, in theoretischer Hinsicht vielleicht lehrreiches Beispiel mögen die am Ende des vorigen Abschnitts kurz erwähnten Extremsituationen sein.[50] Der Indeterminist kann sie als Situationen ansehen, in denen tatsächlich ein Durchhalten auf dem Spiel steht oder jemand einer Versuchung erliegt, während er ihr standhalten könnte. Er kann darauf hoffen (wenn er einen Adressaten vermutet, darum bitten), durchzuhalten, darauf hoffen, dass ihm nun sozusagen die Gnade der Stärke zuteil wird, dass es sich in ihm zum Durchhalten entscheidet, während es noch nicht entschieden ist. Nicht dass der Determinist nicht hoffen (ggf. bitten) könnte: Er kann darauf hoffen, dass die Welt sich als eine herausstellen wird, die ihn als einen hervorgebracht hat, der sich als einer herausstellt, der durchhält; er kann *wünschen*[51], sich als einer zu erweisen, dem durch den Beginn der Weltgeschichte die Gnade zuteil *wurde*, dass er durchhalten würde, dass er im Laufe einer „immer vollständiger werdenden Bekanntschaft mit [sich] selbst“[52] erfahren wird, ob es so mit ihm ist. Doch dies sind jeweils deutlich verschiedene Arten der Hoffnung, der Teilnahme an einer Situation und auch der Retrospektive. Was dies zum wenigsten zeigen dürfte, ist, wie sehr die Haltung zur Frage „Determinismus oder Indeterminismus?“ für das Selbstverständnis eine Rolle spielen kann.

2.4 Fazit

Es wurde in diesem Kapitel nicht versucht, ein ausschlaggebendes Argument gegen den Determinismus und für den Indeterminismus zu finden, und vermutlich wird ein überzeugter Determinist davon unbeeindruckt bleiben. Alles, was an dieser Stelle zu leisten war, war, eine Art Landschaftsskizze zu liefern, die deutlich macht, welche metaphysischen Probleme den Hintergrund der Ausarbeitung indeterministischer Logiken bilden, und zweierlei zu zeigen:
(1) dass ein Indeterminismus, der zu LF-Modellen passt, keine absurde Position ist, sondern eine, deren weiteres Studium sich lohnt; und
(2) dass LF-Modelle etwas sind, womit man sich darüber verständigen kann.

LF-Modelle und die i.F. vorgenommenen Erweiterungen davon sind für jeden Vertreter des ontischen Indeterminismus brauchbar, egal, was für eine Position bezüglich der Handlungstheorie er vertritt: Sie sind von der Handlungstheorie unabhängig. Insofern werden sie jemandem, der dazu eine dezidierte Meinung hat (z.B. einem Vertreter des STIT-Ansatzes) nur als ein Rahmen erscheinen, der auszufüllen ist, wenn es um menschliche Handlungen und Entscheidungen geht. Es ist mir ganz recht, die indeterministische Raumzeitlogik im Folgenden unbelastet von

---

[50] Für einen anschaulichen Eindruck sei – abgesehen von jeder Bewertung – z.B. die Lektüre einer Heiligenlegende empfohlen wie der in Fuhrmanns „Römische Rechtstexte“ (1987) abgedruckten.
[51] Vgl. hierzu aus deterministischer Sicht Schopenhauer, „Preisschrift über die Freiheit des Willens“ (1839), Abschnitt II.
[52] Schopenhauer, „Preisschrift über die Grundlage der Moral“ (1840), §20.

einer ausgearbeiteten Handlungstheorie entwickeln zu können, denn ich habe keine solche Theorie.

Dennoch könnte es sein, dass das vorangegangene Kapitel auf eine Option aufmerksam macht, die vielleicht noch nicht beachtet wurde und eine nähere Untersuchung verdient hätte: Bisher sind Indeterministen typischerweise davon ausgegangen, sich zu fragen, wie es ein Handelnder in einer von den Naturgesetzen regelmäßig gestalteten Welt schaffen kann, bedingungslos in Richtung dieser oder aber jener Alternative zu steuern. Wenn man an ontische Alternativen dachte, so zuerst an durch das Handeln bestimmbare. Das Element des Determinierten sah man auf der Seite der Natur, das Element des Inderterminierten auf der Seite des Handelnden. Der Handelnde wurde dann typischerweise vom Indeterministen als Steuermann zwischen den Alternativen konzipiert. Aus diesem Blickwinkel erscheint eine sehr stark konzipierte Steuerungsfähigkeit Voraussetzung dafür zu sein, dass eine Handlung zuvor ontisch nicht feststeht. Aber es ist schwer zu sehen, wie das Steuern vor sich geht. Man ist immer mit dem Problem konfrontiert, ob ein solches Entscheiden zwischen Alternativen nicht bloßer Zufall ist und damit eben kein *Steuern* mehr.

Doch wie sieht es aus, wenn man das Element des Indeterminierten vor allem auf der Seite der Natur sieht und das Element des Determinierten auf der Seite des Handelnden? Auf der Seite der Natur mag es ruhig Zufall geben. Die Natur mag in Wirklichkeit sehr unregelmäßig sein.[53] Eine vom Indeterminismus im Sinne des natürlichen Zufalls durchdrungene Welt wäre keine unattraktive Option.[54] In diesem Fall könnte es dennoch sein, dass gerade ein Handelnder auf bestimmte gegebene Umstände in einer bestimmten Situation hin nicht anders reagieren kann, als er reagiert. Es könnte sogar für einen (zuverlässig) Handelnden typisch sein, dass er unter Normalbedingungen eine Art „nomological machine" bildet. Und es könnte Voraussetzung dafür sein, dass er ein „versprechendes Tier" werden kann. Trotzdem *muss* nicht eintreten, was er tut. Wenn die Natur von objektivem Zufall durchdrungen ist, so muss man nämlich keine stark konzipierte Steuerungsfähigkeit dafür voraussetzen, dass eine Handlung zuvor ontisch indeterminiert ist: Wenn zuvor gar nicht feststeht, dass eine bestimmte Situation eintritt, dann steht auch nicht zuvor fest, dass der Handelnde in seiner ganz bestimmten Weise darauf reagieren wird, *dass* sie eintritt.

Dies ist nur die Andeutung einer Option. Vielleicht lässt sie sich innerhalb indeterministischer Ansätze als „worst case" einordnen, der letztendlich immer noch attraktiver ist als der Determinismus. Im Hinblick auf die Fragen, ob sie genug Raum für (Selbst-)Erziehung, für Verantwortung und für gerechtfertigte Strafe lässt und ob sie für Standard- wie auch für Extremsituationen gleich plausibel ist, bleibt an ihr noch vieles ungeklärt.

---

[53] Darauf hingewiesen zu haben, wie selten sie sich regelmäßig verhält, ist eben ein großes Verdienst Nancy Cartwrights. Übrigens ist es weder einfach noch plausibel, den Handelnden und den Rest der Natur, in die er involviert ist, scharf voneinander zu trennen.

[54] Der früheste Text, in dem zu Ausdruck kommt, dass Zufall befreiend wirken kann, dürfte der Menoikeus-Brief von Epikur sein (vgl. §133f).

Unabhängig von dieser Option sind die vorgebrachten Überlegungen zum Ausschluss von Alternativen *durch Geschehen*. Sie könnten eine Bedingung sein, die die Menge der vertretbaren Ansätze in der Handlungs- oder Entscheidungstheorie einschränkt: Ein vertretbarer Ansatz muss den Ausschluss von Alternativen realistischerweise so konzipieren, dass dieser sich in fortlaufenden Bewegungen vollzieht.

KAPITEL 3

Alternativen in der klassischen Raumzeit

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen zwei Dinge geschehen:

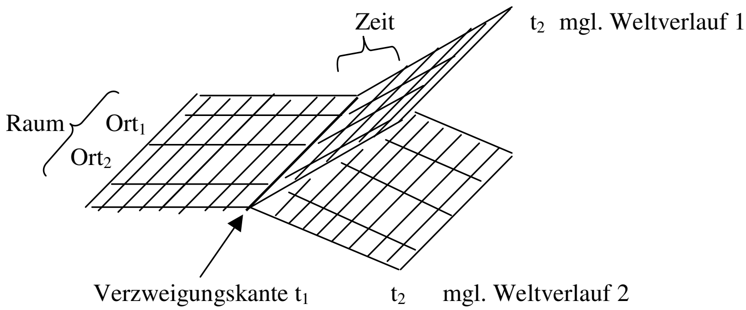
- Die kombinierte Zeit- und Modallogik LF wird um eine Raumdimension erweitert zur verzweigten Raumzeitlogik **LF×S5** (Kap. 3.2).
- Die verzweigte Raumzeitlogik LF×S5 soll um zwei Operatoren erweitert werden, die zu lesen sind als „es ist wissbar, dass“ und „es ist nicht mehr beeinflussbar, ob“. Der historische Notwendigkeitsoperator „N“ wird so in drei Operatoren ausdifferenziert. Die resultierende Sprache soll deshalb **3N** heißen (Kap. 3.3).

Zur anschaulichen Motivation von LF×S5 in Kap. 3.2 lässt sich vorab sagen: Es liegt nahe, die kombinierte Zeit- und Modallogik LF um eine Raumdimension zu erweitern und damit zu Sprachen zu gelangen, die man als Logiken für modale Verzweigungen in der (nach wie vor) klassischen Raumzeit deuten kann. Sicher will man der räumlichen Dimension der Welt gerecht werden, vielleicht auch der Tatsache, dass sie sich auch als räumlich ausgedehnt entwickelt. Man kommt leicht darauf, dass es möglich sein muss, statt eines in Richtung Zukunft zerfaserten Bündels von eindimensionalen K_{lin}-Strukturen ein in Richtung Zukunft auseinanderklappendes Bündel von „flächigen“ $S5\times K_{lin}$-Strukturen zu betrachten. Dabei ist um der Anschaulichkeit willen wieder von zwei Raumdimensionen abstrahiert und der Raum eindimensional dargestellt. Auf diese Art und Weise erhält man an der Stelle von Verzweigungsbäumen so etwas wie aufgeblätterte Weltbücher[1] (die zweidimensionale Darstellung einer *nur* tempo-modalen Struktur mag man nun als Weltbuch auffassen, dessen räumliche Dimension man nur noch nicht bemerkt hatte, weil man es bisher immer nur von der Seite betrachtet hatte): Jede hier von links nach rechts verlaufende Linie auf einem Blatt des Weltbuches stellt dabei alles dar, was im Laufe der Zeit an ein- und demselben Ort geschieht – einen Ort in der Zeit oder eine Ortsgeschichte. Jede quer dazu liegende Linie stellt alles dar, was zu verschiedenen Orten, aber zur selben Zeit geschieht – einen Zeitpunkt im Raum, den Raum zu einem Zeitpunkt oder einen Momentanraum. Das Verharren eines sehr kleinen Objektes an einem Ort würde mit einer Ortslinie auf einem Weltblatt zusammenfallen, die gleichmäßige Bewegung eines solchen Objektes würde man als Diagonale durch das durch Orte und Zeitpunkte erzeugte Gitter sehen, eine Beschleunigung oder ein Abbremsen als Parabelkurve. Die

[1] Grafisch dargestellt (um 90° gekippt) finden sich die – intuitiv nahe liegenden – Weltbücher als so genannte „universe trees“ bereits ausführlich bei Storrs McCall, „A Model of the Universe“ (1994), in Ansätzen in „Choice Trees“ (1990), S.238, und, etwas anders gezeichnet in „Objective Time Flow“ (1976), S.357. Die dreiwertige Sprache ohne Modaloperatoren, die McCall in „Objective Time Flow“ skizziert, kann hier nicht als Vorbild dienen.

Entwicklung eines größeren, im Raum weit ausgedehnten Objektes müsste darauf als Fläche dargestellt werden.

Weltbuch



Die anschauliche Motivation von 3N in Kap. 3.3 muss etwas umfassender ausfallen und findet sich, der technischen Umsetzung vorgeschaltet, in Kap. 3.3.1. Auch die technische Diskussion in Kap. 3.3.2 fällt relativ ausführlich aus. Schließlich ist auch die philosophische Deutung von 3N in Kap. 3.3.3 überraschend kompliziert, aber auch lehrreich. Das liegt daran, dass mit 3N meines Wissens Neuland betreten wird. 3N ist dann die erste Modallogik, die Informationszustände und Möglichkeiten der Einflussnahme in der Raumzeit unter Berücksichtigung einer endlichen maximalen Signalgeschwindigkeit systematisch darstellt. Das alles geschieht aber noch im Rahmen der *klassischen* Raumzeit, obwohl selbst Lichtkegel schon eine Rolle spielen. Doch die Relativitätstheorie wartet schon in den Kulissen auf ihren Auftritt.

3.2 Die Kombination von LF und S5×K_{lin}: LF×S5

LF×S5 ist auf unproblematische Weise eine konservative Erweiterung ihrer jeweiligen Komponenten, so dass alle Theoreme der Komponenten S5×K_{lin} und LF weitergelten. Interessant sind typische Kombinations-Theoreme, die etwas über das Verhältnis der Raumoperatoren „überall“ und „irgendwo“ zu den verschiedenen Möglichkeits- und Notwendigkeitsoperatoren aussagen. Auch diese Theoreme sind bei der Erweiterung der tempo-modalen Logiken um eine Raumdimension formal gesehen kaum überraschend: Es handelt sich um Versionen der inzwischen wohlbekannten (com)- und (chr)-Gesetze. In der Deutung entsprechen ihnen und einigen Konsequenzen aus ihnen allerdings bereits ziemlich interessante Aussagen. Mit einer *vollständigen* Axiomatik ist schon allein aufgrund der Dimensionenzahl von vornherein nicht zu rechnen.

Das Alphabet von LF×S5 enthält das übliche aussagenlogische Vokabular und als Modaloperatoren die Zeichen „H“, „G“, „N“, „□“ und „E“. Die Formregeln sind wie üblich. Die Zeichen „P“, „F“, „M“, „◊“ und „S“ sind als „~ ξ ~“-Versionen der Grundoperatoren definiert.

Es sei daran erinnert, dass in Kap. II 3 eine $S5\times K_{lin}$-artige Partitionsstruktur als geordnetes Paar aus einer (als Menge von events gedeuteten) Kontextmenge und einer $S5\times K_{lin}$-artige Partitionierung dieser Menge definiert worden ist. Eine besondere Definition der LF×S5-*Struktur* ist für die Definition des LF×S5-Modells nicht erforderlich. Denn an dieser Stelle kann man sich die (bereits in Kap. I 3 vorbereitete) Auffassung zu Nutze machen, dass ein möglicher Weltverlauf formal gesehen gar nichts anderes ist als eine Interpretationsfunktion für die atomaren Formeln. Im Falle von LF×S5 weist eine solche Funktion den Wert 1 oder 0 pro *event* zu. Zwei verschiedene mögliche Weltverläufe mit räumlicher Dimension, die man als zwei verschiedene **Weltblätter** eines Weltbuches visualisieren kann, sind formal gesehen einfach unterschiedliche Arten der „Beschriftung“ ein- und derselben event-Menge.[2] Dieser Grundgedanke lässt sich sowohl für das klassische Bild als auch für die Relativitätstheorie voraussetzen.

Für Weltblätter wird globale (d.h. raumweite) historizistische Zugänglichkeit gefordert. Bildlich gesprochen sind zwei Weltblätter an der Zeitkante t gerade dann gegenseitig zugänglich, wenn sie bis zu incl. t völlig gleich beschriftet sind (sie werden ja immer unter dem Blickwinkel einer ganz bestimmten Partitionsstruktur mit ihren Orten und Zeiten betrachtet). In genau diesem Fall kann man sie bis incl. t auch zusammenleimen, ohne dass irgendetwas unlesbar würde. Technisch gesprochen sind eine Interpretationsfunktion h und eine Interpretationsfunktion h’ gerade dann an einem event e (bzw. zu einer Zeit t an einem Ort s) gegenseitig zugänglich, wenn Folgendes vorliegt (**globale historizistische Zugänglichkeit**):[3]

> Für jedes e’ aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$, d.h: für jedes event eines Zeitpunkts vor dem Zeitpunkt von e sind die Weltblätter h und h‘ gleich „beschriftet“.

Sind h und h’ zu Zeit t an Ort s (also an $e = t\cap s$) gegenseitig zugänglich, so sind sie es auch an einem beliebigen anderen Ort s’ **[B1]**. Die Modelldefinition bereitet keine Schwierigkeiten. An der Semantik der Operatoren ändert sich nichts außer der Ergänzung des Ortsparameters bzw. des Alternativen-Parameters **[B2]**. Die Allgemeingültigkeit soll definiert sein wie üblich.

Die Deutung der Operatoren ergibt sich daraus, dass „$V(\alpha,\langle t,s,h\rangle) =1$“ für die Bewertung einer Gesamtformel hemiaktualistisch interpretiert soviel heißt wie „α ist zu Zeit t an Ort s bei bis zu t h-artigem Weltverlauf wahr“:

---

[2] Die Identifikation von Alternativen mit PC-Interpretationsfunktionen für die atomaren Formeln wird hier also auf den Raum ausgeweitet.

[3] „t_e“ heißt einfach „der Zeitpunkt t, zu dem das event e im Sinne der Partitionsstruktur des zu Grunde gelegten Modells gehört“. Ab Kap. III 2 wird dieser Begriff auf Koordinatensysteme relativiert und eine – unmissverständlich übersetzbare, gleichwertige – Schreibweise benutzt, bei der t und s Funktionen sind.

E Es ist *zur Zeit vor Ort* ***rebus sic stantibus*** (d.h. bei bis zu incl. t h-artiger Entwicklung) überall der Fall, dass
S Es ist *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** irgendwo der Fall, dass
H Es war *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** immer der Fall, dass
P Es war *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** der Fall, dass
N Es ist *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** unvermeidbar / feststehend / wissbar, dass
M Es ist *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** machbar / noch drin / nicht auszuschließen, dass
□ Es ist *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** aber auch unter allen anderen Umständen der Fall, dass
◊ Es ist *zur Zeit vor Ort* ***r.s st.*** theoretisch möglich, dass

Es ist sofort einzusehen, warum alle LF×S5-Instanzen aller LF-Theoreme und auch alle LF×S5-Instanzen aller S5×K_{lin}-Theoreme LF×S5-allgemeingültig sind **[B3]**. LF×S5-typische Theoreme können nur solche sein, die die Interaktion der Ortsoperatoren mit „N“ und „□“ (sowie „M“ und „◊“) betreffen. Denn in LF kommen keine Ortsoperatoren vor, in S5×K_{lin} keine Notwendigkeitsoperatoren, so dass nicht klar ist, ob es für deren Interaktion Gesetze gibt. Es liegt nahe, dass wenigstens die Spezialfälle der (com)- und (chr)-Gesetze zu diesen Gesetzen gehören werden. Für das Verhältnis der Ortsoperatoren zu „□“ und „◊“ lässt sich leicht einsehen, dass das wirklich so ist, und dass die Spezialfälle der (com)- und (chr)-Gesetze hier auch tatsächlich *alle* Interaktions-Gesetze sind **[B4]**. Die Spezialfälle sind:[4]

(com-◊S) $\ulcorner \Diamond S\,\alpha \equiv S\Diamond\alpha \urcorner$ (chr-◊E) $\ulcorner \Diamond E\,\alpha \rightarrow E\Diamond\alpha \urcorner$ (chr-S□) $\ulcorner S\Box\alpha \rightarrow \Box S\alpha \urcorner$

Für die Interaktion von „N“/„M“ und „S“/„E“ ist der Fall nicht ganz so offensichtlich. Man bemerkt aber schnell, dass man mit einem ganz ähnlichen Gedanken hier zu demselben Ergebnis kommt **[B5]**. Die Spezialfälle der (com)- und (chr)-Gesetze sind hier:

(com-MS) $\ulcorner MS\,\alpha \equiv SM\alpha \urcorner$ (chr-ME) $\ulcorner ME\,\alpha \rightarrow EM\alpha \urcorner$ (chr-SN) $\ulcorner SN\alpha \rightarrow NS\alpha \urcorner$

Diese Überlegungen zeigen ohne weiteres, dass man ein korrektes und recht leistungsfähiges Herleitungsspiel für LF×S5 erhält, wenn man die beste erreichbare LF-Axiomatik sammt Axiomen für Randlosigkeit und Verinselungsfreiheit (vgl. II 1.3) aufstockt um:

- S5-Axiome für „S“/„E“
- die (com) und (chr)-Gesetze aus der Axiomatik für K_{lin}×S5 für Zeit- und Ortsoperatoren
- die soeben diskutierten (com)- und (chr)-Gesetze für Raum- und Modaloperatoren
- Die NEC-Regel für „E“.

[4] Die dritte Formel ist jeweils streng genommen redundant, vgl. B4 zu Kap. I 2.

Zwar dürfte es für die mögliche Vollständigkeit eines Herleitungsspiels für LF×S5 nach dem von Reynolds erzielten Ergebnis kein prinzipielles Problem mehr sein, dass sich die Allgemeingültigkeit von „p → Np“ von LF auf LF×S5 überträgt.[5] Es ist jedoch aufgrund der Anzahl der Dimensionen unwahrscheinlich, dass überhaupt ein vollständiges Herleitungsspiel für LF×S5 existiert **[B6]**. Auch ein fragmentarisches Herleitungsspiel erlaubt freilich einen systematischen Blick auf eine Reihe von interessanten LF×S5-allgemeingültigen Formeln:

(1) Die (com)- und (chr)-Gesetze für „N“/„M“ und „S“/„E“ sind in ihrer Deutung sehr plausible Prinzipien für die Verbindung von Raumbegriffen und (historischen) Modalbegriffen:

(com-MS) „MSp ≡ SMp “
Wenn es (jetzt hier r.s.st) möglich ist, dass es irgendwo der Fall ist, dass p,
dann ist es (jetzt hier r.s.st.) irgendwo der Fall, dass es möglich ist, dass p, und umgekehrt.

(chr-ME) „MEp → EMp“
Wenn es (jetzt hier r.s.st) möglich ist, dass es überall der Fall ist, dass p,
dann ist es (jetzt hier r.s.st.) überall der Fall, dass es möglich ist, dass p.

(chr-SN) „SNp → NSp“
Wenn es (jetzt hier r.s.st) irgendwo der Fall ist, dass es feststeht, dass p,
dann steht es (jetzt hier r.s.st) fest, dass es irgendwo der Fall ist, dass p.

(2) Es liegt sehr nahe, dass sich das Mischaxiom „PNp → NPp“ gewissermaßen auf den Raum ausweiten lassen muss. In der Tat kann man an beliebiger Stelle ein „E“ oder ein „S“ einfließen lassen: „PNEp → NPEp“ und „PNS p → NPSp“ sind triviale Einsetzungen. „EPNp → ENPp“ bzw. „SPNp → SNPp“ ensteht durch triviale Anwendung der K-Regel DR1 bzw. DR3 für „E“ bzw. „S“ auf das Mischaxiom. Daraus folgt, mit den (com)- und (chr)-Gesetzen, auch „PENp → NEPp“[6] und „PSNp → NSPp“ **[B7]**.

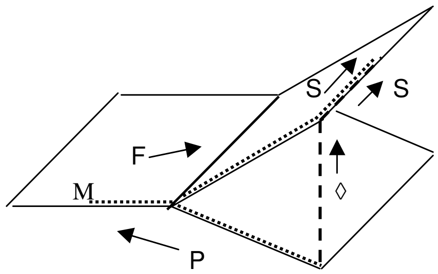
(3) Es liegt nahe, dass sich die Allgemeingültigkeit von „p → Np“ (*nicht*: $\ulcorner \alpha \rightarrow N\alpha \urcorner$!) ebenfalls auf den Raum ausweiten lassen muss. Es fragt sich, ganz abgesehen von der Herleitbarkeit, ob die *Formeln* „Sp → NSp“, „Sp → SNp“, „Ep → NEp“, „Ep → ENp“ LF×S5-allgemeingültig sind. In der Tat ist das so **[B8]**.

(4) Als Einsetzungen in das Axiom für die Verinselungsfreiheit des tempo-modal-spatialen Kontinuums erhält man sofort „◊Sp → PMFSp“. Diese Formel beschreibt

5 Vgl. Kap. II 1.7.

6 Man erinnere sich an die Verstärkung des (com)-Gesetzes auf starke Modaloperatoren in B5 zu Kap. I 2.

auf interessante Weise, durch welche Schritte sehr „weit“ auseinander liegende Positionen in einem Weltbuch miteinander verbunden sein können:



(5) Es sind genug vertauschende S5-Operatoren im Spiel, um die folgende Variante der „Alle Wege führen nach Rom“-Formel (rom) herleitbar zu machen: „SMSp → EMSp“ **[B9]**. Ferner ist auch das Spiegelbild dieser Formel, nämlich „MSMp → NSMp“ herleitbar **[B10]**. Dabei muss in der Herleitung einmal das (com)-Gesetz verwendet werden. Die erste der beiden Formeln drückt in gewisser Weise objektsprachlich aus, was bereits als Folge aus der Forderung der globalen Historizität deutlich wurde: Wenn es *irgendwo* möglich ist, dass irgendwo p der Fall ist, dann ist das überall möglich. Die zweite Formel könnte mit ihrem Übergang von „M“ zu „N“ stutzig machen, ist aber bei einer S5-Modalität in Wirklichkeit reichlich harmlos: Wenn es möglich ist, dass es irgendwo möglich ist, dass p, dann steht fest, dass es irgendwo *möglich* ist, dass p – womit noch nicht gerade viel feststeht!

(6) Noch deutlicher wird es, was raumweite historische Modalitäten sind, wenn man sich klar macht, dass die folgenden Formeln herleitbar (und also bei korrektem Herleitungsspiel allgemeingültig) sind **[B11]**:

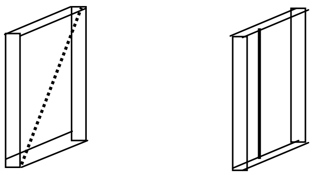
(a) Mp → EMSp	(e) ESNSp → ENSp
(b) SNp → ESNp	(f) Np → ENSp
(c) Np → ESNp	(g) SNSp → ENSp
(d) SNSp → ESNSp	(h) ESNp → ENSp

Da die Formel (a) allgemeingültig ist, wird sie auch dann verifiziert, wenn „p“ *allein* hier, jetzt und *rebus sic stantibus* wahr ist. Dann bedeutet sie: Wenn es r.s.st. *hier* jetzt möglich ist, dass p, dann ist es r.s.st. jetzt *überall* möglich, dass irgendwo (nämlich *hier*) p der Fall ist“. Die Formel (f) ist zu deuten als „Wenn es (hier jetzt r.s.st.) feststeht, dass p, dann steht es *überall* fest, dass irgendwo p“ und die Formel (g) als „Wenn es irgendwo feststeht, dass es irgendwo der Fall ist, dass p, dann steht es *überall* fest, dass es irgendwo der Fall ist, dass p“. Formel (g) lässt sich sofort mit dem T-Theorem T2 zur Äquivalenz „SNSp ≡ ENSp“ verstärken. Dasselbe gilt trivialerweise für die Verstärkung von (rom) zu „SMSp ≡ EMSp“ für (d), für (b) und für (e) (über T-T2 und DR 1). Die Konversen von (a), (c), (e) und (f) sind dagegen nicht allgemeingültig:

Zur Konverse von (a): In Paris ist z.B. jetzt die Aussage „Es ist überall möglich, dass irgendwo die Tower Bridge im Nebel liegt“ wahr („EMSp“ mit „p“ = „Die Tower Bridge liegt im Nebel“). Denn ist es in London neblig, so gibt es ja auch genau einen Ort, nämlich London, an dem die Tower Bridge gerade in Nebel gehüllt sein kann. Da die echte Tower Bridge jetzt nur in London sein *kann*, ist jedoch in Paris jetzt die Aussage „Es ist (hier) möglich, dass die Tower Bridge im Nebel liegt“ („Mp“) falsch.

Zu den Konversen von (c) und (f): Wenn in Timbuktu jetzt die Aussage „Es steht überall fest, dass irgendwo eine Seeschlacht stattfindet“ („ENSp“) wahr ist, weil z.B. in der Bucht von Salamis eine Seeschlacht stattfindet, so ist die Aussage „Es steht überall fest, dass (jetzt *hier*) eine Seeschlacht stattfindet“ („Np“) mitten in der Wüste noch lange nicht wahr. Gleiches gilt für „Es ist überall der Fall, dass irgendwo feststeht, dass (dort jetzt) eine Seeschlacht stattfindet“ („ESNp“) im Vorderglied.

Zur Konverse von (h): Wieso „ENSp → ESNp“ nicht allgemeingültig ist, ist etwas schwieriger einzusehen. Letztlich liegt es daran, dass die Konverse des (chr)-Gesetzes, also „NSp → SNp“ ähnlich wie der prädikatenlogische Quantorendreher nicht allgemeingültig ist. Es mag überall gelten, dass es für jeden möglichen Weltverlauf einen „p“-Ort gibt („ENSp“). Aber dies kann in jedem möglichen Weltverlauf ein *anderer* Ort sein. Doch durch „ESNp“ wird behauptet, dass überall gilt, dass es mindestens *einen* Ort gibt, der in allen möglichen Weltverläufen ein „p“-Ort ist:



Spatio-modale Isochronen mit „ENSp ∧ ~ ESNp“ (links) und „ESNp“ (rechts)

(7) Für die Betrachtung der möglicherweise zukünftigen Seeschlacht *in der Ferne* sind natürlich Formeln mit der Zeichenkombination „NF“ interessant:

(d) SNFp → NFSp	(d*) NFSp → SNFp
(e) ~NFSp → S~NFp	(e*) S~NFp → ~NFSp
(f) S~NFSp → ~NFSp	(f*) ~NFSp → S~NFSp.

Die Formeln (d), (e) und (f) sind zu lesen als:

(d) „Wenn es (jetzt) irgendwo feststeht, dass es dort der Fall sein wird, dass p, dann steht es (jetzt) auch hier fest, dass es irgendwo der Fall sein wird, dass p“.
(e) „Wenn es jetzt hier noch offensteht, ob es irgendwo der Fall sein wird, dass p, dann gibt es einen Ort, an dem jetzt noch offensteht, ob es dort der Fall sein wird, dass p“.

(f) „Wenn es *irgendwo* noch offensteht, ob es irgendwo der Fall sein wird, dass p, dann steht es *auch hier* noch offen, ob es irgendwo der Fall sein wird, dass p."

Die gesternten Formeln sind, wie man sofort sieht, jeweils einfach die Konversen. Allein die Möglichkeit, solche Aussagen auszudrücken, sagt einiges über die Expressivität von LF×S5 aus.

Die Formeln (d) und (e) lassen sich herleiten. Von ihren Konversen (d*) und (e*) lässt sich dagegen durch Gegenbeispiele zeigen, dass sie nicht allgemeingültig sind **[B12]**. Überraschenderweise ist aber sowohl (f) als auch (f*) allgemeingültig, obwohl sich (f) von (e*) nur durch ein einziges eingefügtes „S" unterscheidet **[B13]**.

Besonders die unter (6) und (7) diskutierten Formeln zeigen *en detail*: Eine Verzweigungskante eines LF×S5-Modells zu einem Zeitpunkt und einer gewissen, bis dahin abgeschlossenen Entwicklung stellt eine Art globale ontische „Vorderkante" der Weltgeschichte zu diesem Zeitpunkt dar: Was zu einer Zeit an einem Ort feststeht, davon steht dann überall fest, dass es dort festeht; und was zu einer Zeit an einem Ort offensteht, davon steht überall offen, ob es an jenem Ort geschieht. Es wird sich freilich in Teil IV zeigen, dass die ganze Metaphorik von der raumweiten Vorderkante der Weltgeschichte im Lichte der Relativitätstheorie einer tiefgreifenden Revision bedarf.

3.3 Wissbar, unbeeinflussbar, feststehend

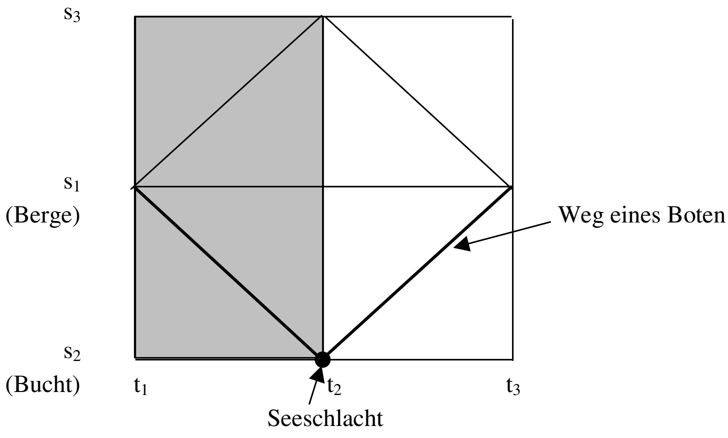
3.3.1 Motivation der Ausdifferenzierung des „Notwendigkeits"-Operators

Insofern man in Logiken für das tempo-modale Kontinuum die räumliche Komponente modaler Verzweigungen nicht beachtet, wird man keinen Anlass sehen, zwischen den Deutungen „unabänderlich" (bzw. „unvermeidbar", „unbeeinflussbar"), „wissbar" und „feststehend" für den „N"-Operator zu unterscheiden. Dies ändert sich bereits, wenn man modale Verzweigungen in der *klassischen* Raumzeit betrachtet. Hier fallen epistemische und ontische (In)determiniertheit sogar besonders deutlich auseinander. Die Operatoren für epistemische und pragmatische „Notwendigkeit" lassen sich semantisch problemlos fassen, und ihr Verhalten ist zu einem guten Teil dem Verhalten des ontischen Notwendigkeitsoperators ähnlich. Doch die (com)- und (chr)-Gesetze mit den Raumoperatoren gelten nun nicht mehr ohne weiteres, wenn man – freilich noch immer ohne Berücksichtigung der Relativitätstheorie – für die Deutung annimmt, dass es eine endliche Höchstgeschwindigkeit der Signalübertragung gibt. Es lohnt sich also, schon unter klassischen Voraussetzungen im Rahmen des Seeschlacht-Szenarios die folgende Frage zu stellen:

> Wie verhält sich die Bestimmtheit eines Ereignisses (ontische Notwendigkeit) zu seiner Unvermeidbarkeit (pragmatische „Notwendigkeit“) und zu seiner Wissbarkeit (epistemische „Notwendigkeit“), wenn man nicht unendlich schnell von einem Ort zum andern gelangen kann?

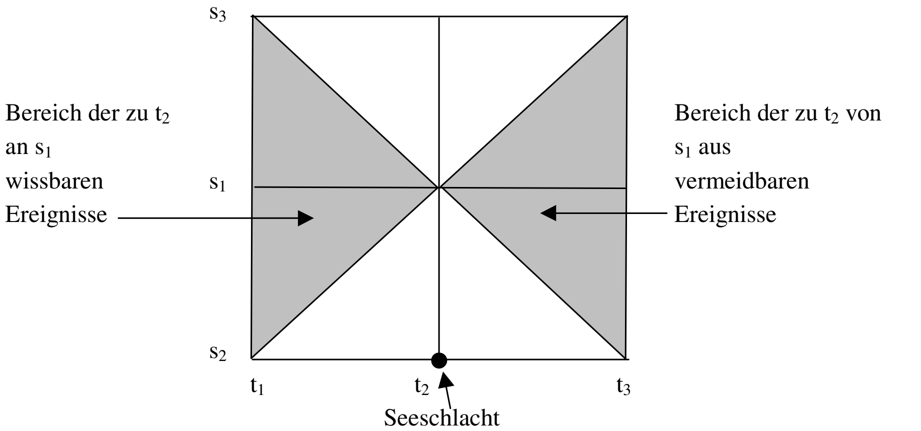
In der rein zeitlichen Betrachtung ohne Einbeziehung des Raums war das alles kein Problem. Das wird besonders klar, wenn man eine simple zeitlich-modale Baumstruktur als die lokale Entwicklung der Welt an einem einzigen Ort (z.B. der Bucht von Salamis) betrachtet und ein Weltbuch als aus vielen nebeneinander gelegten Verzweigungsstrukturen aufgebaut ansieht: *In* der Bucht ist die Seeschlacht genau so lange vermeidbar, wie sie noch nicht im Gange ist, und sie ist sofort wissbar, sowie sie beginnt. Unvermeidbarkeit, Wissbarkeit und Bestimmtheit fallen hier also völlig zusammen. Bezieht man andere Orte mit ein, wird es schon komplizierter. Nehmen wir an, wir könnten in den Bergen vom Geschehen in der Bucht nur etwas über reitende Boten erfahren. Wir haben einen Boten in der Bucht stationiert. Auch bei uns haben wir zwei weitere Boten, die wir bei Bedarf losschicken können. Alle Boten sind so trainiert, dass sie immer mit Höchstgeschwindigkeit reiten können, egal in welchem Gelände. Damit die nächste Zeichnung schön symmetrisch aussieht, nehmen wir außerdem an, wir hätten einen weiteren Boten in einem Ort, der in entgegengesetzter Richtung zur Bucht im gleichen Abstand von unserer Position liegt. Nehmen wir außerdem noch an, dass es uns in eine Welt verschlägt, *in der zu t_2 tatsächlich die Seeschlacht stattfindet, dass also ein ganz bestimmtes Weltblatt verwirklicht wird.* Dieses Weltblatt (genauer gesagt: ein kleiner Ausschnitt daraus) sieht dann, aus seiner liegenden Position aufgerichtet, wie folgt aus:

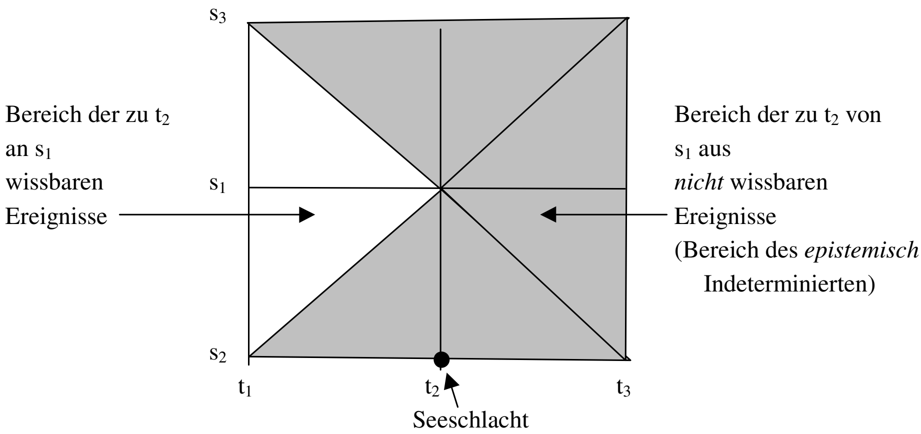
grau: Bereich des zu t_2 (an s_1 und überall sonst) ontisch Feststehenden

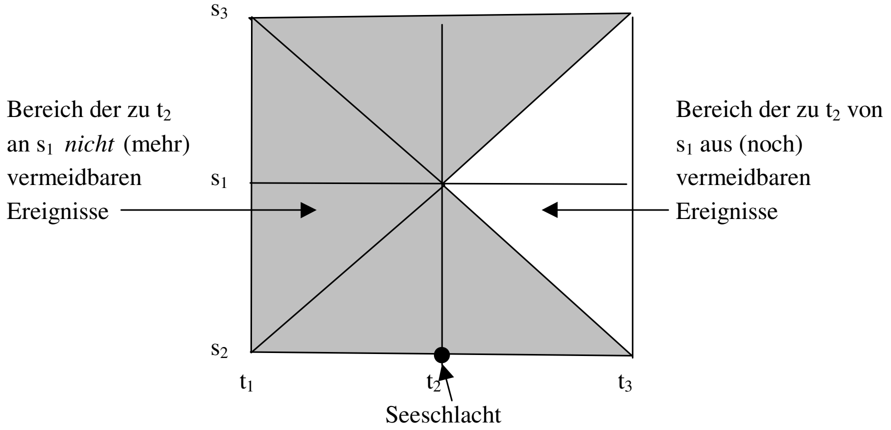


Unsere epistemische und pragmatische Situation zu t_2 ist reichlich eingeschränkt, wenn wir davon ausgehen, dass die Boten eine Längeneinheit pro Zeiteinheit Höchstgeschwindigkeit reiten, so dass ihr Weg im Diagramm im 45°-Winkel erscheint. Der späteste Termin, an dem wir unseren Boten von s_1, etwa mit

Bestechungsgeldern ausgestattet, losschicken können, um die Schlacht an s_2 zu verhindern, ist gerade *vor* t_1. Der späteste Termin, zu dem der Bote losreiten kann, um uns zu t_2 über die Situation in der Bucht zu informieren, ist t_1. Der früheste Termin, zu dem der Bote losreiten kann, um uns davon zu informieren, dass die Schlacht tatsächlich stattfindet, ist t_2. Somit ist der früheste Termin, zu dem wir davon erfahren können t_3. Wir können also zu t_2 an s_1 raten, dass die Schlacht stattfindet, und wenn sie stattfindet, so raten wir richtig. Aber wir können an s_1 zu t_2 weder schon davon wissen, noch können wir sie zu t_2 von s_1 aus noch verhindern. Dasselbe gilt natürlich für das Geschehen an s_3. Mit ganz analogen Überlegungen zum Geschehen an jedem Ort, den Boten von und nach s_2 bzw. s_3 zwischendurch passieren, können wir unsere Situation zu t_2 so darstellen:

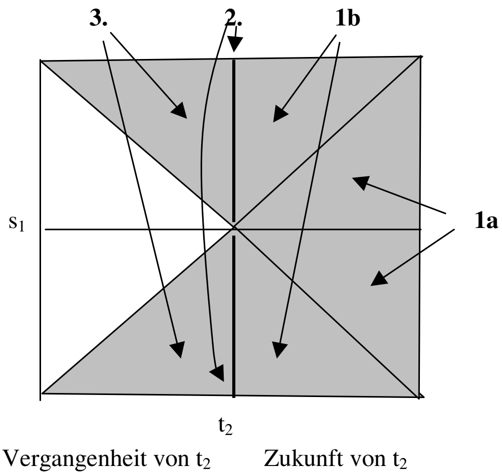






Zu t_2 ist die Seeschlacht an s_1 also ein Ereignis aus dem Bereich der weder noch beeinflussbaren noch schon wissbaren Ereignisse. Interessanterweise gibt es damit jede Menge Ereignisse in der Vergangenheit, von denen *epistemisch* nicht feststeht, ob sie stattgefunden haben bzw. stattfinden. Zusammengefasst teilt sich in dieser Betrachtungsweise das zu t_2 an s_1 *epistemisch* Indeterminierte in drei Bereiche auf:

1. die Zukunft mit ihrem a) beeinflussbaren und b) nicht beeinflussbaren Bereich
2. die Gegenwart abgesehen von s_1
3. der noch nicht wissbare Teil der Vergangenheit.



Es lässt sich außerdem festhalten:
1. Die Menge der zu t_2 an s_1 wissbaren Ereignisse (weiße Fläche) ist eine echte Teilmenge der Menge der zu t_2 an s_1 feststehenden Ereignisse (weiße Fläche + 3. + 2.).

2. Die Menge der zu t_2 an s_1 feststehenden Ereignisse ist eine echte Teilmenge der Menge der zu t_2 an s_1 nicht mehr vermeidbaren Ereignisse (weiße Fläche + 3. + 2. + 1.: alles außer 1a).

Diese Redeweise ist recht instruktiv, wenn man über eine Ungenauigkeit hinwegsieht, die an den festgestellten Implikationsbeziehungen nichts ändert: Es gibt auch in den schattierten Bereichen der Darstellung feststehende und auch wissbare Ereignisse (in einem sehr weiten Sinn von „Ereignis"). So ist die Geltung des Nichtwiderspruchssatzes an s_1 in der Zukunft von t_2 bereits zu t_2 an s_1 wissbar, weil sie für jeden möglichen Weltverlauf anzunehmen ist. Es wäre also genau genommen vom Bereich der wissbaren *kontingenten* Ereignisse etc. zu sprechen. Der Punkt ist nicht unwichtig. Doch er macht, einmal bemerkt, keinerlei Schwierigkeiten.

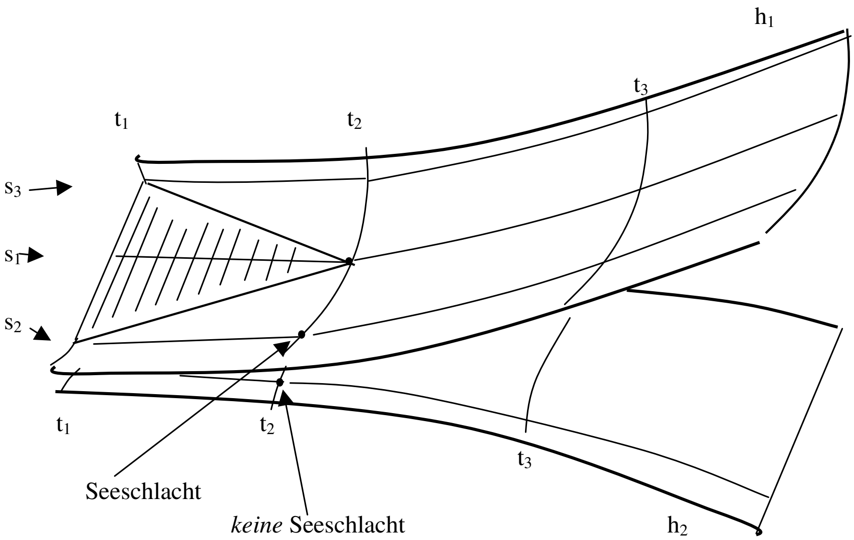
Weit gravierender ist Folgendes: Die bisher angestellten Überlegungen standen unter der Voraussetzung, dass ein bestimmtes Weltblatt, z.B. h, verwirklicht würde. Diese Voraussetzung widerspricht natürlich dem Indeterminismus. Dennoch war sie zur Vorbereitung auf eine indeterministische Beschreibung unserer Situation nützlich. Es war mit dieser Voraussetzung möglich, von unserer Situation zu t_2 an s_1 *simpliciter* zu sprechen. Denn es war ja sowieso vorausgesetzt, dass es der mögliche Weltverlauf h sein sollte, der verwirklicht würde.

Für eine ernsthafte indeterministische Beschreibung muss man davon abgehen: Man darf nämlich dafür nur von unserer Situation zu t_2 an s_1 *bei bis zu incl.* t_2 *h-artigem Weltverlauf* sprechen. Im klassischen und noch nicht relativistischen Bild wird man dabei davon ausgehen, dass mit einem t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf eine bestimmte weltweite Entwicklung bis zu t_2 als ihrer Vorderkante gemeint ist. Der ganze Bereich von h bis zu incl. t_2 wird als das zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf Feststehende angesehen werden; und das zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf Feststehende wird als identisch angesehen werden mit dem zu t_2 *an jedem beliebigen Ort* bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf Feststehenden.

In Bezug auf das Wissbare ändert sich dadurch nichts Wesentliches. Damit etwas zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf *wissbar* ist, muss es zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf feststehen. Denn wovon noch nicht feststeht, *ob* es geschieht oder nicht, davon kann man nicht wissen, *dass* es geschieht; wovon noch nicht feststeht, *ob* es geschehen ist oder nicht, davon kann man nicht wissen, *dass* es geschehen ist; und wovon noch nicht feststeht, *ob* es geschehen wird oder nicht, davon kann man nicht wissen, *dass* es geschehen wird. Freilich gibt es im klassischen Bild einen Bereich des an einem Ort zu einer Zeit bei einem bestimmten Weltverlauf bis zu dieser Zeit epistemisch prinzipiell Indeterminierten, der dennoch bereits ontisch determiniert ist, wenn die Geschwindigkeit der Signalübertragung nicht unendlich groß ist. Das bedeutet, dass es zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf für einen Beobachter zu t_2 an s_1 prinzipiell noch gar nicht möglich ist, zu wissen, dass der Weltverlauf bis zu incl. t_2 *h-artig* gewesen ist. Denn er kann ja noch gar nicht wissen, was in den Bereichen 2. und 3. in der Darstellung geschehen ist.

Es liegt daher nahe, im klassischen Bild die Menge der *ontischen* Alternativen zu t an s bei bis zu incl. t h-artigem Weltverlauf zu unterscheiden von der Menge der *epistemischen* Alternativen zu t an s bei bis zu incl. t h-artigem Weltverlauf. Die

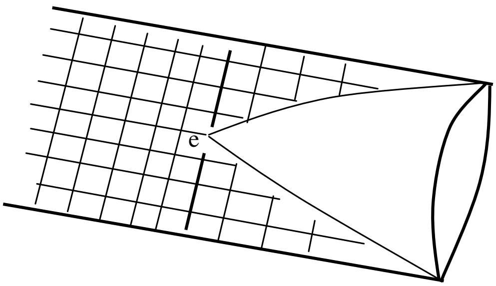
Menge der ontischen Alternativen ist dabei eine Teilmenge der Menge der epistemischen Alternativen: Was als ontische Alternative noch im Rennen ist, davon muss man jeden Teilinhalt auch für möglich halten *dürfen* (ganz abgesehen davon, ob man genug Phantasie, Überblick, theoretisches Wissen o.ä. hat, um es für möglich halten zu *können*). Denn wie sollte etwas realisiert sein, dessen Verwirklichung anzunehmen nicht erlaubt ist? Bei endlicher maximaler Geschwindigkeit der Signalübertragung muss es sich sogar um eine *echte* Teilmenge handeln. Gehört dann nämlich zum h-artigen Weltverlauf das Stattfinden einer Seeschlacht zu t_2 an s_2, so ist dennoch zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf ein möglicher Weltverlauf, zu dem es gehört, dass zu t_2 an s_2 keine Seeschlacht stattfindet, immer noch eine der *epistemischen* Alternativen. Sie wird nicht ausgeschlossen durch den besten möglichen Informationsstand, den man zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf haben kann. Damit ist auch zugleich klar, dass die epistemischen Alternativen nicht einfach *alle* möglichen Weltverläufe sind. Denn der beste mögliche Informationsstand, den man zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf haben kann, enthält gerade das Wissen um genau alle zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf wissbaren Ereignisse. Alle epistemischen Alternativen zu t_2 an s_1 bei bis zu incl. t_2 h-artigem Weltverlauf müssen also für wenigstens den ganzen Bereich des Wissbaren gleich, und zwar h-artig, „beschriftet“ sein. Dass das trivialerweise auf bis zu incl. t_2 alle h-artigen Weltverläufe zutrifft, weil sie sogar bis zur Vorderkante t_2 allesamt h-artig beschriftet sind, zeigt, dass die erste oben festgehaltene Implikation auch für die streng durchgeführte *in*deterministische Betrachtung bestätigt wird: Die Menge der zu t_2 an s_1 wissbaren Ereignisse ist eine echte Teilmenge der Menge der zu t_2 an s_1 feststehenden Ereignisse. Ganz grob lässt sich das mit zwei Alternativen so zeichnen wie folgt. Dabei sind die beiden Weltblätter genau auf dem schraffierten Dreieck aufeinandergeklebt und in diesem Bereich zwingend identisch, können aber überall sonst (abgesehen von der Geltung logischer Gesetze) voneinander abweichen.



Es bietet sich nach dieser Klärung unmittelbar an, einen Operator „N_Δ“ so zu definieren, dass die für ihn relevante Zugänglichkeitsrelation zwischen Weltblättern gerade auf die soeben erläuterte Weise definiert ist. Die natürliche Interpretation dieses Operators wäre „Es ist wissbar, dass“. Denn $\ulcorner N_\Delta\alpha \urcorner$ wäre gerade dann zu t an s bei bis zu incl. t h-artigem Weltverlauf wahr, wenn α in jeder *epistemischen* Alternative h' zu h an e = t $\cap$ s wahr wäre. Dass das ohne große Probleme möglich ist, wird Abschnitt 3.3.2 zeigen.

Es ist sehr verführerisch, sogleich in Analogie zu den bisher erzielten Ergebnissen auch *pragmatische* Alternativen zu behandeln. Das ergäbe das folgende Bild:

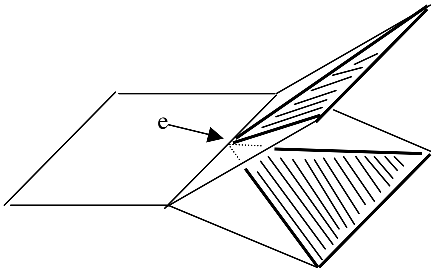
(a) So wie die epistemischen Alternativen von e aus bei h-artigem Weltverlauf bis t_e nur auf einem Dreieck vom unteren Rand bis zur Mitte aufeinander kleben, so klaffen die pragmatischen Alternativen von e aus bei h-artigem Weltverlauf bis t_e nur auf der Fläche eines Dreiecks vom oberen Rand bis zur Mitte auseinander, sind aber mit ihrer gesamten übrigen Fläche verklebt. Denn nur am Zustandekommen oder der Vermeidung von Ereignissen in diesem Bereich lässt sich von e aus bei h-artigem Weltverlauf bis t_e mitwirken. Zwei Weltblätter sind demnach zu e pragmatische Alternativen zueinander, wenn sie (via Bewertungsfunktion) wenigstens für den gesamten Bereich gleich beschriftet sind, der von e aus nicht mehr beeinflussbar ist.



(b) Es bietet sich an, einen Operator „N_∇“ so zu definieren, dass die für ihn relevante Zugänglichkeitsrelation zwischen Weltblättern gerade im Sinne von (a) definiert ist. $\ulcorner N_\nabla\alpha \urcorner$ wäre gerade dann zu t an s bei bis zu incl. t h-artigem Weltverlauf wahr, wenn α in jeder Alternative h' zu h i.S. v. (a) an e = $\langle$t,s$\rangle$ wahr wäre. Auch das ist technisch ohne Probleme möglich. Die natürliche Interpretation dieses Operators wäre „Es ist nicht (mehr) beeinflussbar, ob“. Die natürliche Interpretation von „M_∇“ wäre (sofern kontingent): „Es ist beeinflussbar, ob“.

Bei genauerem Hinsehen stellt sich etwas Erstaunliches heraus: *(a) ist unhaltbar und taugt nicht zur Begründung von (b). Dennoch ist (b) ganz richtig, muss aber anders begründet werden.*

Punkt (a) leidet unter einem Missverständnis, das wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, dass der Übergang von der vorbereitenden Betrachtung einer einzelnen Weltfläche zu einer echt indeterministischen Betrachtungsweise dabei nicht mit letzter Konsequenz nachvollzogen wird. Denn es wird bei seiner Formulierung vorausgesetzt, dass bei bis zu t_e h-artigem Weltverlauf *nur* noch offensteht, was sich *von e aus* beeinflussen lässt, ansonsten aber bereits feststehen muss, dass der gesamte Bereich, der sich nicht mehr von e aus beeinflussen lässt, h-artig sein muss. Doch das ist, wenigstens im klassischen Bild, schlicht falsch.



Dass man von e aus Einfluss nur darauf ausüben kann, was an einer event location im schraffierten Bereich stattfindet, heißt noch lange nicht, dass bei bis zu t_e h-artigem Weltverlauf für alle event locations *außerhalb* des schraffierten Bereichs feststeht, dass diese h-artig belegt sein müssen. Wäre dies so, so bestünden freilich nur noch die unter (a) beschriebenen möglichen Weltverläufe als pragmatische Alternativen. Doch warum sollte e der einzige Raumzeitpunkt sein, von dem aus sich zu t_e noch etwas in der Zukunft beeinflussen lässt? Offenbar ist doch die Situation in dieser Hinsicht an allen e' aus t_e dieselbe. Um wiederum das Beispiel aus Kap. II 2 zu gebrauchen: Es mag zu t_e an s_e offen sein, ob zu einem t' kurz darauf an s_e ein Abbiegen zur Raststätte stattfindet oder nicht, und außerdem mag es zu t_e an einem Ort s' in China offen sein, ob zu t' an s' ein Sack Reis umfällt oder nicht. Ob die Wirklichkeit eine Welt sein wird, in der NN abbiegt oder nicht, das liegt an NN. Aber zu *welcher* der vielen Entwicklungsalternativen, in denen das passiert, sie sich herausschält, liegt nicht nur an NN.

Es ist, wie sich die Überlegung aus Kap. II 2 nun übertragen lässt, nicht so, dass durch die Entscheidung einer ergebnisoffenen Situation je ein bestimmtes mögliches Weltblatt ergriffen und es ganz alleine zur Verwirklichung bestimmt wird, während andere aussortiert werden. Alles, was NN tun kann, ist, solche Weltblätter, auf denen nicht das verzeichnet ist, was er tut, durch die Tat von der Verwirklichung auszuschließen. Was außer seiner Tat noch auf den Weltblättern verzeichnet ist, die mit ihr zur Verwirklichung übrig bleiben, mag aber sehr stark differieren; und welche Kandidaten zur Verwirklichung im Rennen bleiben, hängt nicht nur von dem ab, was NN jetzt hier tut, sondern z.B. auch von dem, was sich jetzt anderswo tut: Entscheidet er sich fürs Abbiegen statt fürs Weiterfahren, während es sich in China entscheidet, dass der besagte Sack Reis umfällt, anstatt stehen zu bleiben, so scheidet damit jedes Weltblatt aus, auf dem steht, dass NN nicht abbiegt *oder* auf dem steht, dass der Sack Reis in China stehen bleibt.

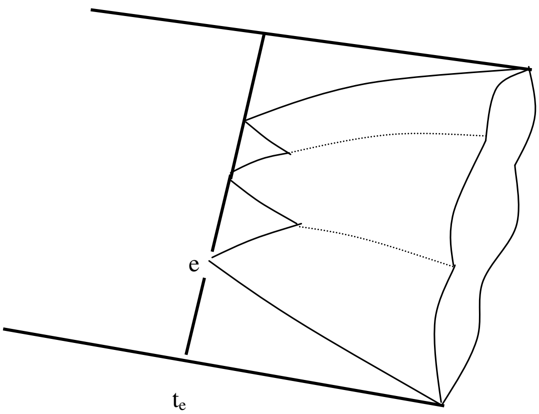
Nun lässt sich dem Begriff einer **pragmatischen Alternative** an einem event e bei bis zu t_e h-artiger Weltentwicklung nur der Sinn abgewinnen, dass es sich dabei um einen möglichen Weltverlauf handelt, der bei bis zu t_e h-artiger Weltentwicklung *und* *bei Einflussnahme von e aus* Kandidat für die Verwirklichung ist. In handlungstheoretischem Vokabular lässt sich das so ausdrücken, dass eine pragmatische Alternative an einem event e bei bis zu t_e h-artiger Weltentwicklung ein solcher möglicher Weltverlauf ist, in den es mich unter meiner Mitwirkung von e aus bei bis zu t_e h-artiger Weltentwicklung noch verschlagen kann.

In diesem Sinne gehören zu den pragmatischen Alternativen von NN an e sowohl ein Weltblatt h, auf dem für t, kurz nach t_e, für einen Ort s in China verzeichnet ist, dass dort ein Sack Reis aufrecht steht („p"), als auch ein Weltblatt h', auf dem für denselben Zeitpunkt und Ort in China verzeichnet ist, dass dort kein Sack Reis aufrecht steht („~p"). Für e' mit e'=t∩s gilt demnach h(p,e')=1 und h'(p,e')=0. h und h' stellen, da e' außerhalb des von e beeinflussbaren Bereichs liegen soll, Weltblätter dar, die in diesem Bereich wenigstens an e' unterschiedlich beschriftet sind. Deshalb können h und h' an e nicht nach dem in (a) vorgeschlagenen Kriterium pragmatische Alternativen an e bei bis zu t_e $h^{(')}$-artiger Weltentwicklung sein. Sie sind es aber intuitiv. Die nach dem Kriterium in (a) entstehende Menge ist als Menge der pragmatischen Alternativen also schlicht nicht umfangreich genug.

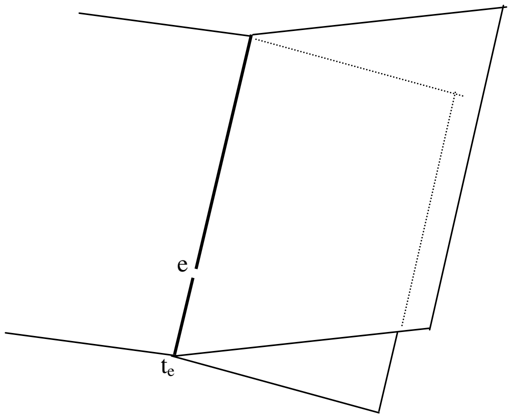
Wie groß ist die Menge der pragmatischen Alternativen im o.g. Sinn aber tatsächlich, und lässt sie sich genau beschreiben? Bereits die natürliche Forderung, dass an allen events von t_e im Prinzip dieselbe Offenheit herrscht und e nicht der einzige Punkt ist, an dem sich noch irgendetwas reißen lässt, um die komplette Verwirklichung von h zu verhindern, lässt die Vermutung zu, dass die Antwort lautet:

> Die Menge der pragmatischen Alternativen an e bei bis zu t_e h'-artiger Weltentwicklung ist identisch mit der Menge der ontischen Alternativen an e bei bis zu t_e h'-artiger Weltentwicklung.

Denn das Gleichbehandlungsgebot für alle e' aus t_e lässt es zu, dass man die Situation an beliebigen e' aus t_e in der bildlichen Darstellung übereinander blendet:



Stellt man sich das für *alle* e' aus t_e durchgeführt vor, so ergibt sich aber offensichtlich wieder einfach das Bild für die ontischen Alternativen:



Abstrakt von der bildlichen Darstellung lässt sich dieser Gedanke plausibel machen wie folgt: Man partitioniere die Menge der an e bei h-artiger Entwicklung bis zu t_e bestehenden ontischen Alternativen danach, wie sie im von e aus beeinflussbaren Bereich *via* Interpretationsfunktion beschriftet sind, bilde also daraus eine Äquivalenzklasse der im von e aus *beeinflussbaren* Bereich h-artigen Weltblätter, h'-artigen Weltblätter etc. Nun kann von e aus kein Einfluss darauf genommen werden, *welche* Alternative aus einer solchen Äquivalenzklasse verwirklicht wird, und zwar genau deshalb, weil von e aus nicht auf den Bereich Einfluss genommen werden kann, in dem sich Weltblätter derselben Äquivalenzklasse allein unterscheiden können. *Jede* Alternative aus *einer* bestimmten so gebildeten Äquivalenzklasse stellt also eine eigene pragmatische Alternative dar. Also sind *alle* Elemente *aller* so gebildeten Äquivalenzklassen pragmatische Alternativen. Die Partition umfasste aber per def. *alle ontischen* Alternativen. Also sind alle ontischen Alternativen pragmatische Alternativen. Außerdem muss jede pragmatische Alternative natürlich eine ontische Alternative sein. Denn es lässt sich von e aus schlecht etwas *mit*realisieren, das nicht realisierbar ist. Die Menge der ontischen Alternativen ist also identisch mit der Menge der pragmatischen Alternativen.

Die soeben gegebene Begründung liefert zugleich die Erklärung, warum (b) korrekt ist, obwohl sich (a) als falsch herausgestellt hat: Jede Alternative i.S. von (a) *repräsentiert* eine ganze im erläuterten Sinn gebildete Äquivalenzklasse von pragmatischen Alternativen. Da diese nur im nicht beeinflussbaren Bereich voneinander abweichen, ist es ohne weiteres möglich, einen Operator „M_∇", der jeweils nur einen *Repräsentanten* jeder dieser Klassen (der zufällig gerade bis auf den Bereich des Beeinflussbaren *h-artig* ist) berücksichtigt, als „es ist beeinflussbar, ob" zu lesen. Man könnte zunächst vermuten, dieser Operator, und entsprechend „N_∇", müssten sich als redundant herausstellen und wieder mit dem einfachen „M" bzw. „N" zusammenfallen. Denn schließlich hatten sich ja die pragmatischen Alternativen als nichts anderes als die ontischen Alternativen herausgestellt. Tatsächlich ist das jedoch nicht der Fall, und „M_∇" / „N_∇" legen ein ganz eigenes semantisches Verhalten an den Tag. Es wird sich herausstellen, dass das seinen guten Sinn hat, weil sich darin gerade der Unterschied zwischen den Wendungen „Es steht fest, *dass*“ („N“) und „Es ist nicht mehr beeinflussbar, *ob*“ („N_∇“) widerspiegelt. Um das sehen zu können, sind freilich die skizzierten Definitionen ordentlich hinzuschreiben und zunächst einige technische Ergebnisse zu etablieren.

3.3.2 Der Ausbau von LF×S5 zu 3N

3.3.2.1 Die Definition von 3N und der klassische Lichtkegel

Die Definitionen für LF×S5 müssen lediglich um einige Klauseln erweitert werden, um „M_Δ“/„N_Δ“ und „M_∇“/„N_∇“ hinzuzufügen. Die resultierende Erweiterung soll **3N** heißen, weil sie drei „N“-Operatoren enthält. Das 3N-Alphabet enthält also zusätzlich zu den Zeichen des Alphabets für LF×S5 die Zeichen „N_Δ“ und „N_∇“. „M_Δ“ und „M_∇“ sind als „$\sim N_\Delta \sim$“ bzw. „$\sim N_\nabla \sim$“ definiert. Die Formregeln sind die üblichen.

In der Modelldefinition muss für jeden der beiden neuen Operatoren eine neue Zugänglichkeitsrelation hinzugefügt werden. Hier stellt sich das einzige zu lösende Aufgabe bei der Definition. Die zwei *minimalen* Bedingungen, die die Zugänglichkeitsfläche für „N_Δ“ bezüglich eines events e (notiert: $\mathbf{\Delta_e}$) erfüllen muss, sind:

(A) 1. Sie muss e selbst enthalten (im Falle des Dreiecks: als Spitze);[7]
2. Sie ist (evtl. unechte) Teilmenge von $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ d.h. der Menge aller events, deren Zeitpunkt der Zeitpunkt von e ist oder davor liegt.

Und die minimale Bedingung, die die Zugänglichkeitsfläche für „N_∇“ bezüglich eines events e erfüllen muss, ist **[B14]**:

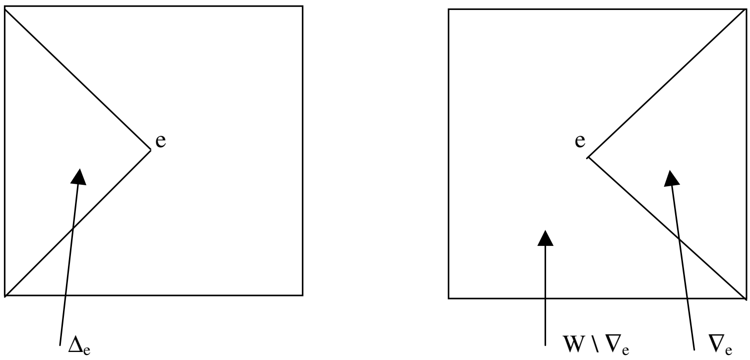
(B) Sie besteht aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ vereinigt mit einer echten Teilmenge von $\{e' \mid t_e < t_{e'}\}$, d.h vereinigt mit einem Teilbereich der events auf Zeitpunkten *später* als t_e.

Die nicht zur Zugänglichkeitsfläche gehörende Aussparung aus dem Weltblatt bezüglich e soll als $\mathbf{\nabla_e}$ notiert werden. Die Zugänglichkeitsfläche selbst lässt sich dann als $\mathbf{W \setminus \nabla_e}$ („W außer ∇_e“) beschreiben. Die Modelldefinition für LF×S5 kann nun einfach um zwei Funktionen, $\mathbf{A^{N\Delta}}$ und $\mathbf{A^{N\nabla}}$, erweitert werden, deren jede jedem event aus W eine Zugänglichkeitsfläche für „N_Δ“ und eine für „N_∇“ zuweist **[B15]**.

---

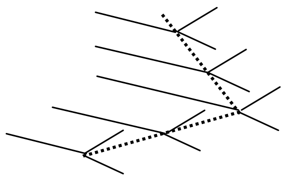
[7] Sie ist damit trivialerweise nichtleer.

Δ_e, ∇_e und W \ ∇_e im intendierten Fall

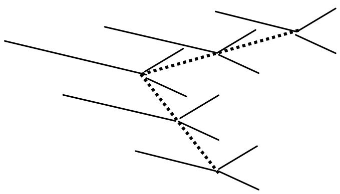


Die beiden neuen Zugänglichkeitsrelationen besagen, wie nicht anders zu erwarten, dass ein Weltblatt h' von einem Weltblatt h aus genau dann zugänglich ist, wenn h und h' sich wenigstens auf der „N_Δ"- bzw. „N_∇"-Zugänglichkeitsfläche (also Δ_e bzw. W\∇_e) völlig gleichen.

Es fällt auf: Jede „Ortsscheibe" eines *intendierten* Modells für sich ist sowohl im Hinblick auf „N_∇" als auch im Hinblick auf „N_Δ" eine LF-Struktur:



lokale Historizität für „N_Δ"



lokale Historizität für „N_∇"

Mit den richtigen Forderungen müsste sich also herausstellen, dass Varianten des Brückenaxioms für LF, das zwar die Vorwärtsverzweigung erlaubt, aber die Rückwärtsverzweigungs ausschließt, allgemeingültig werden, also:

$$\ulcorner PN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta P\alpha \urcorner \qquad \ulcorner PN_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla P\alpha \urcorner$$

Um das zu erreichen, bietet es sich an, als weitere Bedingungen festzuhalten:

(1) Für alle e, e': Wenn $t_{e'} < t_e$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \Delta_e$ (maximale Rückerstreckung)
(2) Für alle e, e': Wenn $e' \in \Delta_e$, dann $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_e$. (Rückwärts-Inklusion).

Wenn man die Rückwärts-Inklusion fordert, so lässt sich zunächst festhalten **[B16]**:

Für alle e, e', h gilt: Wenn $e' \in \Delta_e$, dann $H^{AN\Delta}_{e,h} \subseteq H^{AN\Delta}_{e',h}$.[8]
D.h.: Wenn e‘ im Rückwärts-„Dreieck“ von e liegt, dann ist die Menge der von e aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h eine (evtl. unechte) Teilmenge der Menge der von e‘ aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h: Es können gegenüber e‘ Alternativen weggefallen, aber keine hinzugekommen sein.

Dieses Ergebnis besagt, dass die Menge der epistemischen Alternativen am selben Ort mit der Zeit nie größer, sondern immer kleiner wird: Man kann mit der Zeit immer mehr in Erfahrung bringen, weil immer mehr Denkbarkeiten ausscheiden. Das passt gut damit zusammen, dass auch die Menge der N-Alternativen, der ontischen Alternativen des klassischen Bildes, mit der Zeit kleiner, nicht aber größer, wird. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass für alle e, e', h gilt **[B17]**:

Wenn $t_{e'} < t_e$, dann $H^{A}_{e,h} \subseteq H^{A}_{e',h}$.
D.h.: Wenn e‘ zu einem früheren Zeitpunkt gehört als e, dann ist die Menge der von e aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h eine (evtl. unechte) Teilmenge der Menge der von e‘ aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h: Es können gegenüber e‘ Alternativen weggefallen, aber keine hinzugekommen sein.

Fordert man sowohl maximale Rückerstreckung als auch Rückwärts-Inklusion, so lässt sich leicht die Allgemeingültigkeit von $\ulcorner PN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta P\alpha \urcorner$ beweisen **[B18]**.

Es liegt nahe, gerade die entsprechenden Forderungen auch für ∇_e zu stellen, also zu fordern:

(1*) Für alle e, e': Wenn $t_e < t_{e'}$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \nabla_e$
(maximale Vorwärtserstreckung)
(2*) Für alle e, e': Wenn $e \in \nabla_{e'}$, dann $\nabla_e \subseteq \nabla_{e'}$.
(Vorwärts-Kegelinklusion)

Es lässt sich zunächst auf ganz ähnliche Weise wie zuvor zeigen, dass gilt **[B19]**:

Für alle e, e', h gilt: Wenn $e \in \nabla_{e'}$, dann $H^{AN\Delta}_{e,h} \subseteq H^{AN\Delta}_{e',h}$.
D.h.: Wenn e im Vorwärts-„Dreieck“ von e‘ liegt, dann ist die Menge der von e aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h eine (evtl. unechte) Teilmenge der Menge der von e‘ aus zugänglichen Alternativen zu Weltblatt h.

[8] $H^{AN\Delta}_{e,h}$ ist die Menge der an e von h aus über Δ_e zugänglichen Alternativen.

Nun lässt sich auch die Allgemeingültigkeit von ⌜$PN_{\nabla}\alpha \rightarrow N_{\nabla}P\alpha$⌝ beweisen **[B20]**. Eine weitere zusätzliche Forderung mag man die Forderung der Eigenschaft der echten Spitze nennen:

(echte Spitze) Für alle e: Es gibt kein e' aus t_e mit e ≠ e', so dass e' ∈ Δ_e
D.h. aus dem Zeitpunkt von e gehört *nur* e selbst zum Rückwärts-„Dreieck" von e.

Für die Deutung schließt man damit den Grenzfall der unendlich schnellen Signalübertragung aus. Daraus ergeben sich sofort einige einfache Folgerungen für die Eigenschaften der Relationen „...liegt im *echten* Vorwärtsdreieck von...", „...liegt im *echten* Rückwärtsdreieck von...":
1. „ξ_1 liegt im Rückwärtsdreieck von ξ_2, ohne mit ξ_2 identisch zu sein" (R^{Δ} = „ξ_1 liegt im *echten* Rückwärtsdreieck von ξ_2") ist eine irreflexive, transitive und asymmetrische Relation.
2. „ξ_1 liegt im Vorwärtsdreieck von ξ_2" (R^{∇}) ist eine irreflexive, transitive und asymmetrische Relation **[B21]**.

Weiter bemerkt man, dass die folgende Forderung für Vorwärts- und Rückwärtsdreiecke sehr plausibel ist:

(Konverse) Für alle e, e': e ∈ $\nabla_{e'}$ gdw e' ∈ Δ_e.

Wenn e im Vorwärtsdreieck von e' liegt, so liegt e' im Rückwärtsdreieck von e und umgekehrt. Dies war zuvor nicht gefordert **[B22]**. Die neue Forderung macht die Relationen R^{Δ} und R^{∇} zu Konversen **[B23]**.

Was in der zweidimensionalen Darstellung Zugänglichkeits*dreiecke* sind, sind im dreidimensionalen Raum *Kegel*. Denkt man statt an reitende Boten an beliebige Signale, so lässt sich festhalten: Es handelt es sich bei Δ_e um den so genannten Rückwärtslichtkegel von e, bei dem von ∇_e ausgesparten Bereich um den Vorwärtslichtkegel von e. Denn der **Rückwärtslichtkegel** eines events e ist die Menge derjenigen events, von denen aus ein Signal e erreichen kann. Und der **Vorwärtslichtkegel** eines events e ist die Menge derjenigen events, die ein Signal von e aus erreichen kann. Dabei ist angenommen: Signale haben *höchstens* Lichtgeschwindigkeit. Der Begriff des Lichtkegels ist zwar erst im Zuge der Relativitätstheorie entstanden. Man sieht aber hier, dass dieser Begriff die Relativitätstheorie noch nicht voraussetzt, sondern auch im klassischen Bild nützlich ist.

3.3.2.2 Theoreme von 3N

Klarerweise ist 3N bezüglich der Menge der allgemeingültigen Formeln eine konservative Erweiterung von LF×S5. Es fragt sich, was für typische Theoreme für „N_Δ“ und „N_∇“ gelten. Hier lässt sich zunächst Folgendes festhalten:

(1) S5-Artigkeit aller drei „N“-Operatoren. „N_Δ“ und „N_∇“ sind, ebenso wie „N“, S5-artige Operatoren, denn $A^{N\Delta}$ und $A^{N\nabla}$ sind Äquivalenzrelationen **[B24]**.

(2) Hierarchien zwischen den Modaloperatoren. Es gelten die folgenden Hierarchien:

(a) $\ulcorner\Box\alpha \rightarrow N_\Delta\alpha\urcorner$ (b) $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow N\alpha\urcorner$ (c) $\ulcorner N\alpha \rightarrow N_\nabla\alpha\urcorner$

Die Konversen sind jedoch allesamt nicht allgemeingültig **[B25]**. Aus (a) bis (c) folgt sofort die Allgemeingültigkeit von $\ulcorner\Box\alpha \rightarrow N\alpha\urcorner$, $\ulcorner\Box\alpha \rightarrow N_\nabla\alpha\urcorner$ und $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow N_\nabla\alpha\urcorner$. Es folgt sofort mit einfachen Beweisen im Rahmen von T[9] die Allgemeingültigkeit von $\ulcorner M_\Delta\alpha \rightarrow \Diamond\alpha\urcorner$, $\ulcorner M\alpha \rightarrow M_\Delta\alpha\urcorner$, $\ulcorner M_\nabla\alpha \rightarrow M\alpha\urcorner$, $\ulcorner M_\nabla\alpha \rightarrow M_\Delta\alpha\urcorner$, $\ulcorner M_\nabla\alpha \rightarrow \Diamond\alpha\urcorner$.

(3) (com)- und (chr)-Gesetze für die Modaloperatoren. Aus (1), der Tatsache, dass alle drei „N“-Operatoren S5-Operatoren sind, und aus den unter (2) etablierten Implikationsbeziehungen folgt mit dem in B5 zu Kap. II 1 für die Beziehung von Box und Diamant zu „N“ und „M“ festgestellten Ergebnis sofort ein ganzer Zoo von (com)- und (chr)-Gesetzen für die verschiedenen Modalitäten **[B26]**.
Daraus ergeben sich z.B. sofort Konkretisierungen wie:

„$NN_\Delta p \equiv N_\Delta Np$“ – Wovon feststeht, dass es wissbar ist, davon ist wissbar, dass es feststeht, und umgekehrt.
„$NN_\nabla p \equiv N_\nabla Np$“ – Wovon feststeht, dass es unabänderlich ist, davon ist unabänderlich, dass es feststeht, und umgekehrt.

(4) Schlüsse von α auf $\ulcorner\alpha \rightarrow N_{(\Delta,\nabla)}\,\alpha\urcorner$.
(a) Es gilt „$p \rightarrow N_\Delta p$“, nicht aber $\ulcorner\alpha \rightarrow N_\Delta\alpha\urcorner$ (es gilt z.B. nicht: „$Fp \rightarrow N_\Delta Fp$“);
(b) Es gilt „$p \rightarrow N_\nabla p$“, nicht aber $\ulcorner\alpha \rightarrow N_\nabla\alpha\urcorner$ (es gilt z.B. nicht: „$Fp \rightarrow N_\nabla Fp$“) **[B27]**.
Da alle drei „N“-Operatoren S5-Operatoren sind, so dass $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow \alpha\urcorner$, $\ulcorner N\alpha \rightarrow \alpha\urcorner$ und $\ulcorner N_\nabla\alpha \rightarrow \alpha\urcorner$ allgemeingültig sind, und da auch $\ulcorner\alpha \rightarrow N\alpha\urcorner$ *mit* α *als Satzbuchstabe* allgemeingültig ist, lässt sich sofort festhalten, dass $\ulcorner N\alpha \equiv \alpha\urcorner$, $\ulcorner N_\Delta\alpha \equiv \alpha\urcorner$ und $\ulcorner N_\nabla\alpha \equiv \alpha\urcorner$ und deshalb mit PC auch $\ulcorner N\alpha \equiv N_\Delta\alpha\urcorner$, $\ulcorner N\alpha \equiv N_\nabla\alpha\urcorner$, $\ulcorner N_\Delta\alpha \equiv N_\nabla\alpha\urcorner$ *für Satzbuchstaben* gilt. Die drei „N“-Operatoren fallen also *für Satzbuchstaben* völlig zusammen. „N_Δ“ und „N_∇“ unterscheiden sich aber charakteristisch bereits für Formeln ohne Zeitoperatoren. So ist (a) „$Sp \rightarrow N_\nabla Sp$“ (mit „p“ als Satzbuchstabe!)[10] allgemeingültig,

---

[9] Diese sind mit S5-Operatoren *a fortiori* immer möglich.
[10] Es gilt z.B. nicht „$SFp \rightarrow N_\nabla SFp$“, da es passieren kann, dass „SFp“ allein wahr wird, weil „Fp“ wahr wird und doch „$N_\nabla Fp$“ falsch, was in diesem Fall auch „$N_\nabla SFp$“ falsch machen würde.

(b) „Sp $\rightarrow$ N_ΔSp“ aber nicht **[B28]**. Aus ganz ähnlichen Gründen gilt auch zwar „Ep $\rightarrow$ N_∇Ep“ mit „p“ als Satzbuchstabe, nicht aber „Ep $\rightarrow$ N_ΔEp“. Es mag zwar jetzt überall „p“ wahr sein (und dies auch feststehen), aber das heißt noch lange nicht, dass man das hier und jetzt auch schon wissen kann.

Unproblematisch ist, dass „EPp $\rightarrow$ N_∇EPp“ (mit „p“ als Satzbuchstabe) gilt: Wenn „p“ überall wahr *war*, ist daran nichts mehr zu ändern. „EFp $\rightarrow$ N_∇EFp“ gilt aber nicht.[11] Das ist schon deshalb klar, weil „EFp $\rightarrow$ NEFp“ nicht gilt (dass überall irgendwann einmal „p“ wahr wäre, wenn h *komplett* verwirklicht würde, heißt noch lange nicht, dass nicht bei *bis zu* t h-artigem Weltverlauf noch eine ontische Alternative offen steht, in der irgendwo „p“ nie wahr wird; „EFp $\rightarrow$ NEFp“ müsste aber wegen der Hierarchie-Beziehung aus (2) gelten, falls „EFp $\rightarrow$ N_∇EFp“ allgemeingültig wäre). Man kann das Ergebnis auch allein mit Blick auf „N_∇“ motivieren: Auch wenn bei insgesamt h-artigem Weltverlauf irgendwann in der Zukunft überall p der Fall wäre, so ist es bei *lediglich bis zum Bewertungszeitpunkt* h-artigem Weltverlauf trotzdem noch möglich, einen *insgesamt* h-artigen Weltverlauf durch Mitwirkung an der Vermeidung von p im beeinflussbaren Bereich der Zukunft zu verhindern. Dass „EFp $\rightarrow$ N_ΔEFp“ erst recht nicht gelten kann, ist ebenfalls angesichts der Hierarchien in (2) klar, denn aus „EFp $\rightarrow$ N_ΔEFp“ würde sofort „EFp $\rightarrow$ N_∇EFp“ folgen.

Überraschender ist, dass (a) „EPp $\rightarrow$ N_ΔEPp“ und (b) „SPp $\rightarrow$ N_ΔSPp“ nicht gilt, obwohl „EPp $\rightarrow$ NEPp“ und „SPp $\rightarrow$ NSPp“ (mit Satzbuchstabe „p“) unproblematisch sind **[B29]**. Dies ist jedoch keinesfalls unplausibel: Es mag überall p der Fall *gewesen* sein, aber wenn einen noch nicht von allen Orten Signale erreichen konnten, so ist es nicht wissbar, dass das so war. Und es mag an irgendeinem entfernten Ort der Fall gewesen sein, dass p, aber wenn einen von dort noch kein Signal erreichen konnte, so ist es nicht wissbar, dass das so war.

(5) Übergang von „N“ zu „N_Δ“. Es lassen sich für die Beziehung von „N“ zu „N_Δ“ folgende Theoreme festhalten:

1	$N_\Delta p \rightarrow N_\Delta N_\Delta p$	(S4-N_Δ), weil “ N_Δ” nach (1) ein S5-Operator ist
2	$N_\Delta N_\Delta p \rightarrow NN_\Delta p$	Box-Hierarchie aus (2) mit „N_Δp“ für α
3	$N_\Delta p \rightarrow NN_\Delta p$	1, 2, PC (Kettenschluss).

Verallgemeinert ergibt dies die Allgemeingültigkeit von $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow NN_\Delta\alpha\urcorner$. Damit ist es immer möglich, mit $\ulcorner N_\Delta\alpha\urcorner$ auf $\ulcorner NN_\Delta\alpha\urcorner$ zu schließen. Das heißt: Jede mit „N_Δ“ beginnende Formel hat für jedes zu t an s bei bis zu incl. t h-artiger Weltentwicklung zugängliche Weltblatt denselben V-Wert. Ein Befürworter von S-Werten als Wahrheitswerte kann sich also sicher sein, hier etwas zu bekommen, das er als Wahrheitswert akzeptiert. Man erhält mit den Box-Hierarchien aus (1) außerdem sofort z.B.:

[11] Es ist sehr einfach durch Adaptation der gegebenen Erklärungen zu sehen, dass jeweils dasselbe auch für Formeln mit „S“ statt mit „E“ gilt.

„$N_\Delta p \rightarrow N_\nabla N_\Delta p$“ – „Was wissbar ist, davon ist unabänderlich, dass es wissbar ist“
„$Np \rightarrow N_\nabla Np$“ – „Was feststeht, das steht *unverrückbar* fest“.
„$\sim N_\Delta p \rightarrow N_\nabla \sim N_\Delta p$“ – „Was nicht wissbar ist, davon ist unabänderlich, dass es (jetzt, hier) nicht wissbar ist“

Anders ist es mit dem Vorwärtskegel. Der Übergang von $\ulcorner N_\nabla\alpha \urcorner$ auf $\ulcorner NN_\nabla\alpha \urcorner$ ist nicht gesichert. In der Tat ist zwar kein Gegenbeispiel zu (a) „$N_\nabla p \rightarrow NN_\nabla p$“ oder zu (b) „$N_\nabla Sp \rightarrow NN_\nabla Sp$“ zu erhalten, wohl aber z.B. zu (c) „$N_\nabla SFp \rightarrow NN_\nabla SFp$“ **[B30]**. Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick ziemlich seltsam. Inwiefern sich trotzdem „N_∇“ und „M_∇“ ein vernünftiger Sinn abgewinnen lässt, wird daher in Kap. II 3.3.3.1 noch genauer zu diskutieren sein.

3.3.2.3 *Nicht*-Theoreme von 3N

(1) Scheitern der (com)- und (chr)-Gesetze mit den Raumoperatoren. Mindestens so interessant wie die Feststellung, welche Gesetze für „N_Δ“/ „M_Δ“ und „N_∇“/ „M_∇“ gelten, ist die Feststellung, welche Gesetze *nicht* gelten. Naheliegende Kandidaten für die Untersuchung sind die (com)- und (chr)-Gesetze mit den Raumoperatoren, z.B. in der Form

(com-SM_Δ)	$\ulcorner SM_\Delta\alpha \rightarrow M_\Delta S\alpha \urcorner$	(com-SM_∇)	$\ulcorner SM_\nabla\alpha \rightarrow M_\nabla S\alpha \urcorner$
(com-$M_\Delta S$)	$\ulcorner M_\Delta S\alpha \rightarrow SM_\Delta\alpha \urcorner$	(com-$M_\nabla S$)	$\ulcorner M_\nabla S\alpha \rightarrow SM_\nabla\alpha \urcorner$
(chr-$M_\Delta E$)	$\ulcorner M_\Delta E\alpha \rightarrow EM_\Delta\alpha \urcorner$	(chr-$M_\nabla E$)	$\ulcorner M_\nabla E\alpha \rightarrow EM_\nabla\alpha \urcorner$
	bzw.[12] $\ulcorner SN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta S\alpha \urcorner$		bzw. $\ulcorner SN_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla S\alpha \urcorner$

Das Ergebnis ist, dass nicht ein einziges dieser Schemata nur allgemeingültige Konkretisierungen hat **[B31]**. Liest man sich die Formeln mit „M_Δ“ in ihrer intendierten Deutung vor, so merkt man an konkreten Gegenbeispielen sehr schnell, dass sie auch allesamt als Gesetze unplausibel wären:

> (com-SM_Δ) $SM_\Delta Sp \rightarrow M_\Delta S(S)p$[13]
> „Wenn es einen Ort, z.B. Paris, gibt, an dem ich jetzt nicht ausschließen kann, dass anderswo, z.B. am angenommenen Bewertungsort London, gerade die Tower Bridge im Nebel steht, dann kann ich auch von London aus jetzt nicht ausschließen, dass es gerade einen Ort gibt, an dem die Tower Bridge im Nebel steht.“[14]

[12] Für die Äquivalenz vgl. B4 zu Kap. I 2.
[13] Als S5-Operator ist der zweite „Irgendwo“-Operator redundant (vgl. B5 zu Kap. I 1).
[14] Funksprüche u.ä. kann man vernachlässigen, da auch sie streng genommen nicht instantan über den Zustand in London informieren. Außerdem gilt die Überlegung für jede maximale endliche Signalübertragungsgeschwindigkeit. Man darf für das Beispiel also auch reitende Boten o.ä. annehmen.

Das ist unplausibel, denn wenn ich gerade im strahlenden Sonnenschein neben der Tower Bridge stehe, dann kann ich sehr wohl ausschließen, dass es einen Ort gibt, an dem die Tower Bridge im Nebel steht.

(com-M_ΔS) $M_\Delta Sp \rightarrow SM_\Delta p$
"Wenn ich jetzt, z.B. in Paris, nicht ausschließen kann, dass es einen Ort, z.B. London, gibt, an dem die Tower Bridge im Nebel steht, dann gibt es einen Ort, an dem ich nicht ausschließen kann, dass dort die Tower Bridge im Nebel steht".

Auch das ist unplausibel, denn ein solcher Ort kann nicht Paris oder irgendein anderer von London entfernter Ort sein: Ich kann ja ausschließen, dass jeweils *dort* die *Tower Bridge* im Nebel steht, weil die nun einmal in London steht; in London kann ich aber ebenfalls ausschließen, dass die Tower Bridge dort im Nebel steht, wenn ich dort stehe und sehe, dass die Sonne scheint.

(chr-M_ΔE) $M_\Delta Ep \rightarrow EM_\Delta p$
"Wenn ich jetzt (z.B. in London) nicht ausschließen kann, dass es (auch) überall (sonst) neblig ist, ist es (auch) überall (sonst) so, dass ich *dort* nicht ausschließen kann, dass es *dort* neblig ist".

Nun, natürlich kann ich bei schönstem Sonnenschein in Paris ausschließen, dass es dort, in Paris, neblig ist, auch wenn ich in London nicht wissen kann, ob in Paris gerade genau so ein Nebel herrscht wie in London.

Konkretisierungen von (com-SM_∇), (com-M_∇S) und (chr-M_∇E) sind *für Satzbuchstaben* allgemeingültig. Das liegt daran, dass ein Weltblatt h und ein Weltblatt h', um an e gegenseitig per $A^{N\nabla}$ zugänglich zu sein, bis zu incl. t_e raumweit gleich beschriftet sein müssen. Gegenbeispiele ergeben sich jedoch bei Formeln mit „F"-Operator und ggf. einem zweiten „M_∇" oder „S" **[B32]**. Wenigstens im ersten Fall lässt sich das Gegenbeispiel auch gut konkret deuten:[15]

(com-SM_∇) $SM_\nabla Fp \rightarrow M_\nabla SFp$
„Wenn es irgendwo, z.B. in London, noch beeinflussbar ist, ob dort in Kürze die Tower Bridge einstürzt, so ist es auch von hier, z.B. Paris, aus noch beeinflussbar, ob irgendwo (also: in London) in Kürze die Tower Bridge einstürzt."

Das ist, so wird man sagen, unplausibel, denn wenn von London selbst aus auch der Einsturz der Tower Bridge unter gewissen Umständen noch zu verhindern sein mag, so kann es schon zu spät sein, um ihn von Paris aus noch verhindern zu können. Allerdings sieht man an dieser Formulierung bereits, dass es hier offenbar semantische Tücken gibt (die sich erst in Kap. II 3.3.3.1 wirklich erklären lassen): Wenn der Einsturz der Tower Bridge zum Glück von London aus verhindert wird und also nicht stattfindet – was soll es dann heißen, dass es von Paris aus zu spät ist, *ihn* zu

[15] Es ist ausnahmsweise dem Leser überlassen, zu den komplizierteren Fällen kleine Geschichten zu erfinden.

verhindern? Offenbar kann es mich ja mit beliebiger und irrelevanter Mitwirkung von Paris aus auch in Paris noch in eine Welt verschlagen, in der die Tower Bridge stehen bleibt. Ich kann nur nicht mehr beeinflussen, *ob* sie stehenbleibt; und das ist offenbar gemeint gewesen.

(2) Scheitern der N_Δ- und N_∇-Versionen von (rom) und ähnlicher Formeln.
Dass sämtliche (com)- und (chr)-Gesetze zwischen „$N_{(\Delta,\nabla)}$" / „$M_{(\Delta,\nabla)}$" und den Raumoperatoren scheitern, bedeutet auch, dass keine Herleitung, in der sie für „N" / „M" verwendet wurden, ohne weiteres auf „N_i" und „M_i" übertragbar ist. Das ist noch kein Beweis, dass sie nicht doch allgemeingültig sind, aber bei den diskutierten Beispielen, allen voran Versionen der Formel (rom), sieht man schnell, dass dies nicht der Fall ist **[B33]**.

Alle typischen Theoreme für die raumweite ontische Vorderkante scheitern also für die epistemischen Operatoren. Das ist plausibel, denn bei begrenzter Geschwindigkeit der Signalübertragung gibt es nicht so etwas wie eine raumweite *epistemische* Vorderkante. Die konkreten Deutungen der Formeln sind denn auch eindeutig unplausibel:

> $SM_\Delta Sp \rightarrow EM_\Delta Sp$
> „Wenn sich irgendwo nicht ausschließen lässt, dass an irgendeinem Ort p, dann lässt sich nirgendwo (auch an diesem Ort nicht!) ausschließen, dass irgendwo (z.B. dort) p."
>
> $M_\Delta SM_\Delta p \rightarrow N_\Delta SM_\Delta p$
> „Wenn nicht auszuschließen ist, dass es einen Ort gibt, an dem nicht auszuschließen ist, dass p, dann ist es hier wissbar, dass es einen Ort gibt, an dem nicht auszuschließen ist, dass p."
>
> $M_\Delta Sr \rightarrow EM_\Delta S(S)r$
> „Wenn sich (hier und jetzt) nicht ausschließen lässt, dass an irgendeinem Ort r, dann lässt sich das (jetzt) nirgends ausschließen (auch nicht an jenem Ort)."
>
> $N_\Delta p \rightarrow EN_\Delta Sp$ und $SN_\Delta Sp \rightarrow EN_\Delta Sp$
> „Wenn es hier und jetzt wissbar ist, dass hier und jetzt p, dann ist es überall wissbar, dass irgendwo (nämlich hier) jetzt p – ja sogar, wenn es nur irgendwo wissbar ist, dass irgendwo p."

Mit „N_∇" und „M_∇" sind die typischen Vorderkanten-Formeln ebenfalls falsifizierbar **[B34]**. Wieder sind konkrete Deutungen der Formeln unplausibel, wie die folgenden Beispiele zeigen mögen:

$(S)M_\nabla SFp \rightarrow EM_\nabla SFp$
„Wenn es sich irgendwo (z.B. in London) bzw. hier (in London) noch beeinflussen lässt, ob irgendwo (z.B. in London) die Tower Bridge einstürzen wird, dann lässt sich dies überall (auch von Paris aus) noch beeinflussen."

$(S)N_\nabla S(S)Fq \rightarrow EN_\nabla S(S)Fq$
„Wenn es irgendwo / hier nicht mehr beeinflussbar ist, ob irgendwo (anders) in Kürze q der Fall ist, dann ist dies von nirgends aus noch zu beeinflussen, also auch von *dort* aus nicht mehr."

3.3.2.4 Axiomatik von 3N

Ein leistungsfähiges Herleitungsspiel für 3N ergibt sich durch die Aufstockung des in Kap. II 3.1 vorgeschlagenen (freilich bereits unvollständigen) Herleitungsspiels für LF×S5 um:

- S5-Axiomensets für „N_Δ" und „N_∇" (incl. NEC-Regeln)
- Die Hierarchien (a) $\ulcorner \Box\alpha \rightarrow N_\Delta\alpha \urcorner$, (b) $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow N\alpha \urcorner$ und (c) $\ulcorner N\alpha \rightarrow N_\nabla\alpha \urcorner$[16]
- $\ulcorner PN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta P\alpha \urcorner$ und $\ulcorner PN_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla P\alpha \urcorner$.

Dieses Herleitungsspiel enthält (com)- und (chr)- Gesetze für „N" / „M" mit „E" / „S", nicht aber für „N_Δ" / „M_Δ" oder „N_∇" / „M_∇" mit „E" / „S". „N_Δ" und „N_∇" sind durch die Hierarchien in diesem Herleitungsspiel deutlich technisch voneinander unterschieden.

Wie sich das Fehlen der (com)-Gesetze für „N_Δ" und „N_∇" auswirkt, lässt sich abschließend noch einmal schön an Folgerungen aus den Historizitätsaxiomen zeigen. Es hatte sich in Kap. III 3.1 herausgestellt, dass sich „$PNp \rightarrow NPp$" räumlich erweitern lässt zu „$PNEp \rightarrow NPEp$", „$PNSp \rightarrow NPSp$", „$EPNp \rightarrow ENPp$" und „$SPNp \rightarrow SNPp$". Entweder geschieht das durch einfache Einsetzung oder durch die K-Regeln DR1 und DR2, Schritte also, die für „N_Δ" und „N_∇" ebenso möglich sind. Es lässt sich somit sofort festhalten, dass auch die folgenden Formeln 3N-allgemeingültig sind, die sich in der intendierten Deutung denn auch als völlig plausibel erweisen:

$PN_\Delta Ep \rightarrow N_\Delta PEp$, $PN_\nabla Ep \rightarrow N_\nabla PEp$, $PN_\Delta Sp \rightarrow N_\Delta PSp$, $PN_\nabla Sp \rightarrow N_\nabla PSp$
Wenn schon früher Überall-p / Irgendwo-p wissbar / unvermeidbar war, dann ist es heute erst recht wissbar / unvermeidbar, dass überall / irgendwo p der Fall war.

$EPN_\Delta p \rightarrow EN_\Delta Pp$, $EPN_\nabla p \rightarrow EN_\nabla Pp$, $SPN_\Delta p \rightarrow SN_\Delta Pp$, $SPN_\nabla p \rightarrow SN_\nabla Pp$.
Wenn es sogar früher schon überall / irgendwo wissbar / unvermeidlich war, dass p, dann ist es heute erst recht überall / irgendwo wissbar / unvermeidlich, dass es der Fall war, dass p.

[16] Dies macht natürlich $\ulcorner \Box\alpha \rightarrow N\alpha \urcorner$ redundant.

Nur mit (com) und (chr) gelangt man, wie in III 3.2.1 gezeigt, von „$EPNp \rightarrow ENPp$" bzw. „$SPNp \rightarrow SNPp$" zu „$PENp \rightarrow NEPp$" und „$PSNp \rightarrow NSPp$". Und prompt sind die entsprechenden Formeln mit „N_{Δ}", für die (com) nicht zur Verfügung steht, unplausibel:

$PEN_{\Delta}p \rightarrow N_{\Delta}EPp$, $PSN_{\Delta}p \rightarrow N_{\Delta}SPp$
Wenn es überall / irgendwo wissbar war, dass (dort) p, dann ist es jetzt und hier wissbar, dass es überall / irgendwo der Fall war, dass p.

Wenn p überall der Fall war, so konnte man an jedem Ort, an dem p der Fall war, wissen, dass p der Fall war, konnte dies also überall wissen. Und wenn p irgendwo der Fall war, so konnte man dies dort wissen. Das heißt aber noch lange nicht, dass es jetzt und hier möglich ist, zu wissen, dass überall (bzw. dass dort) p der Fall war, da man von weit entfernten Orten noch nichts erfahren haben kann.[17]

3.3.3 Die Deutung der Operatoren „N_{Δ}" und „N_{∇}"

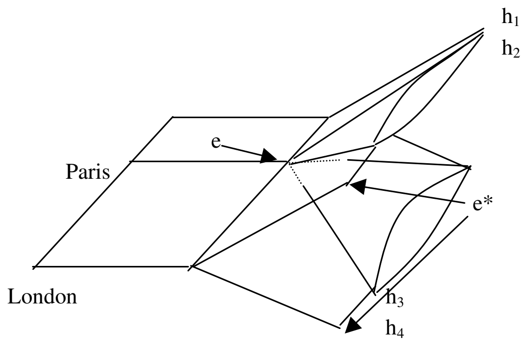
3.3.3.1 „N_{∇}" , „dass" und „ob"

Die semantischen Definitionen der Operatoren „N_{∇}" und „M_{∇}" ergaben sich natürlicherweise als Gegenstücke zu den Definitionen von „N_{Δ}" und „M_{Δ}": Ist in den Fällen mit „Δ" die Zugänglichkeit über den Rückwärtskegel gegeben, so in den Fällen mit „∇" über das Komplement des Vorwärtskegels. Dennoch hat sich bereits gezeigt, dass „N_{∇}" und „M_{∇}" in der konkreten Anwendung nicht immer einfach zu deuten sind, während „N_{Δ}" und „M_{Δ}" als „es ist wissbar, dass" und „es ist nicht auszuschließen, dass" ganz unproblematisch zu lesen sind.
1. Wieso beginnt man damit, Formeln mit „N_{∇}" als „es ist nicht (mehr) beeinflussbar..." vorzulesen und Formeln mit „M_{∇}" mit „es ist (noch) beeinflussbar..." zu lesen, obwohl „M_{∇}" als „$\sim N_{\nabla} \sim$" definiert ist und $\ulcorner N_{\nabla}\alpha \urcorner$ eindeutig $\ulcorner M_{\nabla}\alpha \urcorner$ impliziert?
2. Wieso zögert man, ob man das Vorlesen mit der Konjunktion „dass" oder mit „ob" fortsetzen soll, und entscheidet sich in nur wenigen Fällen für das beim Vorlesen von Modaloperatoren sonst völlig selbstverständliche „dass", oft aber für „ob"?
3. Gibt es eine intuitive Erklärung für das technische Ergebnis, dass die Supervaluationsgesetze für „N_{∇}" nicht gelten?
4. Was für eine Alternativenmenge wird bei der Bewertung einer Formel mit „N_{∇}" überhaupt angesprochen? Sie ist ja kleiner als die Menge der pragmatischen Alternativen, die, wie sich gezeigt hat, mit der Menge der ontischen Alternativen identisch ist. Warum ist „N_{∇}" überhaupt als eigener Operator deutbar, wenn sich

[17] „N_{∇}" ist weniger gut intuitiv lesbar, und entsprechend schwierig ist es, ein schlagendes Gegenbeispiel (z.B. mit einer einfachen Einsetzung für „p" zu finden. Zur intuitiven Deutung von „N_{∇}" vgl. unten Kap. II 3.3.3.1.

wegen dieser Identität „N“ als der eigentliche Operator für die pragmatische Notwendigkeit herausstellt?

Die zweite bis vierte Frage lassen sich beantworten, wenn man sich noch einmal genauer ein intendiertes Modell vor Augen führt, das die Supervaluationsgesetze falsifiziert. Auch eine Antwort auf die erste Frage lässt sich danach geben.



h_1 und h_2 sind bis auf ∇_e h_1-artig (bzw. h_2-artig), nicht aber h_3-artig (bzw. h_4-artig). h_1 bis h_4 sind aber allesamt bis zu t_e h_1-artig (bzw., was dasselbe ist, bis zu t_e h_2-, h_3-, h_4-artig). s_e mag man der Veranschaulichung halber „Paris“ nennen, s_{e*} „London“. h_1 und h_2 enthalten an e* den Einsturz der Tower Bridge, h_3 und h_4 ihr unversehrtes Weiterbestehen. Der Satz „Die Tower Bridge stürzt ein“ sei durch „p“ dargestellt. Es ist $V(N_\nabla \mathsf{FS}p, \langle t_e,s_e,h_1\rangle) = 1$, aber $V(N_\nabla {\sim}\mathsf{FS}p, \langle t_e,s_e,h_3\rangle) = 1$. Von London aus, lässt sich der Einsturz der Tower Bridge zu t_e noch verhindern: Mit Einwirkung von London aus mag sich die Welt zu einer wenigstens bis zu t_{e*} h_3-artigen Welt entwickeln. Genau deshalb wäre es *falsch*, zu t_e in Paris zu behaupten:

> „Es ist hier jetzt schon nicht mehr beeinflussbar / unvermeidlich / unabänderlich, *dass* (zu t_{e*}) die Tower Bridge einstürzen wird“.

Es stehen mit h_3 und h_4 zu t_e ja noch ontische Alternativen offen, die ein Stehenbleiben der Tower Bridge enthalten. Mit Gebrauch der Konjunktion „dass“ behauptet man es aber hier bereits als ausgemacht, dass dies nicht geschehen wird.[18] Man müsste also, wenn sich nach geglückter Rettungsaktion die Welt zu t_{e*} als bis zu t_{e*} h_3-artig herausstellt, zugeben, dass zuvor bereits Unmögliches geschehen ist. Stattdessen ist es lediglich wahr, zu t_e in Paris zu behaupten:

> (A) „Es ist hier jetzt schon nicht mehr beeinflussbar, *ob* (zu t_{e*}) die Tower Bridge einstürzen wird (oder ob nicht)“.

---

[18] Selbst dies gilt nicht allgemein, sondern ist z.T. dem Kontext geschuldet: „Es ist nicht auszuschließen, *dass*“, die natürliche Lesart von „M_Δ“, beinhaltet trotz „dass“ keine ontologische Festlegung.

Von anderswo, z.B. London mag das freilich noch beeinflussbar sein. Die richtige Deutung von „N_∇~FSp“ auf $\langle t_e,s_e,h_3\rangle$ bezogen ist, mit (A) bestens kompatibel,

(B) „Es ist hier jetzt schon nicht mehr beeinflussbar, *ob* (zu t_{e*} in London) die Tower Bridge nicht einstürzen wird (oder ob doch)“.

Bei der Bewertung von „$N_\nabla\mathsf{F}$p“ an einem event e ist „$V(N_\nabla\mathsf{F}p,\langle t_e,s_e,h_3\rangle)=1$“ freilich zu lesen als

„Es ist zu t_e an s_e bei *bis zu t_e* h_3-artigem Weltverlauf wahr, dass gilt: es ist nicht mehr beeinflussbar, ob die Tower Bridge einstürzen wird“.

Denn „$V(\alpha,\langle t_e,s_e,h\rangle)=1$“ muss immer einheitlich als „Es ist zu t_e an s_e bei *bis zu t_e* h-artigem Weltverlauf wahr, dass α“ gelesen werden. Aber als Alternativenmenge relevant für den „N_∇“-Operator ist nicht die Menge aller Weltverläufe, die bis zur Vorderkante t_e h-artig sind, sondern die Menge aller Weltverläufe, die sogar bis auf den Vorwärtskegel ∇_e h-artig sind, was eine viel stärkere Forderung ist. Enthält nun h_3 außerhalb von ∇_e den Einsturz der Tower Bridge, so ist dieser natürlich in allen bis auf ∇_e h_3-artigen Weltverläufen zu finden. Das heißt aber nicht, dass er in allen an e bestehenden *ontischen* Alternativen vorkommt. Doch was heißt es dann? Letztlich nicht mehr als:

Stipulieren wir, dass die Welt, darüber hinaus, dass sie bis zu t_e h_3-artig ist, außerhalb des an e vorhandenen Einflussbereichs von Paris komplett h_3-artig wird (was einschließt, dass die Tower Bridge an e* einstürzt), so wird die Tower Bridge unvermeidlich einstürzen.

Das wirkt trivial, ist es aber nicht, wenn man es kontrastiert mit:

Stipulieren wir, dass die Welt, darüber hinaus, dass sie bis zu t_e h_3-artig ist, außerhalb des an e vorhandenen Einflussbereichs von Paris komplett h_3-artig wird (was einschließt, dass die Tower Bridge an e* einstürzt), so wird *der Eiffelturm* unvermeidlich einstürzen.

Letzteres stimmt natürlich nicht, wenn der Eiffelturm wenigstens an e dank bis zu t_e h_3-artigem Weltverlauf noch steht. Denn realistischerweise ist es *unter jeder beliebigen Stipulation*, was außerhalb des an e vorhandenen Einflussbereichs von Paris der Fall sei, so, dass immer eine Alternative *in petto* ist, in der *innerhalb* des an e vorhandenen Einflussbereichs von Paris der Eiffelturm ebendort stehenbleibt. Ebenso ist eine Alternative *in petto*, in der er zum Einsturz gebracht wird.

Wieso ist nun die Lesart „es ist (noch) beeinflussbar, ob“ für „M_∇“ möglich, wenn „N_∇“ als „es ist nicht (mehr) beeinflussbar, ob“ zu lesen ist? Die Antwort ist, dass dies nur in Fällen, in denen $\ulcorner M_\nabla\alpha\urcorner$ wahr, aber $\ulcorner N_\nabla\alpha\urcorner$ falsch ist, gut möglich ist. Dann ist $\ulcorner {\sim}N_\nabla\alpha\urcorner$ wahr und also auch $\ulcorner M_\nabla{\sim}\alpha\urcorner$, so dass $\ulcorner M_\nabla\alpha \wedge M_\nabla{\sim}\alpha\urcorner$ wahr wird. Ähnlich wird man das einfache „M“ nur in solchen Fällen als „Es steht offen, ob“ lesen, in denen ⌜$M\alpha \wedge M{\sim}\alpha$⌝ wahr wird.[19] Ist dagegen ⌜$M{\sim}\alpha$⌝ wahr, weil auch ⌜$N{\sim}\alpha$⌝ wahr ist, so wird man das übliche „es ist möglich, dass“ lesen. Doch in den angemessenen, plakativen Beispielen mit Kontingenz ist die erste Lesart natürlich völlig in Ordnung. Für „M_∇“ ist es leider außerordentlich schwierig, eine Deutung zu finden, die funktioniert, wenn ⌜$M_\nabla\alpha$⌝ und ⌜$N_\nabla\alpha$⌝ zugleich wahr sind (erst recht schwierig ist eine Deutung, die in *allen* Fällen funktioniert). Noch eine der besseren Lösungen scheint zu sein: „Es ist mit meinem Tun kompatibel, *wenn*“ (nicht: „dass“, weil damit schon wieder eine ontologische Festlegung einherginge). Denn zweifellos ist es mit meinem Tun an e in Paris kompatibel, *wenn* die Tower Bridge einstürzt: ich kann in diesem Fall ja machen, was ich will, und sie stürzt doch ein.

Übrigens ist die Kombination „PN_∇“ manchmal als „es war nicht (mehr) beeinflussbar, *dass*“ zu lesen, und zwar z.B. dann, wenn man die Situation an e an t_{e*} und s_e bei bis zu t_{e*} h_1-artigem Weltverlauf bewertet, also inzwischen die Tower Bridge definitiv eingestürzt ist.

Filigrane formale Unterschiede – filigrane natürlichsprachige Unterschiede. Gibt es einen philosophischen Ertrag dieser Überlegungen? Ja. Sie zeigen deutlich, dass wenigstens im klassischen Bild die an e über $A^{N\nabla}$ ausgewählte Alternativenmenge keinesfalls als ontische Alternativenmenge gedeutet werden kann. Da die Menge der pragmatischen Alternativen die Menge der ontischen Alternativen ist, kann man sie auch nicht als die Menge der pragmatischen Alternativen deuten. Die für „N_∇“ relevante Alternativenmenge wird vielmehr erst *durch Stipulation* ausgewählt.[20] Es wäre deshalb überraschend, wenn in der relativistischen Betrachtungsweise ausgerechnet „N_∇“ neben der unqualifizierten Box als der einzige für eine ontologische Deutung brauchbare qualifizierte Notwendigkeitsoperator übrig bliebe.

3.3.3.2 Eine ontische Deutung von „N_Δ“?

Auch „N_Δ“ hat seine Kniffligkeiten mit „dass“ und „ob“: „es ist wissbar...“ muss mit „dass“ fortgesetzt werden, da ich nur wissen kann, was feststeht; „es ist nicht wissbar...“ muss entsprechend mit „ob“ fortgesetzt werden; „es war noch nicht wissbar, dass“ ist aber später, wenn es so gekommen ist, ganz in Ordnung – und all das wirkt sich z.B. auf das Vorlesen von ⌜$N_\Delta\alpha$⌝, ⌜${\sim}N_\nabla\alpha$⌝ und ⌜$PN_\nabla\alpha$⌝ aus. Doch das ist ziemlich offensichtlich und, soweit ich sehe, *philosophisch* nicht allzu relevant.

Sehr viel wichtiger ist die Frage, ob „N_Δ“ nicht neben der epistemischen Deutung eine ontische Deutung zulässt, ja diese vielleicht sogar die wesentliche Deutung sein

[19] Manchmal wird ⌜$M\alpha \wedge M{\sim}\alpha$⌝ als ⌜$K\alpha$⌝ abgekürzt und damit ein Kontingenz-Operator eingeführt.

[20] „Ob“-Sätze sind, u.a. im Zusammenhang mit der Logik der Fragen, als semantisch außergewöhnlich kompliziert bekannt. Einen guten Einblick gibt ein Aufsatz von David Lewis mit dem treffenden Titel „’Whether’ report“ (1982). Eine genaue Darstellung von Lewis’ Ergebnissen ist hier nicht möglich. Die Grundtendenz ist, dass die Wahrheitswerte von „Ob“-Sätzen u.a. von Annahmen über die Wahrheitswerte von Sätzen im Skopus des „ob“ abhängig sind, passt gut zu den Beobachtungen im vorangegangenen Abschnitt.

könnte. Denn man könnte argumentieren wie folgt: Formeln von 3N werden an events bei Annahme einer gewissen Art von Weltverlauf bewertet. Zur Annahme dieses Weltverlaufs gehört ein gewisser Zustand an e. Die kausale Vergangenheit *dieses* Zustandes an e muss feststehen als das, was den Zustand an e beeinflussen konnte. Hier können nicht nachträglich plötzlich wieder Möglichkeiten offen stehen, die den nun einmal bestehenden Zustand an e an der Verwirklichung gehindert hätten. Der echte Rückwärtskegel von e ist aber nicht nur gerade die Menge der von e entfernten events, von deren Zustand man an e *erfahren* haben kann, sondern auch gerade die Menge der events, von denen aus ein *Einfluss* auf e möglich ist. Von events vor t_e außerhalb des Kegels kann der Zustand an e hingegen unmöglich beeinflusst worden sein. Bewertet man eine Aussage konsequent nicht nur für einen Zeitpunkt, sondern für ein event, also einen Zeitpunkt *und* einen Ort, so sollte man daher sagen: Es sind die Zustände der events im Rückwärtskegel von e, die an e für den gegebenen Zustand an e als feststehend gelten müssen. Was außerhalb des Rückwärtskegels von e der Fall ist, steht dagegen für den Zustand an e insofern nicht fest, als es diesen unmöglich mit determiniert.[21] Eigentlich ist deshalb „N_Δ“ der angemessene *ontische* Notwendigkeitsoperator.

Gegen ein solches Argument erhebt sich freilich *im klassischen Bild* Widerspruch. Zwar dürfte unbestritten sein, dass alles im Vergangenheitslichtkegel feststeht. Doch warum sollte das alles sein, was feststeht? Es ließe sich ja sagen: Was an e* der Fall ist, steht an e einfach deshalb fest, weil es an e* feststeht und t_{e*} vor t_e liegt oder $t_{e*} = t_e$ (so dass e und e* gleichzeitig sind). Allgemein gilt nämlich:

> Liegt e“ im Rückwärtskegel von e’, ist an e“ etwas determiniert *und* ist e’ gleichzeitig mit e, so muss dies auch an e als determiniert gelten.

Das liegt letztlich einfach daran, dass es die raumweite sukzessive Abnahme von Möglichkeiten ist, die die Zeitrichtung bestimmt; eine Abfolge, in deren Verlauf die Möglichkeiten zunehmen, würden wir nicht mehr als *zeitliche* Abfolge (an-)erkennen:

Dass „PNp $\rightarrow$ NPp“ allgemeingültig ist, „FNp $\rightarrow$ NFp“ aber nicht, gibt den Modellen den **modalen Zeitpfeil** als Zeitrichtung. Dieser ist aber raumweit derselbe; und so bedingen sich raumweite Gleichzeitigkeit und Zeitrichtung gegenseitig.

Tatsächlich wären die Konsequenzen einer ontischen Deutung gewöhnungsbedürftig: „Sp $\rightarrow$ $N_\Delta\mathsf{S}$p“ und „SPp $\rightarrow$ $N_\Delta\mathsf{SP}$p“ sind ja, wie gezeigt, nicht allgemeingültig, während „Sp $\rightarrow$ NSp“ und „SPp $\rightarrow$ NSPp“ (mit Satzbuchstaben) es sind. Bei einer epistemischen Interpretation von „N_Δ“ ist das nicht weiter beunruhigend: Nicht alles, was entfernt geschieht oder vor einer Weile geschah, kann man schon wissen. Interpretiert man „N_Δ“ ontisch, so ist damit aber offenbar gesagt, dass nicht alles, was entfernt geschieht oder schon geschah (!), bereits feststeht.

[21] Diese leicht vereinfachte Darstellung ist streng genommen mit ähnlichen *caveat*s zu versehen wie die Motivation von „N_Δ“ in 3.3.1: (a) Die Geltung logischer Gesetze an entfernten Orten determiniert an e nichts, fällt aber dennoch in den Anwendungsbereich des „N_Δ“-Operators; (b) Wenn zufällig in allen „N_Δ“-Alternativen an *einem* Zeitpunkt in der Vergangenheit überall „p“ wahr ist, so wird „$N_\Delta\mathsf{PE}$p“ wahr, obwohl nicht *von überall* überhaupt schon ein Einfluss stattfinden konnte.

3.3.4. Überleitung zu Teil III

Die oben in II 3.3.3.2 vorgenommene Zurückweisung der ontischen Deutung von „N_{Δ}“ ist plausibel für das klassische Bild von Raum und Zeit. Sie basiert jedoch zum guten Teil auf Thesen, die seit der Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie vor fast 100 Jahren zweifelhaft geworden sind: Der Begriff der raumweiten Gleichzeitigkeit ohne damit einhergehende Erwähnung und Spezifizierung des verwendeten Koordinatensystems ist im relativistischen Bild von Raum und Zeit nicht mehr anwendbar. Es ist damit die im Rahmen dieser Studie interessanteste Sollbruchstelle des klassischen Bildes herauspräpariert. Solange das klassische Bild vorausgesetzt ist, kann man die Beschäftigung mit „N_{Δ}“ und „N_{∇}“, also die Ausdifferenzierung des Notwendigkeitsoperators zur Not als ontologisch letztlich nicht wirklich relevantes Spielchen abtun. Nach dem Einstieg in die relativistische Raumzeitlogik in Teil III, wird sich in Teil IV die Frage nicht mehr abweisen lassen, ob nicht ein „N_{Δ}“ stark ähnelnder Operator an die Stelle von „N“ als ontischer Notwendigkeitsoperator treten sollte.

TEIL III

RELATIVISTISCHE RAUMZEITLOGIK OHNE ALTERNATIVEN

...the fusion of space and time is more accurately characterised as a *temporalization* or *dynamization* of space than as a spatialization of time.

Absence is present.

KAPITEL 1

Von der Relativitätstheorie zur relativistischen Raumzeitlogik

1.1 Die Relativitätstheorie in philosophischer Perspektive

Die schon recht differenzierten Betrachtungen zu modalen Verzweigungen von Raumzeiten am Ende von Teil II weisen eine deutliche Einschränkung auf: Sie sind, indem sie nur *ein* Bezugssystem in den Blick nehmen, auf dem Stand der Philosophie von Raum und Zeit vor Einsteins Aufsatz „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" von 1905. In diesem Teil soll die Relativitätstheorie endlich zu ihrem Recht kommen.[1] Zunächst soll sie in dem Zuschnitt vorgestellt werden, in dem sie für den Zweck dieser Studie wichtig ist.

An Einführungen in die Relativitätstheorie herrscht kein Mangel. Schon früh sind mit dem einführenden Büchlein von Einstein selbst[2] und der Einführung von Moritz Schlick[3] bis heute unübertroffene Darstellungen erschienen, die sowohl nichttechnisch sind als auch den philosophischen Gehalt der Relativitätstheorie betonen. Dennoch wird die SR oft verharmlosend als eine Theorie des Umrechnens von Längen- und Zeitdauerangaben von einem Inertialsystem ins andere aufgefasst. Im folgenden Abschnitt soll ein Grundgedanke der SR so dargestellt werden, dass er unmittelbar die Einführung des neuen Operatorenenpaares in Kap. 3 motiviert.

Zur Einführung bietet es sich an, das bekannte Zug-Beispiel leicht zu erweitern, mit dem Einstein selbst seine bekannteste Darstellung der SR beginnt.[4] Dem Zustand eines (fantastisch langen und schnellen) Zuges zu jedem Zeitpunkt entspricht dabei eine Strecke in einem Koordinatensystem, das durch eine Raum- und eine Zeitachse aufgespannt wird. Dem Zug über die Zeit hinweg oder der Geschichte des Zuges entspricht eine Fläche. Es gelten (wie es intuitiv übrigens völlig natürlich ist) zwei Ereignisse genau dann als gleichzeitig, wenn ein Beobachter, der von beiden Ereignissen gleich weit entfernt ist, durch zwei Lichtsignale zu demselben Zeitpunkt von beiden informiert werden kann. Die

---

[1] Der methodologische Ansatz der Relativitätstheorie oder ihr Status als Theorie soll dabei, so interessant seine Diskussion wäre, nicht interessieren. Die Relativitätstheorie wird i.F. einfach als ein Stück Naturphilosophie angesehen und ihre Wahrheit vorausgesetzt (was sich natürlich dereinst als Irrtum herausstellen kann).

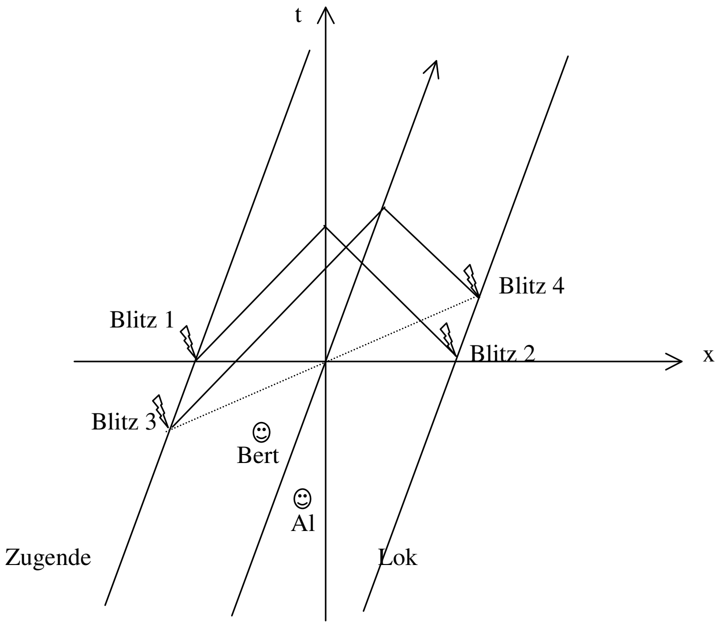
[2] Einstein, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie" (1917).

[3] Schlick, „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik" (1917).

[4] Einstein, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", S.16, §9.

Lichtgeschwindigkeit c soll für jedes Bezugssystem denselben Wert besitzen, der hier der Einfachheit halber mit einer Längeneinheit pro Zeiteinheit (1LE/ZE) angenommen sei. Ein Lichtstrahl muss daher grundsätzlich als Diagonale durch ein Parallelogramm aus zwei 1LE voneinander entfernten Parallelen zur Zeitachse und zwei 1ZE voneinander entfernten Parallelen zur Raumachse dargestellt werden.[5] Man betrachte nun die folgende Situation:

(Abb.1)



Ein Beobachter auf dem Bahndamm, Al, steht für eine Weile an Ort x=0, "auf" der Zeitachse t. An ihm vorbei fährt ein Zug, in dessen Mitte sein Freund Bert steht. Al erfährt per Lichtsignal gleichzeitig zwei Dinge: Neben dem Zugende ist ein Blitz (Blitz 1) eingeschlagen. Neben der Lok ist ein Blitz (Blitz 2) eingeschlagen. Er kann (z.B. anhand von Brandspuren auf dem Bahndamm) feststellen, dass er von beiden Blitzen gleich weit entfernt war. Al *schließt* richtig, dass beide gleichzeitig eingeschlagen sind.

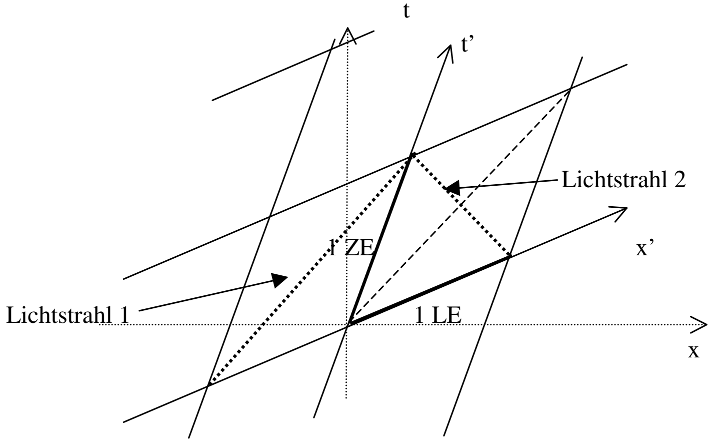
Bert darf sich wie Al als ruhend betrachten. Er hat demnach *andere Orte*: Die Zugmitte verharrt ja dann die ganze Zeit über an *einem* Ort, ebenso die Zugspitze und das Zugende. Bert erfährt per Lichtsignal gleichzeitig zwei Dinge: in das Zugende ist ein Blitz (Blitz 3) eingeschlagen. In die Lok ein Blitz (Blitz 4) eingeschlagen. Er weiß, dass er von beiden Blitzen gleich weit entfernt war, da er gerade in der Mitte des Zuges sitzt. Bert *schließt* also richtig, dass Blitz 3 und Blitz 4 beide gleichzeitig eingeschlagen sind.

---

[5] Die im Rahmen der SR diskutierten Bezugssysteme befinden sich allesamt in gleichförmiger, geradliniger Relativbewegung zueinander. Beschleunigung und Gravitationsphänomene sind erst Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie (AR).

Als und Berts Meinungen lassen sich dadurch vereinbaren, dass Bert nicht nur andere Orte als Al hat,[6] sondern *auch andere Zeitpunkte*. Berts Koordinatensystem sieht so aus:

(Abb.2)



Wie man leicht sieht, pflanzen sich auch in Berts Koordinatensystem sowohl Lichtstrahl 1 als auch Lichtstrahl 2 mit 1LE/ZE fort.

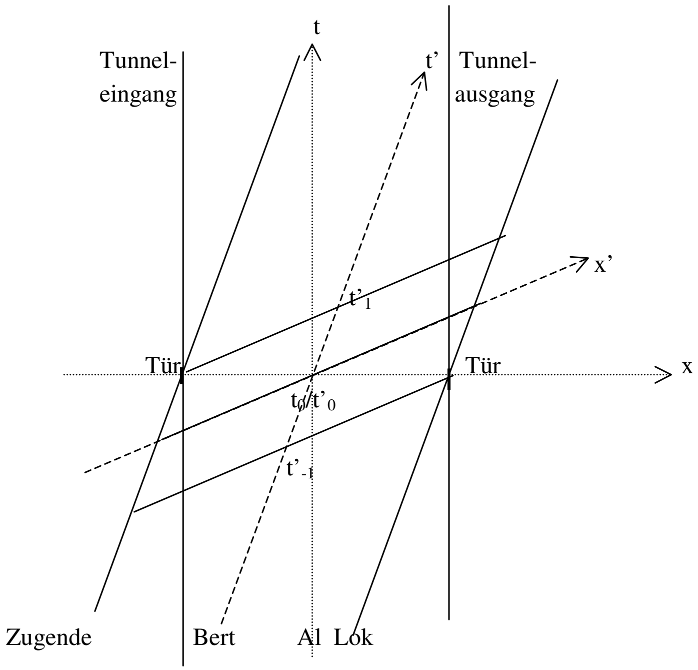
Ein weiteres Beispiel mag klären, wie handfest die Konsequenzen sind, und dass es sich hierbei nicht etwa bloß um eine Sache der Anschauung handelt. Es ist als **Tunnelbeispiel** recht bekannt.[7] Man sollte nun zunächst annehmen, dass der Zug entweder gleichlang-oder-kürzer als ein Tunnel ist, durch den er fährt, oder aber länger als der Tunnel. Ein solcher Tunnel (zufällig von der Länge des Bahndamms) stehe zur Verfügung. Bert meint, sein Zug sei länger als der Tunnel. Al glaubt das nicht und schlägt ein riskantes Experiment vor, um nachzuweisen, dass der Zug gerade so lang ist wie der Tunnel: zu t_0, in dem Moment, indem sich die Zugmitte gerade in der Tunnelmitte befindet, lässt er (für sich) gleichzeitig für einen sehr kurzen Moment sowohl am Tunneleingang als auch am Tunnelausgang eine schwere Eisentür zufallen und öffnet sie sofort wieder. Da der Zug das Experiment unzerbeult übersteht, schließt Al, dass der Zug nicht länger gewesen sein kann als der Tunnel. Bert sieht ebenfalls, dass der Zug intakt bleibt, erzählt aber eine ganz andere Geschichte: Zu t'_{-1}, als kurz vor der Lok die Tür am Tunnelausgang zuschlug, war der Zug noch längst nicht ganz in den Tunnel eingefahren, zu t'_0, als beide Türen offenstanden, immer noch nicht, während die Lokspitze schon

[6] Das hätte man seit Galileis Beschreibung der Vorgänge auf einem fahrenden Schiff in seinem „Dialog über die zwei hauptsächlichen Weltsysteme" von 1632 sagen können (z.B. zitiert in Müller (2002), S.223f.). Vgl. auch die beeindruckende Übernahme des Gedankens in Kants „Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe" (1758).

[7] Vgl. für das „Tunnel"-Beispiel z.B. die Übung 3.6. in Inverno, „Introducing Einstein's Relativity" (1992).

wieder aus dem Tunnel heraus war; erst zu t'_1 schlug die hintere Tür direkt hinter dem Zugende zu.

(Abb.3)



Stellt man sich, in minimaler Abwandlung des Szenarios, vor, dass das Experiment aus Sicherheitsgründen in einem Tunnel durchgeführt wird, in dem der Zug aus Als Perspektive ein wenig Platz hat („Der Tunnel ist länger als der Zug"), während Bert noch immer behaupten kann, der Zug sei länger als der Tunnel, so sieht man, wie der Effekt der Längenkontraktion reziprok sein kann. Das muss er auch sein, denn Bert kann sich mit demselben Recht als ruhend bezeichnen wie Al und Al als bewegt.

Ist hier der Nichtwiderspruchssatz verletzt? Nein. Aber man wird auf eine Art von Aussagehinsicht aufmerksam, an die vor 1905 nicht zu denken war: das Bezugssystem. Wenn man schon immer implizit Raum- und Zeitstellen als einschränkende Kontexte berücksichtigt – warum nicht auch Bezugssysteme? Schließlich ist der Nichtwiderspruchssatz ja von Aristoteles gar nicht als ehernes und somit aufgrund seiner Starre zerbrechliches Gesetz formuliert worden, sondern mit gerade der nötigen Flexibilität ausgestattet worden, mit der er jeder Belastung standhalten kann.[8] Dass einmal Bezugssysteme Kontexte bilden könnten, die zur Spezifizierung der Aussagehinsicht

[8] Aristoteles, Met. IV (Γ) 1005b19-23.

relevant sind, konnte Aristoteles nicht ahnen. Aber weiß denn schon, was uns im Laufe der Wissenschaftsgeschichte noch alles an Kontexten begegnen wird! Mit derselben Berechtigung, mit der von Wright von der Zeit als Fluchtweg des Menschen vor dem drohenden Widerspruch sprechen konnte,[9] wird man daher, wenn man die SR beherzigt, auch von der Berücksichtigung von *Bezugssystemen* als Fluchtweg vor dem drohenden Widerspruch sprechen wollen. Eine formale Rekonstruktion solcher Gegebenheiten mit Mitteln der Modallogik liegt so außerordentlich nahe.

Abb. 1 macht bereits deutlich, dass sich in manchen Fällen von Bezugssystem zu Bezugssystem die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen umkehrt: Für Al ist Blitz 3 vor Blitz 2, für Bert ist Blitz 2 vor Blitz 3. Das heißt freilich nicht, das die Zeit nun eine Illusion und der Willkür keine Grenze gesetzt wäre. Zwar schreibt Einstein selbst:

> Das vierdimensionale Kontinuum zerfällt nun nicht mehr *objektiv* in Schnitte, welche alle gleichzeitigen events enthalten.[10]

Doch daraus folgt nicht, dass der Willkür der Art, wie die Schnitte, d.h. die Partitionierung der Raumzeit in Orte und Zeiten, vorgenommen werden können, keinerlei Grenzen gesetzt sind und jede noch so willkürliche Partitionierung eine Einteilung *in Orte und Zeiten* ergibt. Nicht alles an dem, was wir als Manifestation von Zeit zu betrachten gewohnt sind, muss beschreibungstechnische Zutat sein. Dies ist auch nicht die Absicht Minkowskis in seinem berühmten Einleitungssatz zum Vortrag „Raum und Zeit" von 1908, wenn man ihn verständig betont:

> Von Stund an sollen Raum *für sich* und Zeit *für sich* völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art *Union* der beiden soll *Selbständigkeit* bewahren.[11]

Davon, dass die Raumzeit keinen realen zeitlichen Aspekt oder Faktor mehr haben könne, sondern alles, was man als „Zeit" zu bezeichnen gewohnt war, nichts als Illusion ist, ist hier nicht die Rede.[12] Vielmehr ist gerade der entgegengesetzten Diagnose Čapeks

---

[9] von Wright, „Time, Change and Contradiction", S.125.

[10] Einstein, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie" (1917), S.102. Meine Hervorhebung.

[11] Minkowski, „Raum und Zeit" in „Das Relativitätsprinzip": S.54. Meine Hervorhebungen.

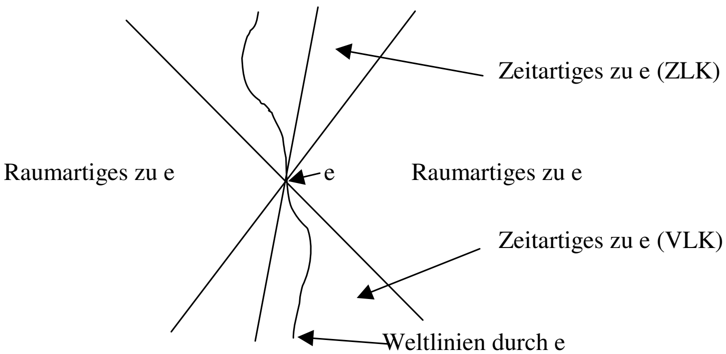
[12] Zwar heißt es bei Einstein selbst („Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", S.81): "Die Physik wird aus einem *Geschehen* im dreidimensionalen Raum gewissermaßen ein *Sein* in der vierdimensionalen ‚Welt'." Doch dieser Satz überrascht nicht nur in stilistischer Hinsicht, da sonst niemand ein schöneres wissenschaftliches Deutsch schreibt als Einstein. Er vernachlässigt auch die ganze Dimension der zeitartigen Lage von Ereignissen zueinander. Zu einer ähnlichen späteren Äußerung in einem Kondolenzschreiben vgl. Müller, „Arthur Priors Zeitlogik" (2002), S.242, Fußnote 316. Nur im mathematischen Sinn zu verstehen und daher in ihrem Kontext problematisch ist die Überschrift zu §17 von Einsteins „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie": „Minkowskis vierdimensionaler *Raum*" (meine Herv.). Einstein stellt aber sofort im darauf folgenden Text klar, dass damit ein „zeiträumliches Kontinuum" gemeint ist.

zuzustimmen, die Relativitätstheorie sei gar nicht die „spatialization of time“, sondern die „temporalization of space“.[13] Denn man kann festhalten:

> Für manche Ereignisse e und e’ gilt: Die zeitliche Reihenfolge von e und e’ ist unabhängig von der Wahl des zu ihrer Beschreibung verwendeten Koordinatensystems

Dies ist der Fall, weil die zeitliche Reihenfolge zweier Ereignisse eines Ereignispaares in vielen Fällen in jedem (im Rahmen der SR möglichen) Koordinatensystem dieselbe ist. Dies sieht man in der gewählten Darstellung daran, dass sich Raumachsen einerseits und Zeitachsen andererseits dem die Lichtgeschwindigkeit repräsentierenden 45°-Winkel zwar annähern, diesen aber nicht erreichen können, wenn überhaupt ein Koordinatensystem übrig bleiben soll. Für kein Koordinatensystem kann demnach die zeitliche Abfolge eines gegebenen Ereignisses und eines Ereignisses in dessen Vergangenheits- oder Zukunftslichtkegels eine andere sein als für irgendein anderes Koordinatensystem. Das bedeutet im einfachsten Fall, dass die zeitliche Reihenfolge aller Ereignisse einer möglichen Zeitachse, d.h. einer möglichen Koordination für denselben Ort, sowie die Ausbreitung des Lichts absolut vom Koordinatensystem ist. Es gilt aber auch für die Reihenfolge der Ereignisse jeder möglichen *krummen* Weltlinie durch den Vergangenheits- und Zukunftslichtkegel eines events. Eine solche Weltlinie (egal ob krumm oder gerade dargestellt) entspricht einem beliebigen möglichen Kausalverlauf. Denn von zwei zeitlich absolut geordneten Ereignissen ist gerade dasjenige das frühere, von dem aus ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit *oder geringerer Geschwindigkeit* das andere erreichen könnte, jenes ist das spätere.

(Abb.4)



Ereignisse, bei denen das mit geringerer Geschwindigkeit als der des Lichts möglich ist, liegen **zeitartig** zueinander, solche, zwischen denen Lichtsignale erforderlich sind, **lichtartig**. Für zwei beliebige zeitartig zueinander liegende Ereignisse gibt es eine

[13] Čapek, „The Philosophical Impact of Contemporary Physics“ (1961), S.161.

mögliche Zeitachse, die sie als Ereignisse am selben Ort interpretiert. Vergangenheits- und Zukunftslichtkegel eines Ereignisses e können deshalb auch zusammen als Menge der möglichen durch e verlaufenden Zeitachsen plus seiner „Lichtachsen" beschrieben werden. Denn der Vergangenheitslichtkegel von e besteht gerade aus denjenigen Ereignissen, von denen aus ein Signal (mit der Geschwindigkeit des Lichts oder einer geringeren Geschwindigkeit) e erreichen kann; der Zukunftslichtkegel von e dagegen ist die Menge der events, die von e aus per Signal erreichbar sind. Beides zusammen ergibt nun aber gerade die Menge der zu e zeit- oder lichtartig liegenden Ereignisse.

Zwei Ereignisse, die durch kein Signal verbunden werden können, liegen dagegen **raumartig** zueinander. Allein für sie ist die Reihenfolge Interpretationssache, dies allerdings so sehr, dass sich zu jedem gegebenen Bezugssystem ein anderes finden lässt, das ihre Reihenfolge gerade umkehrt. Für zwei beliebige raumartig zueinander liegende Ereignisse gibt es einen möglichen Momentanraum (Zeitpunkt), der sie als gleichzeitige Ereignisse koordiniert. Das Raumartige zu einem event kann deshalb auch als die Menge aller möglichen durch e verlaufenden Zeitpunkte beschrieben werden. Dies ist ein Teil dessen, was man als Verzeitlichung des Raums bezeichnen kann; denn mögliche Zeitpunkte sind ja mögliche Momentanräume.

Das Prinzip der absoluten Ordnung der Ereignisse auf derselben Weltlinie stellt plausiblerweise sicher, dass Kausalverläufe wie z.B. Biografien nicht durch Interpretation umkehrbar werden. Die Richtung der Zeit verschwindet in der SR nicht etwa. Sie wird aber auch nicht, wie wohl in der 2. Analogie der Erfahrung in Kants KrV, durch *tatsächliche* Kausalität charakterisiert, sondern durch die *Möglichkeit* von Kausalität.

1.2 Relativistische Raumzeitlogik – bisherige Ansätze

1.2.1 Einleitung

Von einer Zeitlogik, die Operatoren wie „Es wird der Fall sein, dass" und „Es war der Fall, dass" verwendet, und die ein halbes Jahrhundert nach der SR entsteht, hätte man von vornherein eine intensive Beschäftigung mit der SR erwarten sollen. Es ist daher ein wissenschaftsgeschichtliches Kuriosum, dass die Zeitlogik zwar auch in ihrer Anfangsphase die Relativitätstheorie immer nebenbei im Blick hatte,[14] diese aber nicht wirklich ins Zentrum der zeitlogischen Forschung rückte.[15] Das Verhältnis Arthur Priors, des Gründungsvaters der Zeitlogik, zur Relativitätstheorie kann nicht anders denn als

[14] Die SR ist bereits in Priors als Gründungsmanifest der Zeitlogik lesbaren Vortrag von 1954 (1958 veröffentlicht als „The Syntax of Time Distinctions") erwähnt. Vgl. PPF, S.41.

[15] Der wenig ausgearbeitete Anschluss an die moderne Physik führte sogar zu Masseys Fundamentalpolemik „Tense Logic – Why Bother?" von 1969.

schillernd bezeichnet werden. Papiere aus dem Nachlass lassen auf eine zum Teil verständnislose, tiefe Ablehnung schließen.[16] Dennoch gibt es in Priors veröffentlichten Werken wenigstens zwei beachtliche Skizzen zur Einbeziehung der Relativitätstheorie – wenn auch jede nur wenige Druckseiten umfasst.

Die eine, am Schluss von Priors spätem Aufsatz „Tense Logic and the Logic of Earlier and Later", versucht, Bezugssysteme in gewisser Analogie zum Wort „jetzt" wie Indexikalia zu behandeln.[17] Dies scheint mir ein Ansatz zu sein, der in der von Prior vorgeschlagenen Form wenig Erfolg verspricht. Priors Ausführungen zeigen so wenig Verständnis für die Kategorie des events und die Handfestigkeit relativistischer Effekte, dass die Rede von je nach Beobachter verschiedenen Zeitreihen eher naiv wirkt.

Der zweite *locus classicus* zu Zeitlogik und Relativitätstheorie bei Prior findet sich im Abschnitt „Miscellaneous Further Developments" von „Past, Present and Future".[18] Die dort veröffentlichte Skizze beeindruckt, gerade wenn man Priors intuitive Abneigung mit in Betracht zieht, durch ihren formalen Weitblick. Die Einsichten Priors auf diesen sehr dicht geschriebenen zwei Seiten sind als *constraints* für jede relativistische Raumzeitlogik so wertvoll, dass der Text im nächsten Abschnitt einer eingehenden Analyse unterzogen werden soll. Die Hauptvermutung Priors, nämlich die Angemessenheit der Modallogik S4.2 als einer möglichen Logik für die SR, ist zuerst 1976 von Valentin Shehtman[19] und, unabhängig davon, 1980 von Robert Goldblatt bewiesen worden. Typisch für Priors und Goldblatts Ansatz ist es, nur die Lichtkegel, nicht aber das Raumartige als Einzugsbereich der Modaloperatoren zu benutzen und die Relativierung auf Bezugssysteme außen vor zu lassen. Die Modaloperatoren beziehen sich also auf die kausale Zukunft und kausale Vergangenheit und können dementsprechend *kausale* Operatoren genannt werden.

Noch 1995 konnten Øhrstrøm und Hasle bemerken, dass sich bei der Annäherung von Zeitlogik und Relativitätstheorie nicht viel getan habe.[20] Das hat sich inzwischen durch die Arbeiten von Belnap („Branching Spacetime", 1992), Rakić („Common Sense Time and Special Relativity", 1997) und Müller („Arthur Priors Zeitlogik", 2002) geändert. Alle genannten Arbeiten können hier nur insofern berücksichtigt werden, als sie Auswirkungen auf den Gedankengang dieser Studie haben, Belnaps Aufsatz erst in Teil IV.[21] Wer sich umfassend zu Thema „Relativistische Zeitlogik" informieren will, der sollte wenigstens das 4. Kapitel von Müllers sehr reichhaltigem Buch mit heranziehen.

---

[16] Vgl. besonders „Some Free Thinking about Time", dessen Titel freilich defensiv genug ist (zur dennoch sehr selbstbewussten Begründung des Titels vgl. S.51). Über Priors Entwicklung nicht nur, aber auch in Hinblick auf die Relativitätstheorie informiert umfassend Müller, „Arthur Priors Zeitlogik" (2002).

[17] Vgl. Prior, „Tense Logic and the Logic of Earlier and Later" (1968), §8, in ZuE: S120-123.

[18] PPF, S.203-205.

[19] Goldblatt, „Diodorean Modality in Minkowski Spacetime" (1980), Anmerkung des Herausgebers, S.235f.

[20] Øhrstrøm und Hasle, „Temporal Logic" (1995), S.202: „J.P. Burgess [1984] in his overview of tense logic had to observe that a tense logic for special relativity had not yet been worked out fully – indeed that the results which had been produced so far had been sparse. In our opinion this is still the case."

[21] Dort wird auch kurz auf Storrs McCalls wichtiges Buch „A Model of the Universe" (1994) einzugehen sein.

1.2.2 Kausale Operatoren

1.2.2.1 Priors Skizze zu einer relativistischen Raumzeitlogik

Priors Ziel in PPF, S.203-205, ist die Unterscheidung einer „tense logic", die nur für die SR, und einer, die für SR und AR zugleich gilt. Seine Vermutung ist, dass in einem bestimmten Sinn die Modallogik S4.2 zwar für die SR angemessen ist, für die AR aber nur das schwächere S4.[22]

Zunächst ist dazu zu beachten, dass die Axiomatik von sowohl S4 als auch S4.2 eine *reflexive* Zugänglichkeitsrelation erzwingt und dass es sich dabei um monomodale Logiken handelt, die, als Zeitlogiken interpretiert, nur entweder vergangenheits- oder zukunftsgerichtete Operatoren enthalten. Prior führt die Diskussion von S4 und S4.2 als Zeitlogiken mit der Bemerkung ein, man wolle, einer Idee des antiken Autoren Diodoros Kronos folgend, reflexive Operatoren betrachten, die auf der Basis der (semantisch als irreflexiv angenommenen) K_t-Operatoren *definiert* sind.[23] Drei Absätze später wechselt Prior eher unauffällig von der Betrachtung der reflexiven Operatoren zur Diskussion des Basis-Systems über („the *underlying* tense-logical axiom would be..."[24]), auf dessen Grundlage die reflexiven Operatoren definiert werden, und beschreibt dieses eingehend.[25] Prior bereitet die ungewöhnliche Deutung der Operatoren mit der Unterscheidung von Bezugssystem-relativem und absolutem Früher/Später vor:[26]

> [A] distant event *b* may be earlier than an event *a* in the frame of reference associated with one [...] "proper time" and later in another. This, however, is true only within limits, and in some cases an event *b* is earlier or later than an event *a* with respect to all frames of reference, and so it may be said to be "absolutely" earlier or later. In particular, if the space-time points *a* and *b* could conceivably be linked by the path of a light-signal, one of them will be absolutely earlier than the other, and the other absolutely later.[[27]] It is for this public or causal relativistic time that we can construct tense-logics with the other Diodorean-modal fragments mentioned [= S4 and S4.2].

---

[22] A.a.O., S.203.

[23] PPF, S.203.: „if we use $L\alpha$, following Diodorus, for $K\alpha L\alpha$ ..."

[24] PPF, S.204.

[25] Der Übergang ist harmlos, denn um auf der Ebene der definierten reflexiven Operatoren zu S4 zu gelangen, wird man gerade das S4-typische Transitivitätsaxiom auf der Ebene der irreflexiven Basis-Operatoren investieren. Und um zu S4.2 auf der Ebene der reflexiven Operatoren zu gelangen, wird man auf der Basis-Ebene gerade das typische S4.2-Axiom für die irreflexiven Operatoren hinzufügen **[B1]** Natürlich ist das Basis-System *keine* komplette verdoppelte S4- bzw. S4.2-Axiomatik mit K_t-Mischaxiomen, da es keine Reflexivitätsaxiome enthält.

[26] PPF, S.203.

[27] Streng genommen besteht, wie in III 1.1 bemerkt, die absolute Ordnung auch zwischen solchen events, zwischen denen ein Signal mit einer Geschwindigkeit übertragen werden kann, die geringer als die des Lichts ist. Das „in particular" ist also nicht etwa redundante Floskel.

Hierzu sind drei kleinere Punkte anzumerken: (1) Die Rede von „proper times“, die Prior auch als „*local* proper times“ bezeichnet, ist im Rahmen der SR noch nicht sonderlich hilfreich. Die ebenfalls vorkommende Rede von Bezugssystemen („frames of reference“) ist hier eindeutig zu bevorzugen. (2) Man merkt dem Zitat an, dass Prior sich, sobald sich die Gelegenheit bietet, von der Relativierung auf Bezugsysteme weg auf dasjenige stürzt, was an absolutem Früher/Später im Rahmen der Relativitätstheorie zu haben ist. In gewissem Sinn führt diese Akzentsetzung zu einem Ansatz, der gerade das Relativistische an der Relativitätstheorie ausblendet oder als Scheindatierung nicht ernst nimmt. (3) In *diesem* Sinn ist es zwar konsequent, systematisch aber doch unorthodox, die beschriebene absolute zeitliche Ordnung als „public“ zu bezeichnen,[28] so als wäre alles, was nur mit Spezifizierung eines Bezugssystems ausgesagt werden kann, deswegen gleich „privat“ und die Relativitätstheorie eine Theorie davon, wie Ereignisfolgen von einem bestimmten Standpunkt aus *aussehen*. Dem ist nicht so. Die ebenfalls vorkommende Rede von „causal“ ist zu bevorzugen.

Prior nimmt hier eine radikale Neuinterpretation seiner eigenen formalen Systeme vor, ohne diese explizit zu machen, ja vielleicht, ohne sich ihrer bewusst zu sein: Was er hier skizziert, ist überhaupt keine Zeitlogik („tense logic“), wie er behauptet, sondern vielmehr eine Raumzeitlogik. Jeder einzelne Schritt, von den Wahrheitsgelegenheiten bis zur Interpretation der Operatoren müsste deshalb eigentlich völlig neu motiviert werden. Als Deutung der Zugänglichkeitsrelation schlägt er denn auch vor:[29]

> [W]e read “$a<b$”[30] as asserting that the space-time point *b* is within the “forward light-cone” of *a*

Dabei geht es offenbar schon um die Zugänglichkeitsrelation für die *irreflexiven* Operatoren, denn kein event liegt in seinem eigenen Zukunftslichtkegel.

Die *Relate der Zugänglichkeitsrelation* werden also nicht wie üblich als Zeitpunkte gedeutet, sondern als events. Sollte man die Signalrelation als *Zugänglichkeitsrelation* überhaupt ohne weiteres „Früher/Später-Relation“ nennen, wie es Prior tut? Immerhin ist in demselben Sinn, in dem events hier „absolut“ oder „kausal“ voreinander liegen, nur ein einziges event mit einem gegebenen event e absolut gleichzeitig: e selbst. Das Jetzt scheint zu einem ausdehnungslosen Punkt zu schrumpfen.[31] Und viele events, denen relativ zu einem Bezugssystem eine frühere oder spätere Anordnung bezüglich e zugesprochen werden kann, werden von der Signalrelation gar nicht erfasst. Es liegt nicht jedes von einem event e verschiedene event e’ entweder im Zukunfts- oder

[28] Ähnliche Einschätzung etwas milder formuliert: Müller, a.a.O., S.256, Fußnote 341.
[29] PPF, S.204.
[30] Alle Formeln und semantischen Klauseln sind i.F. in der hier eingeführten Notation oder in Standard-Notation wiedergegeben. Bei Prior steht in den Formeln polnische Notation.
[31] Zur berechtigten Kritik daran, vgl. Müller, a.a.O., Kap. 4.5.2, S.257f.

Vergangenheitslichtkegel von e. Viele events liegen ja raumartig zu e. Prior beschreibt das wie folgt:[32]

> In both relativistic theories there are points [...] which are neither in the past nor in the future of a given point [...] nor yet identical with it [...].

Dies begründet, warum weder für den irreflexiven Basisoperator noch für den definierten reflexiven Operator das typische S4.3-Axiom allgemeingültig werden darf: Das würde zu linearen Modellen führen (vgl. Kap. I 1.2.2.3). Das Diodor'sche Fragment für den reflexiven Operator muss also schwächer sein als S4.3.

Auch die *atomaren Formeln* sind anders zu interpretieren, als man es üblicherweise in der Zeitlogik tun würde. Denn bei Wahrheitswertträgern der Zeitlogik wird man üblicherweise davon ausgehen, dass die Ortsangaben vielleicht in der Formulierung unterdrückt, logisch gesehen jedoch nicht amputiert sind: Ein Wahrheitswertträger wie „Es ist in Rostock heiß" oder „Es ist irgendwo heiß" wäre typisch, nicht aber einfach „Es ist heiß" (wo denn?). Dies ist vielmehr typisch für die Raumzeitlogik. Prior weist aber offenbar in seiner Skizze den atomaren Formeln *pro event* Wahrheitswerte zu. Somit handelt es sich bei ihnen in der Deutung um Zustandsbeschreibungen, in die *weder* Zeit noch Ort eingehen.

Schließlich sind die *Operatoren* anders zu interpretieren als man es sogar in einer Raumzeitlogik erwarten würde. Priors Raumzeitlogik enthält keine Ortsoperatoren. Das ist kein Wunder, da sie keine Bezugssystemoperatoren enthält und das einzige zu einem event e *absolut* gleichortige event wieder e selbst ist. Der Operator „*G*" erhält vielmehr die Lesart „Es ist an jedem event im Vorwärtslichtkegel der Fall, dass". Dass das intuitiv noch von der Lesart „Es wird immer der Fall sein, dass" abgedeckt wird, kann man kaum sagen.[33]

Das Vorliegen einer Bedingung im ganzen Vorwärtslichtkegel erfordert, je weiter man nach vorne schaut, das Vorliegen dieser Bedingung in immer weiteren Raumregionen, und zwar ganz unabhängig davon, wie man sich gerade durch die Wahl des Bezugssystems seine Orte schneidert. Man mag es vielleicht am ehesten dadurch beschreiben, dass man sagt, der kausale Zukunftsoperator habe eben auch eine *spatiale* Komponente. Diese wird für den schwachen Operator „*F*" besonders deutlich, wenn man sich überlegt, dass für die Wahrheit von „*F*p" an einem event e „p" zwar relativ auf *ein* mögliches Bezugssystem am selben Ort wie e stattfinden wird, relativ auf jedes andere Bezugssystem aber anderswo, und zwar, je nach Bezugssystem, auch dramatisch weit räumlich entfernt von e. Im Folgenden sollen „absolute" Priorsche Raumzeitoperatoren

[32] PPF, S.205.

[33] Prior muss dies denn auch extra in Klammern als intendierte Deutung von „Es wird immer der Fall sein, dass" im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie auszeichnen, wenn er die Formel "FGp $\rightarrow$ GFp" liest als: „[I]f, at *a*, it will be the case, say at *b*, that something or other will always be the case (will fill all of *b*'s forward light-cone), then at *a* it will always be the case." (PPF, S.204).

daher, um Missverständnissen bei der Deutung vorzubeugen, immer als „F_k“ und „G_k“ bzw. „P_k“ und „H_k“ notiert werden. Das „k“ steht dabei für „kausal“.[34] Die intendierte Lesart der Operatoren ist:

G_k: Es ist im ganzen Zukunftslichtkegel der Fall, dass
F_k : Es ist im Zukunftslichtkegel der Fall, dass
H_k: Es ist im ganzen Vergangenheitslichtkegel der Fall, dass
P_k : Es ist im Vergangenheitslichtkegel der Fall, dass

Dabei geht man davon aus, dass, wenn e im Zukunftslichtkegel von e’ liegt, e’ im Vergangenheitslichtkegel von e liegt, also die Relationen „liegt im ZLK von“ und „liegt im VLK von“ Konversen zueinander sind: Der Vergangenheitslichtkegel von e ist die Menge aller events, in deren Zukunftslichtkegeln e liegt; und der Zukunftslichtkegel von e ist die Menge aller events, in deren Vergangenheitslichtkegeln e liegt.

Eine *minimale* relativistische Raumzeitlogik im Sinne Priors lässt sich mit der Sprache $K_t^{add(S4\text{-}\Box 1)}$ identifizieren (vgl. Kap. I 1.2.1). Statt zweier Zugänglichkeitsrelationen wird man dabei eine, die für „G_k“, zugrunde legen und die zweite als deren Konverse definieren. Gefordert sind Asymmetrie und Transitivität (und damit auch Irreflexivität) der Zugänglichkeitsrelation. Es ist klar ist, dass sich die Modelldefinition aufstocken lässt, z.B. um die Forderung der Randlosigkeit oder der Dichte, was durch Hinzufügung der entsprechenden Axiome ($\ulcorner G_k\alpha \rightarrow F_k\alpha \urcorner$, $\ulcorner H_k \alpha \rightarrow P_k \alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner F_k \alpha \rightarrow F_k F_k \alpha \urcorner$, $\ulcorner P_k \alpha \rightarrow P_k P_k\alpha \urcorner$) angemessen axiomatisiert werden kann.[35] Die Sprache, die man erhält, wenn man zu alldem noch die Konvergenz der Zugänglichkeitsrelation fordert, soll i.F. $\mathbf{K_{Prior}}$ heißen. Es ist zu beachten, dass alle diese Sprachen Rückwärtsverzweigung erlauben und also im Hinblick auf die Verzweigungen deutlich schwächer sind als das semilineare System K_b (Kap. I 1.2.2). Für die unproblematisch korrekte und vollständige Axiomatisierung von K_{Prior} muss man nun nur noch die Verdopplung des typischen S4.2-Axioms hinzufügen, also:

$\ulcorner F_k G_k \alpha \rightarrow G_k F_k \alpha \urcorner$ $\ulcorner P_k H_k \alpha \rightarrow H_k P_k \alpha \urcorner$.[36]

Priors interessante Entdeckung ist hier, dass diese Forderung im Rahmen der intendierten Interpretation den entscheidenden Unterschied zwischen spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie etabliert:[37] Die AR erlaubt es nämlich, anders als die SR, für Fälle extremer Masseverteilung, dass zwei Lichtkegel völlig auseinander gebogen werden und

[34] So auch die Notation bei Müller, a.a.O., S.254 u.ö.
[35] Seit Goldblatt und Shehtman weiß man, dass zweidimensionale Dichte bei dieser Art von Operatoren das folgende Axiom verlangt: $\ulcorner F_k \alpha \wedge F_k \beta \rightarrow F_k (F_k \alpha \wedge F_k \beta) \urcorner$, was sich leicht auf n Dimensionen erweitern lässt. Vgl. Ilya Shapirowski / Valentin Shehtman, „Chronological furure modality in Minkowski spacetime“, in: P. Balbiani (Hrsg.) Advances in Modal Logic 4, London: King’s College Publications 2003, S.437-459, bes. S.437f. Der Text ist zugänglich unter http://www.aiml.net/volumes/volume4.
[36] Die Axiome sind genau festgehalten bei Prior, PPF, S.205.
[37] PPF, S.204.

sich ihre Ränder in keinem event treffen. Das verletzt die Konvergenzforderung Richtung Zukunft. Für eine Raumzeitlogik mit kausalen Zeitoperatoren *auch* für die AR gilt noch: Die irreflexiven Grundoperatoren sind $K_t^{add(S4-\Box 1)}$–Operatoren, die darauf definierten reflexiven Operatoren sind S4-Operatoren.

Konvergenz in Richtung Vergangenheit und Konvergenz in Richtung Zukunft sind übrigens unabhängig voneinander: Es mag sein, dass Zukunftslichtkegel auseinanderdriften können, aber dass sich dennoch die Vergangenheitslichtkegel aller events in sehr ferner Vergangenheit oder an einem Anfangs-event, das in der kausalen Vergangenheit aller events liegt, überschneiden. Für *diesen* Fall müsste die der AR angemessene Logik im Sinne Priors in der Axiomatisierung noch zusätzlich zu den Axiomen von $K_t^{add(S4-\Box 1)}$ das vergangenheitsgerichtete S4.2-Axiom $\ulcorner \mathsf{P}_k\, \mathsf{H}_k\, \alpha \rightarrow \mathsf{H}_k\, \mathsf{P}_k\, \alpha \urcorner$ enthalten.

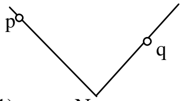
1.2.2.2 Die Ränder des Lichtkegels bei Goldblatt

Neben dem leicht zu nennenden, aber umso schwieriger zu erzielenden Hauptergebnis, dass S4.2 (und nicht etwa irgendeine andere Logik zwischen S4.2 und S4.3) den kausalen Operatoren für die SR genau angemessen ist, sind Goldblatt einige beeindruckende Differenzierungen gelungen: zum einen, was die Sensitivität einer relativistischen Zeitlogik für die Ränder des Lichtkegels angeht, und zum anderen, was die Dimensionenzahl des Modells angeht. Eine genauere Darstellung der filigranen Arbeit Goldblatts ist für die grundsätzlichen Überlegungen im Folgenden nicht erforderlich.[38]

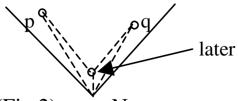
Bei seiner kurzen Diskussion *irreflexiver* Operatoren erwähnt schon Goldblatt einen Punkt, der im Folgenden wichtig sein wird: Man kann die Zugänglichkeitsrelation für „G_k" so definieren, dass auch die Ränder des Lichtkegels mit erfasst sind, also auch solche events zugänglich sind, die nur von Signalen mit Lichtgeschwindigkeit erreichbar sind; man kann die Ränder aber auch ausschließen. Interessanterweise wirkt sich dies darauf aus, was für objektsprachliche Formeln allgemeingültig sind: „$\mathsf{F}_k\, p \wedge \mathsf{F}_k\, q \rightarrow \mathsf{F}_k\, (\mathsf{F}_k\, p \wedge \mathsf{F}_k\, q)$" (i.F.: (2D) genannt) ist nur bei *Ausschluss* der Ränder des Lichtkegels allgemeingültig. Goldblatts sehr eingängige Begründung lautet:

> There may be two propositions [p] and [q] that are true in the future at two points that can only be reached by travelling (in opposite directions) at the speed of light (cf. Figure [1]). In this situation, [$\mathsf{F}_k\, p \wedge \mathsf{F}_k\, q$] will be true now, but never again, and hence the sentence
>
> $$[\mathsf{F}_k\, p \wedge \mathsf{F}_k\, q \rightarrow \mathsf{F}_k\, (\mathsf{F}_k\, p \wedge \mathsf{F}_k\, q)]$$

is not valid when α [= mit Rand] is the temporal ordering. It is however valid under ≺ [=ohne Rand], since a slower-than-light journey can always be made to go faster, so we could wait some time and then travel at a greater speed to [e_p] and [e_q] (Figure [2]).[39]



(Fig. 1)



(Fig.2)

In Kap. IV 3 wird sich zeigen, dass es für *einen* der im Rahmen eines multidimensionalen Ansatzes definierbaren Operatoren unmöglich ist, die Ränder des Lichtkegels mit einzubeziehen: Sie stellen keine möglichen Koordinatenachsen mehr dar, da bei Lichtgeschwindigkeit das Koordinatensystem kollabiert. Will man also die Menge der zu einem event e zugänglichen events gerade als die Menge aller events aller (je nach Bezugssystem) möglichen *Orte* durch e auffassen, so wird man die Ränder des Kegels natürlicherweise ausschließen. Goldblatts Entdeckung, dass sich das in der Objektsprache widerspiegelt, ist von großem Wert. Die von Goldblatt angegebene Formel und ihr „P"-Spiegelbild sollen i.F. die **Goldblatt-Axiome** heißen.

1.2.3 Einbeziehung der Bezugsysteme – Bisherige Ansätze

1.2.3.1 Überblick

Die wohl spektakulärste philosophische Konsequenz der SR ist, dass gilt: Zu jedem event e, jedem raumartig zu e liegenden event e' und jedem Bezugssystem b gibt es ein Bezugssystem b' und ein Bezugsystem b", so dass gilt: Ist e' in b gleichzeitig mit e, so ist e' in b' früher als e und ist e' in b" später als e. Prior wischt diese Tatsache, nachdem er sie kurz erwähnt hat,[40] beiseite und betrachtet nur kausale Operatoren. Dennoch ist es gerade diese Tatsache, die intuitiv die größten Probleme bereitet: Soll ein entferntes Ereignis relativ auf das eine Bezugssystem vergangen sein, relativ auf das andere noch in der Zukunft liegen? Steht es dann etwa für das eine Bezugssystem als schon geschehen fest, in Bezug auf das andere ist aber noch gar nicht ausgemacht, ob es überhaupt geschieht, da es ja in der Zukunft liegt?

Man kann, noch ohne modale Verzweigungen zu thematisieren, unterschiedlich auf diese Herausforderung reagieren. Eine mögliche Reaktion ist die Priors: Man will es

38 Während Goldblatt hauptsächlich mit reflexiven, Diodor'schen Modaloperatoren arbeitet, haben Ilya Shapirowski und Shehtman 2003 entsprechende Ergebnisse für die in der klassischen Zeitlogik üblicheren irreflexiven Operatoren nachtragen können. Vgl. Shapirowski / Shehtman a.a.O.

39 Goldbatt, a.a.O., S.233f, Notation angepasst.

40 PPF, S.203.

einfach nicht wahrhaben, dass die SR auch die zeitliche A-Reihe[41] affiziert, erklärt ein ganz bestimmtes Bezugssystem für bevorzugt und die Koordinaten aller anderen Bezugssysteme zu bloßen *Schein*koordinaten. Ein Vorschlag von Nataša Rakić[42] (III 1.2.3.3) lässt sich als raffinierte Ausarbeitung von Priors Sich-stur-Stellen[43] ansehen. Sie bevorzugt nicht einfach ein Koordinatensystem, sondern zweifelt den für jede zeitlogische Semantik und die Deutung ihrer Operatoren fundamentalen Zusammenhang zwischen A- und B-Ordnungs-Ausdrücken überhaupt an. Sie kann so jedem event eine „wahre" Zukunft, Gegenwart und Vergangenheit zuweisen, ohne diese eng ans Früher oder Später zu binden.

Eine andere mögliche Reaktion auf die erwähnte Konsequenz der SR ist, die Bewertung von Aussagen konsequent auf Bezugssysteme zu relativieren,[44] *ohne* eines davon als das wahre auszuzeichnen. Thomas Müller führt dies in einer weiteren semantischen Skizze am Ende seiner Dissertation durch. Freilich arbeitet er nicht mit den typischen quantorenartigen Modaloperatoren, sondern mit konkreten Operatoren für bestimmte raumzeitliche Distanzen. Die Beschreibung von Müllers Skizze in III 1.2.3.2 leitet über zum weiteren Ausbau des Ansatzes in Kap. III 2, der freilich – im Gegensatz zu Müllers Anliegen – von größerem Vertrauen in die klassische Modelltheorie geprägt ist.

1.2.3.2 Rakićs Modellbildung (ohne modale Verzweigungen)

An dieser Stelle ist auf den Vorschlag von Rakić zunächst so weit einzugehen, wie er sich darstellen lässt, noch ohne auf modale Verzweigungen einzugehen, d.h.: auf das zweite Kapitel von „Common Sense Time and Special Relativity". Wie Prior ist Rakić überzeugt, dass die Relativierung zeitlicher Begriffe auf Bezugssysteme in der SR ontologisch nicht zu ernst zu nehmen ist, damit diese nicht mit dem folgenden „common sense view" in Konflikt geraten:

---

[41] Vgl. Kap. I 1.3.2.

[42] Rakić, „Common Sense Time and Special Relativity" (1997), Kap.2, Zusammenfassung: Rakić, „Past, present, future and special relativity" (1997).

[43] Prior selbst schreibt vom Hufe-in-den-Boden-Rammen ("Some Free Thinking...", S.50): „[I]t seems to me that there's a strong case for just digging our heels in here and saying that, relativity or no relativity, if I say I saw a certain flash before you, and you say you saw it first, one of us is just wrong [...] even if there is just no physical means whatever of deciding which of us it is". Die Überlegung ist in mehrerer Hinsicht problematisch: Stehen der Sprechende und der Angesprochene hier an derselben Stelle? Dann irrt sich natürlich einer von beiden, aber das würde von der Relativitätstheorie auch nicht bestritten. Soll es etwas ausmachen, wann man einen Blitz *sieht*? Das hat nur recht indirekt damit zu tun, für welche Zeit man ihn koordiniert. Viele andere Gedanken im beeindruckend geschriebenen Text finde ich viel plausibler. Eine Lösung der Frage, welche Intuitionen hier plausibel sind und welche nicht, dürfte Teil IV dieser Studie nahe legen.

[44] Im Prinzip schon vorgeschlagen in meinem „Einsteins Zug und logische Gesetze" (1997), S.29.

> [T]he past and the present are real, wheras the future does not yet belong to reality [...] future events have yet to come into existence.[45]

Rakić schlägt als philosophische Konsequenz der SR vor, die für die Wahrheitsbedingungen zeitlogischer Sprachen grundlegenden Äquivalenzen aufzugeben, die sie wie folgt formuliert:

> [T]he following statements are equivalent:
> [...T]aking e to be here and now, e' is in the present [/ past / future]
> [...] e ist simultaneous with [/ earlier than / later than] e'.[46]

Da die B-Ordnungs-Formulierungen nach der SR Bezugssystem-relativ seien, Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft dies aber nach dem „common sense view" nicht sein könnten, könnten die Aussagen nicht mehr als äquivalent aufgefasst werden. Damit wäre der Weg frei für die Definition einer Bezugssystem-unabhängigen Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft für jedes event. All dies lässt sich definieren auf der Grundlage eines Begriffs der Realisation („realization"), indem ein Ereignis zu e gerade dann in der Zukunft liegt, wenn es nicht realisiert ist, in der Gegenwart, wenn es realisiert ist, aber keine realisierten Ereignisse mehr vor sich hat, und in der Vergangenheit, wenn dies doch der Fall ist.[47] Als Ziel ergibt sich damit:

> [W]e are looking for a notion of realization which separates all events of Minkowski space-time into realized and unrealized ones with respect to any event of Minkowski space-time.[48]

Zu charakterisieren sind somit die Relationen R ("is realized with respect to") und PRES ("is present with respect to") zwischen events.[49] Plausiblerweise ist R als reflexiv und transitiv, aber nicht als symmetrisch anzunehmen (am Abend ist der Mittag realisiert, aber am Mittag noch nicht der Abend). Außerdem sollte für jedes event e in der kausalen Vergangenheit und kein event in der kausalen Zukunft von e' gelten: e R e'.

Als denkbare Eigenschaften von R liegen nahe, dass entweder (1) das gesamte Raumartige zu e' bezüglich e' komplett realisiert oder (2) komplett nicht realisiert ist. Rakić lehnt beides ab, indem sie festhält, was zumindest im klassischen Bild von Weltbuch-Modellen bestens veranschaulicht wird:

> The absence of any possible causal influence between two events e and e' can be the reason neither for e' to be realized with respect to e, nor for e' not to be realized with respect to e.[50]

---

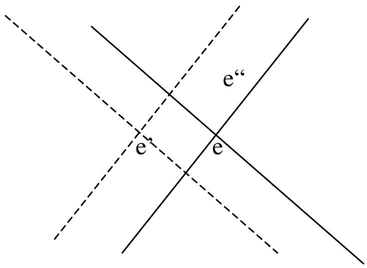
[45] Rakić, a.a.O., S.1.
[46] Ebd. S.31.
[47] Vgl. ebd. S.29.
[48] Ebd.
[49] Ebd. S.33.
[50] Rakić, a.a.O., S.34.

Gegen (2) wendet sie ein, dass ein Ereignis im Raumartigen zu e an e zwar prinzipiell *epistemisch* indeterminiert sein mag, dass aber ontische und epistemische Determiniertheit auseinander zu halten sind. Immerhin wäre es außerordentlich seltsam, zu sagen: Ein Ereignis, von dem man erfährt, dass es vor einer Weile stattgefunden *hat*, wird erst „realisiert“, wenn man davon erfährt. Rakić führt, das Seeschlacht-Beispiel ins Raumartige übertragend, aus:

> [I]t is hard to see a reason why it is impossible that [the sea-battle] has already happened, i.e. is realized with respect to [e], even though the observer still has to wait a while before she can receive the message saying that the sea-battle has occurred.[51]

Dieser intuitive Einwand ist sehr ernst zu nehmen, und er wird eine Rolle spielen, wenn es in Teil IV dieser Studie darum geht, unter der Berücksichtigung der Verzweigung von Alternativen Lösungen für das Problem zu diskutieren und sich für eine davon zu entscheiden.

Weniger intuitiv, sondern eher formal ist ihr Einwand gegen (1), also die Einbeziehung des Raumartigen. Das ist umso interessanter, als ein in Teil IV noch zu diskutierendes Argument Belnaps unter bestimmten Bedingungen gerade diese Einbeziehung erzwingen würde. Rakić zeigt, dass dies der Transitivität von R zusammen mit der geforderten Nicht-Realisiertheit der kausalen Zukunft widersprechen würde.[52] Das Raumartige eines events e’ im Raumartigen eines gegebenen events e überlappt auch Teile der kausalen Zukunft von e. Ist das Raumartige von e an e realisiert, so auch e’; ist das Raumartige von e’ an e’ realisiert, so auch ein event e“ im Raumartigen von e’ und in der kausalen Zukunft von e. Ist R transitiv, so gilt: Ist e“ für e’ realisiert und e’ für e, so auch e“ für e. e“ liegt aber in der kausalen Zukunft von e, so dass e“ nicht für e realisiert sein darf.



Ein denkbarer Gegeneinwand wäre, dass die Transitivitätsforderung eben zu stark und nur für genau solche an e realisierten events plausibel ist, die im Vergangenheitslichtkegel von e liegen (also für den gesamten VLK von e). Doch es fällt in der Tat schwer, eine

[51] Ebd. S.35. Das Argument ist etwas unglücklich vermischt mit dem Gedanken, die Entscheidung zur Seeschlacht, die diese determiniert, könne ja bereits in der kausalen Vergangenheit von e gefallen sein, und dies viele Jahre vor e. Dies spielt keine Rolle, da die Seeschlacht bis zu ihrem Stattfinden immer noch ausbleiben kann, egal, was der Admiral entscheidet.
[52] Rakić, a.a.O., S.34.

nicht-transitive Relation in irgendeinem verständlichen Sinn von Realisiertheit zu deuten. Rakićs entscheidende zusätzliche Charakterisierung der R-Relation lautet wie folgt:

> If e“ is in the causal future of e’, if e’ is realized with respect to e, and if e“ is not realized with respect to e, then there is an event e* which is causally between e’ and e”, and such that e and e* have the same set of all realized events.[53]

Interessant sind hier Fälle, in denen e’, e“ oder beide im Raumartigen zu e liegen. Wenn schon nicht e, das ontologisch zwischen e’ und e“ positioniert ist, in kausaler Beziehung zu e’ oder e“ steht, dann wenigstens, gewissermaßen vertretungsweise, das von e verschiedene e* mit identischer ontologischen Positionierung. e selbst bildet an e einen Teil der Vorderkante des Realisierten (seine kausale Zukunft ist ja nicht realisiert). Dasselbe gilt für e*. Wenn für e* die Raumzeit genau so ontologisch partitioniert ist wie für e, so sind e* und e events *derselben* ontologischen Vorderkante. Dieser Gedanke macht verständlich, weshalb sich die Gegenwarts-Relation PRES gerade wie folgt definieren lässt:[54]

e PRES e’ gdw e R e’ & e’ R e.

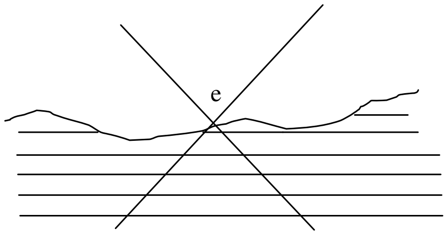
PRES ist die Einschränkung von R auf symmetrische Fälle (während das Beispiel von Abend und Morgen ein nicht-symmetrischer Fall von R ist). Da schon R reflexiv und transitiv ist, ist PRES ohne weiteres eine Äquivalenzrelation. Sie bildet „slices of existence“[55], deren sukzessiver Aufbau aufs schon Bestehende das Werden der Wirklichkeit ist. Es lässt sich zeigen, dass diese Scheiben wiederum linear[56] und, bei Dichte der Signalrelation, dicht[57] geordnet werden durch eine Relation $\propto$, die zwischen einer Scheibe, die e enthält, und einer Scheibe, die e’ enthält, gerade dann besteht, wenn e an e’ noch nicht realisiert ist.[58] Man mag sie, freilich ein seltsames Hybrid aus A- und B-Ordnungs-Vokabular benutzend, als „liegt in der echten Zukunft von“ lesen. Es lässt sich zeigen, dass R die Raumzeit für jedes event genau in Realisiertes und nicht Realisiertes aufteilt; dass durch PRES Scheiben durch das gesamte Raumartige gezogen werden (also auch raumartig entfernte Ereignisse gegenwärtig sind); dass vom Raumartigen daher ein Teil realisiert ist und ein Teil nicht; dass keinem event der Gegenwartsscheibe etwas Realisiertes in der kausalen Zukunft vorhergeht, sondern dass jedes event der Gegenwartsscheibe zwischen ontologischer Vergangenheit und Zukunft liegt; und dass

---

[53] Rakić, a.a.O., S.37, *constraint* (g).
[54] Ebd. S.45.
[55] So Rakić in Anlehnung an Broad, “Scientific Thought” (1923), S.66; vgl. Rakić, a.a.O., S.27 u.ö.
[56] Ebd. S.45.
[57] Ebd. S.49.
[58] Rakić, a.a.O., S.45.

nur die durch PRES charakterisierte ontologische Gegenwart und deren Vergangenheit jeweils schon realisiert sind.[59]

Rakićs bildliche Darstellung einer Gegenwartsscheibe, die die Raumzeit zu e in Realisiertes und Nichtrealisiertes teilt,[60] ist verblüffend:



Sie merkt selbst dazu an:

> [I]t seems natural to expect some uniformity in the „shape" of PRES-equivalence classes, since each of them represents a present-boundary between a past and a future. The example [...] shows one such present-boundary with the shape of a curve. Intuitively, it would be strange if the shape of other present-boundaries in that model would drastically differ. Subscribing to such a uniformity principle about the "shape" of PRES-equivalence classes comes down to imposing more constraints on the relation PRES...[61]

Erstaunlich an Rakićs gezackter Gegenwart ist, dass es *kein einziges* SR-Bezugssystem gibt, so dass gerade die von dessen Warte aus mit e gleichzeitigen Ereignisse die ontologische Gegenwart von e im Sinne der Darstellung bilden. Man macht es sozusagen nie richtig, welches System auch immer man wählt. Dies ist auch bei jeder anderen Art von Form der Fall – außer bei Geraden. Es ist verwunderlich, dass Rakić ausgerechnet diesen naheliegenden Fall von „shape" nicht diskutiert.[62] Denn hierzu lässt sich sagen: Formuliert man einen *constraint* für PRES so, dass PRES-Scheiben grundsätzlich in der Darstellung als Geraden erscheinen müssen, so gibt es genau ein Bezugssystem, mit dem man es ontologisch richtig macht: dasjenige Bezugssystem, dessen Zeitpunkte in der Darstellung dieselbe Neigung haben wie die PRES-Geraden. Für *dieses* System würden die grundlegenden Äquivalenzen der zeitlogischen Semantik dann auch wieder gelten.

Gibt es irgendeinen Grund, eine Bezugssystem-unabhängige ontologische Gegenwart im Sinne Rakićs tatsächlich anzunehmen? Vielleicht zumindest den, dadurch eine Lösung für das philosophische Problem der Realisiertheit des Raumartigen vorschlagen zu können. *Wenn* (1) Realisiertheit Bezugssystem-unabhängig ist (wofür im Moment noch

---

[59] Ebd. S.48f

[60] Ebd. S.49.

[61] Ebd. S.53.

[62] Bereits eingebaut ist durch Rakićs Definitionen der folgende „shape-constraint": Die Tangentensteigung an einer PRES-Linie darf, sofern sie definiert ist, nie 45° erreichen. Denn sonst läge von zwei gleich-gegenwärtigen events eines in der kausalen Vergangenheit des anderen.

alles zu sprechen scheint) und *wenn* (2) Rakićs Argumente dafür überzeugend sind, dass das Raumartige weder insgesamt dem Realisierten noch insgesamt dem Nichtrealisierten zuzuschlagen ist, dann wäre das wohl zu befürworten, falls (3) vom Aufbau der SR nichts dagegen spricht. Tatsächlich spricht nichts *dagegen*, und diese Kompatibilität ist ein wesentliches Argumentationsziel Rakićs. Zur Lösung eines philosophischen Problems – und das ist ja auch etwas – würde man dann die Existenz einer Bezugssystem-unabhängigen Gegenwart postulieren. Deren Gestalt könnten wir freilich unmöglich von irgendeinem event aus ausmachen, und zwar weder an ihm selbst, wenn es unsere Gegenwart ist, noch jemals später. Zwar werden wir später erfahren, was die Schiffsuhr anzeigte, als die Seeschlacht begann; aber das scheint uns hier gar nichts zu nützen. Die ontologische Gegenwart ähnelt in diesem Ansatz Kants Ding an sich: Wir können (vom Zustand am eigenen Standpunkt abgesehen) nichts darüber wissen, außer, dass es sie geben muss. Das ist alles andere als eine attraktive Lösung. Zunächst erscheint es daher als ärgerlich, wenn die Behauptung, die Gegenwart verlaufe in diesen und jenen Zacken, empirisch unwiderleglich ist. Vielleicht ist dies aber auch eine sehr wertvolle Beobachtung. Denn anders formuliert heißt das: Die ontologische Situation an e erlaubt keinen Schluss darauf, welche mögliche Unterteilung des Raumartigen von e als dessen ontologisch relevante Gegenwart zu gelten hat. Vielmehr ist die ontologische Situation an e ganz unabhängig davon, was sich als Gegenwart von e im Raumartigen herausstellt. Das legt – in völligem Gegensatz zu Prior und Rakić – den Verdacht nahe, dass die räumlich ausgedehnte Gegenwart, wenn es sie gibt, sich bei genauerer Betrachtung als etwas sehr viel weniger Handfestes herausstellt, als man zunächst meint. Dieser Verdacht soll in Teil IV weiter verfolgt werden. Das Ergebnis wird sein, dass man die zweite Prämisse ablehnen sollte. Realisierheit lässt sich auf ganz plausible Weise eben doch Bezugssystem-abhängig konzipieren.

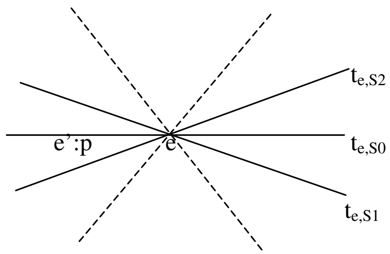
1.2.3.3. Der Ansatz von Thomas Müller

Müller definiert im einschlägigen vierten Kapitel seines Buchs „Arthur Priors Zeitlogik“[63] zunächst in rein rekonstruktiver Absicht Priors Idee der Scheinkoordinaten mit einer Sprache, die er ASL (Allgemeine Standpunkt-Logik) nennt. Er skizziert dann eine Sprache ISL (Idealistische Standpunkt-Logik), die er selbst befürwortet.

Der Grundgedanke von ASL lässt sich wie folgt beschreiben: Ihre atomare Formeln enthalten einen Orts-Parameter Y (aus dem *bevorzugten* Koordinatensystem), und die Modelle sollen eine absolute Gleichzeitigkeits-Relation enthalten (die Gleichzeitigkeit im bevorzugten System). Formeln werden zwar Bezugssystem-relativ bewertet. Aber *ein* Bezugssystem wird als das wahre, ontologisch relevante ausgezeichnet: dasjenige

[63] Vgl. dazu, etwas ausführlicher, auch meine Rezension in der Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie 35 (2004), S.403-411.

Bezugssystem, das gerade diejenigen events mit dem gleichen zeitlichen Koordinatenwert versieht, die im Sinne der absoluten Gleichzeitigkeits-Relation *wirklich* gleichzeitig sind. Neben den Zeitoperatoren „P“ und „F“ enthält ASL so viele konkrete Bezugssystem-Operatoren, wie Bezugssysteme betrachtet werden. Bezugssysteme werden (metasprachlich) als „S_n“ (für „System“ oder, schlechter, für „Standpunkt“) notiert. Das bevorzugte System trägt dabei grundsätzlich den Namen „S_0“. Entsprechend werden die Bezugssystem-Operatoren als „A_{Sn}“ notiert, der für das ausgezeichnete Bezugssystem als „A_{S0}“. Die von Müller angegebenen Wahrheitsbedingungen bringen das erwünschte Ergebnis:



e = (t,X), e’= (t’,Y)

Man erhält für das abgebildete Modell, wenn p nur an e’ je wahr ist:
für S_0 an (t,X): $p(Y) \wedge \ \sim Fp(Y) \wedge \sim Pp(Y) \wedge A_{S1}Pp(Y) \wedge A_{S2}Fp(Y)$
für S_1 an (t,X): $\sim p(Y) \wedge \sim Fp(Y) \wedge Pp(Y) \wedge A_{S2}Fp(Y)$
für S_2 an (t,X): $\sim p(Y) \wedge Fp(Y) \wedge \sim Pp(Y) \wedge A_{S1}Pp(Y)$.[64]

In allen drei Systemen ist dabei wahr:
$A_{S0}p(Y) \wedge A_{S0}\sim Fp(Y) \wedge A_{S0}\sim Pp(Y) \wedge A_{S1}Pp(Y) \wedge A_{S2}Fp(Y)$.
Etwas kurios ist, dass die atomaren Formeln in der ASL Ortsangaben enthalten, die sich, egal, was für ein Bezugssystem-Operator davorsteht, immer auf S_0 beziehen. Notiert man das „Y“ mit einer Ortsangabe im Sinne von Koordinaten des ausgezeichneten Systems aus, so hieße etwa „$A_{S1}Fp(0km/0km/0km)$“ eben gerade *nicht*: „Im Sinne von System 1 beschrieben wird in einiger Zeit hier p der Fall sein“. Es heißt vielmehr: „Im Sinne von System 1 beschrieben [wird in einiger Zeit]$_{S1}$ [in 0 km Entfernung]$_{S0}$ p der Fall sein“. System 1 mag dabei so beschaffen sein, dass es das, was im Sinne von System 0 am gleichen Ort geschieht, als 10.000 km entfernt ansetzt. Anschaulich gesprochen kann man in Modellen der ASL Zeitkoordinaten zwar bis zum Winkel von 45° beliebig kippen, die einzigen zur Verfügung stehenden Orte sind aber die (senkrecht dargestellten) des bevorzugten Bezugssystems. Die Probleme, die die räumliche Entfernungsangabe an der atomaren Formel macht, legt es dabei nahe, die Entfernungsangabe zu streichen und lieber Ortsoperatoren einzusetzen. Müller macht selbst klar, dass ASL systematisch

---

[64] Es ist schwer zu sehen, warum Müller, a.a,O,, S.267, behauptet, gerade „diese Information“ werde in ASL „nicht repräsentiert“.

gesehen noch nichts Halbes und nichts Ganzes ist.[65] In der ISL verzichtet Müller denn auch auf ein ausgezeichnetes Bezugssystem und verwendet konkrete Ortsoperatoren, die er als „[dort_1]“, „[dort_2]“ etc. notiert und die das Ergebnis einer bestimmten räumlichen Translation angeben.

Müller stellt schließlich die interessante These auf,[66] dass die kausalen Operatoren in ASL definierbar sein müssten. Er argumentiert dabei so: Gerade das, was an e für ein *beliebiges* Bezugssystem früher ist als e, ist kausal früher als e. D.h., dass gerade dann, wenn an e für alle $S\ulcorner A_S\mathsf{F}\phi\urcorner$ wahr wird, auch $\ulcorner \mathsf{F}_k\phi\urcorner$ wahr wird, wenn man „F_k“ als kausalen Operator einführt. Müller behauptet deshalb, die Priorsche Logik mit kausalen Operatoren sei als „Untersystem“ von ASL „ableitbar“.[67] Dieses Ergebnis soll sich auch auf die von Müller selbst befürwortete ISL übertragen.[68] So elegant diese Definition wäre, so kann ich doch Müller in diesem Punkt nicht zustimmen. Ein kleinerer Punkt ist: Um hier von einem Untersystem und Ableitbarkeit sprechen zu können, müsste man den von Müller beschriebenen Operator mit dem *objektsprachlichen* Vokabular der ASL definieren können. Das ist aber nicht möglich, da dieses nur konkrete, aber keine quantorenartigen Bezugssystem-Operatoren enthält. Wichtiger ist: Auch als *zusätzlich* eingeführtes Zeichen kann der von Müller beschriebene Operator nicht der von Prior studierte kausale Operator sein. Nennen wir den von Müller beschriebenen Operator „F_k^M“ und den Kausaloperator bei Prior, wie gehabt, „F_k“, so lässt sich der Punkt folgendermaßen ausdrücken: Wäre „F_k^M“ derselbe Operator wie „F_k“, so müsste sich auch der zu duale „F_k^M“ Operator „$\sim\mathsf{F}_k^M\sim$“ (kurz: „G_k^M“) so verhalten wie „$\sim\mathsf{F}_k\sim$“ (kurz: „G_k“). Dies ist aber nicht der Fall **[B6]**.

Müllers ASL zeigt aber zweifellos, dass man eine formale Sprache definieren kann, die die Relativität des Früher und Später auf Bezugssysteme ausdrückt, aber bereits in der Modellbildung so sehr von einem ausgezeichneten Koordinatensystem ausgeht, dass alles, was davon abweicht, nicht wirkliche, sondern bloß scheinbare Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft behauptet. Nur kann man wieder fragen: Warum sollte man das tun? Müller erwähnt mehrere mögliche Motivationen:

- Es könnte quantenphysikalische Gründe geben, ein bestimmtes Bezugssystem auszuzeichnen – was aber höchst umstritten ist.[69]
- Gott könnte, für uns unerkennbar, ein bevorzugtes Bezugssystem haben.[70]

[65] Ebd., S.268.
[66] Ebd., S.267f.
[67] Ebd., S.268.
[68] Ebd., S.276 („Schritt 3“). Auch wenn der Text in diesem Punkt nicht ganz klar ist, so ist anzunehmen, dass Müller die objektsprachlichen Bezugssystem-Operatoren der ASL in der ISL weiter verwenden will.
[69] Müller, a.a.O., Abschnitt 4.4.3.5, S.252f
[70] Ebd., S.250, Fußnote 330; vgl. auch Øhrstrøm und Hasle, „Temporal Logic“, S.200f jeweils mit Bezug auf Lucas, „The Future, An Essay on God, Temporality and Truth” (1989), S.220. In die gleiche Richtung weisen die einschlägigen Veröffentlichungen des prominenten Evangelikalen William Lane Craig, z.B. “Time and the Metaphysics of Relativity“, Dordrecht: Kluwer 2001. Einen guten Eindruck vermittelt das Papier „The Special Theory of Relativity and Theories of Divine Eternity“ auf Craigs Homepage unter http://www.leaderu.com/offices/billcraig/docs/leftow.html.

- Zwei Ereignisse könnten aus kosmologischen Gründen als absolut gleichzeitig bezeichnet werden, wenn sie zum selben „Weltalter“ stattfinden – was aber einen „ausgezeichneten Ursprung“ voraussetzt.[71]

Die erste Motivation erscheint (noch) nicht tragfähig. Zur zweiten lohnt es sich allenfalls anzumerken, dass hier Gott ein Bezugssystem interessanterweise „by mere will“ bevorzugen müsste, da ja alle gleich gut sind.[72] Ernst zu nehmen ist allein der dritte Punkt. Sofern er auf eine Urknall-Singularität setzt, kann er kaum schon als gesichert gelten.[73] Auch wenn die SR in der AR aufgeht, so sind doch die kosmologischen Anwendungen der AR immer noch so spekulativ, dass es methodisch problematisch scheint, auf eine ganz bestimmte von ihnen als Argument gegen eine fundamentale Annahme der SR zu hoffen.[74] Vor allem aber fragt man sich: Wieso sollte, selbst wenn ein bestimmtes Bezugssystem kosmologisch besonders informativ und damit pragmatisch bevorzugenswert erscheint, das dieses Bezugssystem irgendwie *ontologisch* auszeichnen? Und darum ist es Prior doch zu tun.

Über ASL als Prior-Rekonstruktion hinausgehend skizziert Müller am Ende seines Buchs ein weiteres, von ihm selbst befürwortetes System, das er ISL nennt.[75] *Idealistisch* ist die ISL freilich nur von Priors verfehlter Ansicht her, Bezugssysteme seien subjektive Erscheinungsformen. Auch wenn Müller Wert darauf legt, dass in der ISL Perspektiven ineinander umgerechnet werden, so sind diese Perspektiven, wenn sie mit Bezugssystemen identifiziert werden, alles andere als bloß subjektiv. Das erkennt Müller klar an (vgl. S.275). Dennoch liegt ihm offenbar daran, perspektivischen Weltbezug von einem gewissen Standpunkt aus, auch „idealistisch“ nennen zu können.[76] Mit der ISL möchte Müller Priors Bevorzugung eines bestimmten Bezugssystems überwinden, so dass alle Bezugssysteme ontologisch gleich gute, objektive Koordinaten ergeben und nicht etwa alle bis auf das wahre nur Scheinkoordinaten. Da er (anders als Rakić) die grundlegenden semantischen Äquivalenzen der Zeitlogik beibehält, relativiert er bei der Deutung der Zeitoperatoren auf die übliche Weise auch die A-Reihen-Ausdrücke

---

71 Details und weitere Literatur: Müller, a.a.O., S.251.

72 D.h. so, wie laut der (mit Newton abgestimmten) Ansicht von Samuel Clarke sich Gott entscheiden hat, im absoluten Raum gerade diese Konstellation einzurichten und nicht eine um qualitativ identische um n° gedrehte Alternative dazu. Vgl. dazu Clarkes zweiten Brief an Leibniz, §1, S.47 der Ausgabe von Robinet. Mit Leibniz ließe sich antworten, dass die Auszeichnung jedes anderen Bezugssystems zur „même chose“ geführt hätte. Vgl. Leibniz‘ dritten Brief, §5, S.53.

73 Der Gedanke scheint allerdings auch unter Physikern weniger Allgemeingut zu sein als es seine Popularität vermuten lässt. Vgl. z.B. den (freilich nicht allzu klaren) Schluss von Kap. 8 („The Origin and Fate of the Universe“) in Hawkings „Brief History of Time“, S.147-149: „[...] if the universe is really completely self-contained, having no boundary or edge, it would have neither beginning nor end: it would simply be.“

74 Müller, a.a.O., S.251, macht den Fall evtl. etwas stärker und hält das kosmologische Argument offenbar zumindest teilweise für „gut motiviert“ (Fußnote 333). Vgl. dort auch für weiterführende Literatur.

75 Vgl. für den folgenden Abschnitt Müller, a.a.O., S.269 – 276 passim.

76 Am besten hält man es hier mit Goethes „Faust I“ (Vers 3457): „Namen sind Schall und Rauch”. Die ASL scheint mir auch nicht sonderlich *allgemein* zu sein, da sie ja Priors Vorurteil des bevorzugten Bezugssystems inkorporiert.

„vergangen" und „zukünftig" aufs jeweilige Bezugssystem, wie es dem Grundgedanken der SR entspricht.

Die Definition der ISL soll dabei möglichst ohne den Einsatz von modelltheoretischem Vokabular geschehen, da Müller als Konsequenz seiner Darstellung von Priors metaphysischem Grundansatz der Modelltheorie sehr skeptisch gegenüber steht. Die raumzeitlichen Operatoren zeigen dann jeweils Ergebnisse eines imaginären *Perspektivenwechsels* an. In einem ersten Schritt formuliert Müller Wahrheitsbedingungen zwar noch auf der Grundlage einer „'extern' charakterisierten" Menge von Perspektiven";[77] erst in einem zweiten Schritt werden Formeln dann schlicht aus „meiner momentanen Perspektive" bewertet.[78] Dies scheint mir jedoch nicht unproblematisch, was die Perspektivenwechsel-Operatoren angeht. Das Problem ist: Bei der Bewertung einer komplexen Gesamtformel muss ich mich sukzessiv auf mehrere Perspektiven beziehen. Aber nur *eine* Perspektive kann meine momentane Perspektive sein **[B7]**.

Die geäußerten Kritikpunkte schmälern nicht die Bedeutung von Müllers Buch als Pionierarbeit. Sie legen es allerdings nahe, eine relativistische Raumzeitlogik in einigen Details anders aufzubauen:

- Die Definition quantorenartiger Bezugssystem-Operatoren („für jedes / manches Bezugssystem gilt") auch in der Objektsprache, die man auf klassische modallogische Eigenschaften und Interaktionsgesetze hin untersuchen kann, bietet sich im Lichte von Müllers problematischer Behauptung zu den kausalen Operatoren besonders an.
- Entsprechend sollten quantorenartige Orts-Operatoren („überall" / „irgendwo") zum Einsatz kommen, die aber, anders als in der ASL, aufs Bezugssystem relativiert werden.
- Man mag daran zweifeln, ob die logischen Beziehungen immer unter Zuhilfenahme der *metrischen* Begriffe der Lorentz-Transformation modelliert werden müssen, oder ob man nicht eher mit rein *topologischen* Begriffen auskommen kann: Die metrische Krücke verkompliziert offensichtlich die Modellbildung und mag beim Übergang zur AR, in der die Metrik vollends in Fließen gerät, eher hinderlich sein.

---

[77] Müller, a.a.O., S. 270

[78] Offenbar ist damit ein komplexer Bewertungsumstand im Sinne der so genannten Poincaré-Gruppe gemeint, der sowohl die Information enthält, welches event als Standpunkt angesehen wird, als auch die Information, welches Bezugssystem verwendet wird. Vgl. ebd., S.271. vgl. auch S.230, Fußnote 298, und S.272.

KAPITEL 2

Relativistische Raumzeitlogik mit Orts- und Bezugssystem-Operatoren

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen verschiedene, aufeinander aufbauende formale Sprachen definiert werden, die sich als relativistische Raumzeitlogiken deuten lassen. Sie übernehmen aus der klassischen Raumzeitlogik die quantorenartigen Ortsoperatoren („irgendwo“, „überall“) und enthalten als wesentliche Neuerung quantorenartige Bezugssystem-Operatoren („für mindestens ein Bezugssystem gilt“, „für alle Bezugssysteme gilt“). Modale Alternativen sind mit diesen Sprachen noch nicht darstellbar. Eine Einschränkung auf die SR ergibt sich ziemlich spät im Aufbau und wird sich als nicht sehr zentral erweisen. Die Orts- und Zeitoperatoren behalten ihre übliche, klassische Bedeutung, werden jedoch auf ein Bezugssystem relativiert gelesen. Da ein event immer nur im Rahmen eines Bezugssystems angesprochen wird, erfolgt die Bewertung von Formeln nicht einfach für events. Als Bewertungskontexte fungieren vielmehr Bezugsystem-relative Orte und Zeiten. Rede über entfernte, gleichzeitige Ereignisse im Raumartigen – nach Spezifizierung des Bezugssystems – ist somit problemlos darstellbar. Die auf Priors Vorschlag zurückgehenden kausalen Operatoren für die absolute Zukunft und Vergangenheit lassen sich als definierte Zeichen einführen.

Zunächst soll die denkbar einfachste Ausführung der gerade beschriebenen Grundidee diskutiert werden (III 2.2), nämlich eine einfache Erweiterung der klassischen Raumzeitlogik $S5{\times}K_{lin}$ um einen Bezugssystem-Parameter: die Sprache ^{Proto}**Rel**. Schon an ihr lässt sich zeigen, dass die Bezugssystem-Operatoren S5-Operatoren sind. Ferner lässt sich daran motivieren, warum es sinnvoll ist, die Anzahl der Bezugssysteme eines Modells variabel zu halten, also z.B. auch Modelle mit nur zwei oder gar nur einem Bezugssystem zuzulassen. Allerdings zeigt sich bald: Diese einfache Erweiterung ist sehr defizitär, weil sie keine Zeitrichtung auszeichnet.

Um die Zeitrichtung auszuzeichnen, wird es genügen (III 2.3), den Strukturen weitere, streng mengentheoretisch definierte Elemente hinzuzufügen, die sich als Lichtkegel interpretieren lassen, und dann bestimmte elementare einschränkende Bedingungen für die Beziehung zwischen Lichtkegeln und Bezugssystemen zu beachten. Man sieht hier *genau* – und dies ohne Metrik –, inwiefern der Lichtkegel festlegt, was ein brauchbares Koordinatensystem ist, und inwiefern dies für alle möglichen Koordinatensysteme eine einheitliche Zeitrichtung ergibt. Erfreulicherweise spiegelt sich die Einheit der Zeitrichtung in einigen einfachen objektsprachlichen Theoremen der unter Berücksichtigung der Lichtkegel definierten Sprache **Rel** wider.

Danach soll eine spezielle einschränkende Bedingung diskutiert werden, die sich auf die Operatorenkombination „Für alle Bezugssysteme gilt: es wird der Fall sein, dass“ und ihr vergangenheitsgerichtetes Analogon auswirkt; dass nämlich die betrachteten Strukturen in dem Sinne **volle Struktur**en sind, dass sie *alle* brauchbaren Bezugssysteme enthalten. Dafür werden sich auch die Goldblatt-Axiome[1] als interessant erweisen. Denn hierbei ist genau darauf zu achten, dass die genannten Operatoren-Kombinationen für volle Strukturen den Rand des Lichtkegels nicht mit einbeziehen. Schließlich sollen als einschränkende Bedingungen die von Prior bekannten Konvergenzforderungen für die Lichtkegel einbezogen werden. Die einschränkende Bedingungen sind unabhängig voneinander, aber realistisch kombinierbar, was zu den Sprachen, $\mathbf{Rel}^{\mathbf{pl}}$ („pl“ steht für *plene*) und **SRel** führt.

2.2 Die Sprache $^{\mathrm{Proto}}\mathrm{Rel}$

2.2.1 Ein neues Operatorenpaar: „für alle / manche Bezugssysteme gilt“

Die Modalisierung der Raumzeitlogik $S5{\times}K_{lin}$ in Kap. II 3 ergab sich aus einem einfachen Grundgedanken: Statt ein Weltblatt mit *einer* ganz bestimmten Beschriftung zu betrachten, wurde für Formeln mit „N“-Operator über viele verschiedene Beschriftungen quantifiziert, freilich nicht über *alle* möglichen Beschriftungen an jeder Position, sondern nur für bis zu ihr gleiche Beschriftungen. Darüber, dass ein Weltblatt auch eine andere *Linierung* aufweisen kann, also die events *anders* in Orte und Zeiten partitioniert sein könnten, verschwendete man dabei keinen Gedanken. An die Relativierung der Raumzeitlogik $S5{\times}K_{lin}$ kann man gerade umgekehrt herangehen. Man betrachtet nun ein Weltblatt mit einer ganz bestimmten *Beschriftung* und denkt nicht daran, dass diese auch anders sein könnte. Stattdessen nimmt man in den Blick, dass, bei gleicher Beschriftung, das Blatt auf verschiedenste Art *liniert* sein kann, also je nach Koordinatensystem ganz verschiedene Partitionierungen der event-Menge in Orte und Zeiten vorliegen. In einem weiteren Schritt wird man sehen, dass nur ganz bestimmte Linierungen Alternativen zueinander sind und nicht alle überhaupt.

2.2.2 Definition der Sprache $^{\mathrm{Proto}}\mathrm{Rel}$

Das Alphabet von $^{\mathrm{Proto}}\mathrm{Rel}$ enthält das übliche aussagenlogische Vokabular und die Operatoren „E“, „G“, „H“ und „×“. Die entsprechend als $\ulcorner\sim \xi \sim\urcorner$ definierten Zeichen

[1] Vgl. Kap. III 1.2.2.2.

sind „S“, „F“, „P“ und „+“. Die Formregeln sind wie üblich und weisen „×“ syntaktisch als ganz gewöhnlichen Modaloperator aus. Die intuitive Grundidee ist:

- Das Zeichen „×“ soll an einen doppelten Lichtkegel erinnern und wird zu deuten sein als „für jedes Bezugssystem gilt“.
- Das Zeichen „+“ soll an die Achsen eines bestimmten, rechtwinklig dargestellten Koordinatensystems erinnern und wird zu deuten sein als „für mindestens ein Koordinatensystem gilt“.

Eine ^{Proto}Rel-Struktur besteht aus einer nichtleeren Menge (von events), W, und einer nichtleeren Menge von $S5\times K_{lin}$-artigen Partitionierungen auf dieser Menge, B.[2] Hatte eine eventisierte $S5\times K_{lin}$-Struktur die Gestalt $\langle W, \langle <, A\rangle\rangle$, so hat nun die ^{Proto}Rel-Struktur die Gestalt $\langle W, B\rangle$, wobei *jedes einzelne* Element von B die Gestalt $\langle <, A\rangle$ hat. Bei der Formulierung der V-Funktion wird es sich für das Folgende als praktisch erweisen, Zeitpunkte und Orte als Bezugssystem-abhängige Funktionswerte von events aufzufassen:

- „$t_b(e)$“ heißt: „der Zeitpunkt von e relativ zum Bezugssystem b“.
- „$s_b(e)$“ heißt: „der Ort von e relativ zum Bezugssystem b“.[3]

Ein ^{Proto}Rel-Modell lässt sich nach diesen Vorüberlegungen definieren wie folgt:

Ein ^{Proto}**Rel-Modell** ist ein Quadrupel $\langle W, B, \beta, V\rangle$, so dass gilt:
1. W ist eine nichtleere Menge [von events];
2. B ist eine nichtleere Menge von $S5\times K_{lin}$-artigen Partitionsstrukturen der Gestalt $\langle <, A\rangle$, wobei < randlos und dicht ist;
3. β ist eine Interpretationsfunktion, die jeder *atomaren* Formel für jedes e aus W genau einen Wert aus {1,0} zuweist;
4. V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Paar $\langle t_b(e), s_b(e)\rangle$ (mit e aus W, b aus B) genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei gilt:

(0) $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle) = 1$ gdw α eine atomare Formel ist und $\beta(\alpha, e)=1$;
(i) $V(\sim\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=0$;
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$;
(iii) $V(\mathsf{E}\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $t_b(e') = t_b(e)$ und $s_b(e)\ A_b\ s_b(e')$ gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e')\rangle)=1$;
(iv) $V(\mathsf{G}\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e) <_b t_b(e')$gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e')\rangle)=1$;

---

2 Zur Erinnerung: Für eine $S5\times K_{lin}$-artige Partitionierung galt, dass die event-Menge durch sie vollständig einerseits in S5-Achsen, andererseits in K_{lin}-Achsen portioniert wurde, und zwar so, dass jedes event Schnittpunkt genau einer S5-Achse und einer K_{lin}-Achse war. Achsen wiederum waren maximale Mengen von durch eine Äquivalenzrelation R_1 zu S5-Achsen bzw. durch eine asymmetrische, transitive und schwach lineare Relation R_2 zu K_{lin}-Achsen geordnete Mengen von events.

3 Die Funktions-Notation ergibt sich auf die folgende Art (mit „F(...)“ als „Feld von...“, und „ı“ als „dasjenige“:
(1) $t_b(e) = \imath t\,[e \in t \,\&\, t \in F(<) \,\&\, b = \langle <, A\rangle]$;
(2) $s_b(e) = \imath s\,[s \in t \,\&\, s \in F(A) \,\&\, b = \langle <, A\rangle]$.
Wer Bedenken mit der Kombination von Quantifikation und Index hat, kann einfach „$t_b(e)$“ als Notationsvariante für einen zweistelligen Funktionsausdruck „t(b,e)“ lesen und „$s_b(e)$“ ebenso als Notationsvariante für einen zweistelligen Funktionsausdruck „s(b,e)“.

(v) $V(\mathsf{H}\alpha, \langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e') <_b t_b(e)$gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e')\rangle)=1$;

(vi) $V(\times\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$ gdw für alle b' aus B gilt: $V(\alpha,\langle t_{b'}(e), s_{b'}(e)\rangle)=1$.

Die Allgemeingültigkeit ist definiert wie üblich.

Es ist wichtig, zu beachten, dass die Zeitoperatoren (anders als die kausalen Operatoren im Stile Priors) keinerlei spatiale Komponente beinhalten. „Pp“ heißt „Es war *hier* (im Sinne des aktuellen Bezugssystems) der Fall, dass“ und eben gerade *nicht* „Es war *irgendwo* (wenn auch im Lichtkegel) der Fall, dass“. Entsprechendes gilt für „F“. „Sp“ heißt: „Es ist (im Sinne des aktuellen Bezugssystems) jetzt irgendwo der Fall, dass p“. Dabei greift der Operator ins Raumartige aus und ist keinesfalls nur auf den Lichtkegel beschränkt

2.2.3 Eigenschaften von $^{\text{Proto}}$Rel

Was lässt sich über die Eigenschaften von $^{\text{Proto}}$Rel auf Anhieb sagen?

- Bei „E“ und „S“ handelt es sich um ein S5-Operatorenpaar.
- Bei „G“/“F“ und „H“/“P“ handelt es sich um K_{lin}-Operatorenpaare.
- Bei „×“/„+“ handelt es sich um ein S5-Operatorenpaar.

Innerhalb jedes Bezugssystems sind ja die S5-Achsen, also die Zeitpunkte, linear geordnet, ferner war Randlosigkeit und Dichte gefordert. Und über ein bestimmtes Bezugssystem hinaus geht man nur durch den „×“-Operator.

Für „×“ wurde dabei gar nicht extra eine Zugänglichkeitsrelation spezifiert, sondern die universelle Relation für alle Bezugssysteme angenommen, die nicht explizit erwähnt werden musste. Das ist plausibel. Denn in folgendem Sinn sind alle Bezugssysteme an jedem event untereinander zugänglich: Man kann die Beschreibung einer Situation unter einem Bezugssystem b in eine Beschreibung unter ebendiesem Bezugssystem umrechnen, indem man gar nichts tut; und sicher soll, was für alle Bezugssysteme gilt, auch für das gerade verwendete gelten (Reflexivität). Man kann, anstatt von b nach b' und dann von b' nach b“ umzurechnen, auch gleich von b nach b“ umrechnen (Transitivität). Und wenn man eine b-Beschreibung in eine b'-Beschreibung umrechnen kann, so auch umgekehrt (Symmetrie).

Dass sich die Eigenschaften der Zeit- und der Ortsoperatoren übertragen, wird besonders deutlich, wenn man als Grenzfall ein Modell betrachtet, dessen Bezugssystem-Menge nur ein einziges Element enthält. Für solche Modelle werden die Operatoren „×“ und „+“ trivialisiert und damit redundant: Jede Formel, in der sie auftauchen, hat denselben Wahrheitswert wie die entsprechende Formel, in der sie gelöscht sind. Für solche Fälle geht $^{\text{Proto}}$Rel in $S5\times K_{lin}$ über. Diesen Fall als Grenzfall zu erlauben (und nicht etwa als Bezugssystem-Menge die Menge *aller möglichen* S5-K_{lin}-artigen Partitionen auf der event-Menge zu verlangen), ist ganz natürlich: Auch für S5 als Möglichkeitslogik lässt man Ein-Welten-Modelle zu, bei denen S5 in PC übergeht, ebenso bei S5 als Ortslogik Ein-Ort-Modelle, bei K_{lin} Ein-Zeitpunkt-

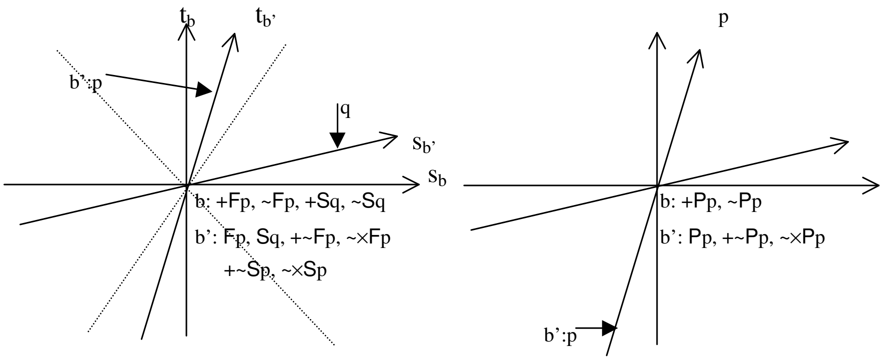
Modelle; ferner kann man natürlich sowohl $S5 \times K_{lin}$-Modelle mit einem Ort angeben, die in K_{lin} übergehen, als auch solche mit einer Zeit, die in S5 übergehen. Legen diese eher unphilosophischen Tatsachen schon aus Gründen der Einheitlichkeit sehr nahe, Ein-Bezugssystem-Modelle von ^{Proto}Rel zuzulassen, so lässt sich dies auch philosophisch gut motivieren: So sieht man nämlich, wie die klassische Raumzeitlogik (im durchaus hegelschen Sinn) in der relativistischen *aufgehoben* ist. Die klassische Raumzeitlogik erscheint, vom höheren Standpunkt der relativistischen Raumzeitlogik aus betrachtet, als eine Logik, der von vielen möglichen Koordinatensystemen nur eines auffiel, das sie deshalb als absolut setzte.

Der Grenzfall des Ein-Bezugssystem-Modells macht deutlich, dass auch im schlimmsten Fall die typischen Interaktionsaxiome einer Produktlogik zwischen den Orts- und den Zeitoperatoren nicht außer Kraft gesetzt werden, also die (com) und (chr)-Gesetze jedenfalls für *diese* Operatoren gelten. Denn diese gelten ja in $S5 \times K_{lin}$, in das ^{Proto}Rel im *schlimmsten* Fall übergeht, immer noch, ja sogar typischerweise. Durch die Einführung von „×" werden sie auch bei Modellen mit mehr als einem Bezugssystem nicht außer Kraft gesetzt. Das ist klar, wenn man solche Modelle als übereinandergelegte Stapel von unterschiedlich partitionierten $S5 \times K_{lin}$-Modellen visualisiert, die zufällig alle dieselbe Interpretationsfunktion haben. Auf demselben Blatt eines solchen Stapels sind ja die Verhältnisse gerade wie zuvor. Bei einer solchen Visualisierung wirkt der „+"-Operator wie eine Art Leiter von einem event auf einem Blatt aus zu demselben event auf einem anderen Blatt. Weit eingängiger noch ist es allerdings, ihn für die intendierten Modelle als eine Art *Schalthebel* zu betrachten, mit dem man von einer Neigung der Koordinatenachsen zueinander auf eine andere Neigung umschaltet.

2.2.4 Vorläufige Überlegungen zur Axiomatisierung von ^{Proto}Rel

Will man ^{Proto}Rel korrekt und leistungsfähig axiomatisieren, so kann man nach dem Gesagten davon ausgehen, dass für die Zeitoperatoren die K_{lin}-Axiome (mit Dichte und beidseitiger Randlosigkeit), sowohl für die Orts- als auch für die Bezugssystem-Operatoren die S5-Axiome in Ordnung sind und die (com)- und (chr)-Gesetze zwischen Orts- und Zeitoperatoren gelten, ferner als Herleitungsregeln noch Subst, MP und NEC-Regeln für alle starken Modaloperatoren, also auch für „×" **[B1]**. Mit einem solchen Herleitungsspiel lassen sich bereits eine Fülle von Formeln herleiten, die noch nicht S5- oder $S5 \times K_{lin}$-herleitbar sind, weil es in S5 mit „×" als starkem Modaloperator keine Zeit- und Ortsoperatoren, in $S5xK_{lin}$ aber kein „×" gibt. Ein solches Herleitungsspiel ist aber unvollständig.

Ein vollständiges Herleitungsspiel dürfte nämlich keine Substitutionsregel enthalten. Die Situation ist ähnlich wie in LF für „$p \rightarrow Np$". In *diesem* Fall ist das Problem: „$p \rightarrow \times p$" (mit „p" als Satzbuchstabe!) ist ^{Proto}Rel-allgemeingültig **[B2]**. Wäre „$p \rightarrow \times p$" herleitbar, so wäre mit der Substitutionsregel auch „$Fp \rightarrow \times Fp$", „$Pq \rightarrow \times Pq$" und „$Sr \rightarrow \times Sr$" herleitbar. Dies kann aber nicht sein, da die drei letztgenannten Formeln nicht allgemeingültig sind, das skizzierte Herleitungsspiel jedoch immerhin korrekt ist. Die Gegenbeispiele zeigen bereits, dass Minkowski-Raumzeiten als intendierte Modelle durch $^{\text{Proto}}$Rel darstellbar sind. „p“ und „q“ sind dabei *nur* dort wahr, wo angegeben.



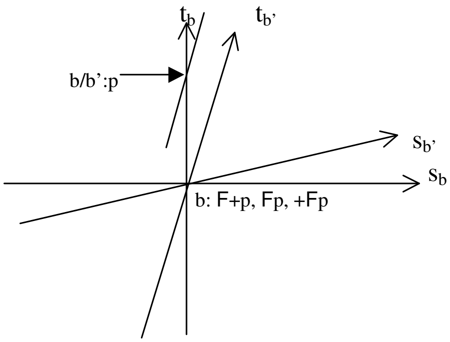
Festhalten lässt sich: $^{\text{Proto}}$Rel ist *mehr* als eine Fusion seiner Komponenten. In $^{\text{Proto}}$Rel fordert man über die bloße Fusion von S5 mit „×“ und $S5{\times}K_{lin}$ hinaus nämlich, dass man, wenn man von einem event e aus mit „+“ das Kooordinatensystem umschaltet, im anderen Koordinatensystem auch wieder *an e* herauskommt. Man schließt also Modelle mit Sprüngen von event zu event aus.

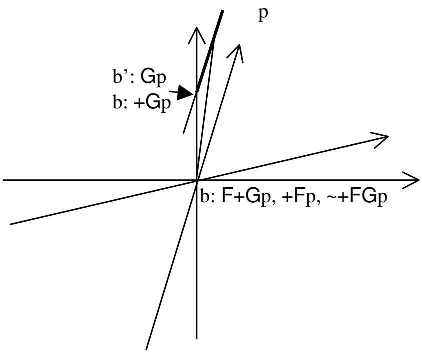
Hat man möglicherweise unter der Hand ein Produkt der Komponenten definiert? Auch dies ist nicht der Fall. Denn weder vertauschen die Orts- oder Zeitoperatoren allgemein mit den Bezugssystem-Operatoren, noch gelten allgemein die (chr)-Axiome. Es gelten also *nicht* allgemein:

(com)	$\ulcorner F{+}\alpha \rightarrow {+}F\alpha \urcorner$	$\ulcorner P{+}\alpha \rightarrow {+}P\alpha \urcorner$	$\ulcorner S{+}\alpha \rightarrow {+}S\alpha \urcorner$
	$\ulcorner {+}F\alpha \rightarrow F{+}\alpha \urcorner$	$\ulcorner {+}P\alpha \rightarrow P{+}\alpha \urcorner$	$\ulcorner {+}S\alpha \rightarrow S{+}\alpha \urcorner$
(chr)	$\ulcorner {+}G\alpha \rightarrow G{+}\alpha \urcorner$	$\ulcorner {+}H\alpha \rightarrow H{+}\alpha \urcorner$	$\ulcorner {+}E\alpha \rightarrow E{+}\alpha \urcorner$

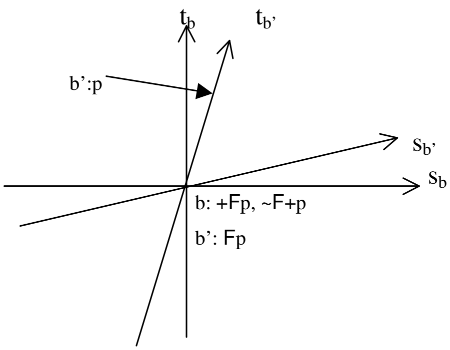
Die Gegenbeispiele geben einen ersten anschaulichen Eindruck davon, wie nicht nur $^{\text{Proto}}$Rel, sondern auch die darauf aufbauenden Sprachen funktionieren. Sie sind immer anhand von *intendierten* Modellen angegeben und zeigen daher, dass die Geltung der genannten Schemata im Sinne einer Produktlogik auch gar nicht wünschenswert wäre. Dabei sind wieder atomare Formeln jeweils *nur* dort wahr, wo angegeben.

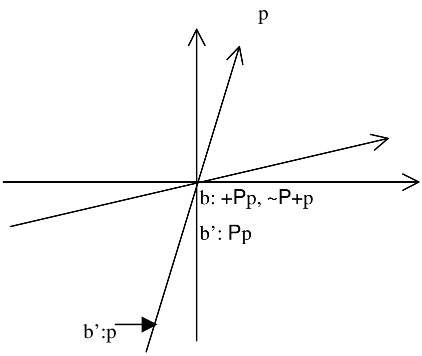
„$F{+}p \rightarrow {+}Fp$“ ist zwar (mit “p” als Satzbuchstaben!) allgemeingültig: Kann man in der Zukunft auf ein anderes Koordinatensystem umschalten, so dass gerade dann, wenn man umschaltet, ein „p“-event erreicht ist, so gibt es auch ein System, nämlich das, von dem man ausgeht, so dass in ihm in der Zukunft (und ohne, dass man den Ort zu ändern braucht) ein „p“-event erreicht wird. Aber schon die Einsetzungsinstanz „$F{+}Gp \rightarrow {+}FGp$“ ist nicht mehr allgemeingültig: Kann man in der Zukunft so auf b’ umschalten, dass am dann erreichten Ort im Sinne von b' in Zukunft nur noch „p" wahr ist (linke Abbildung), so wird man bei sofortigem Umschalten der Achsenneigung (rechte Abbildung) zwar *einmal* auf die „p"-Linie treffen; aber man wird den Rest der „p"-Linie immer verfehlen.





Mit nach unten gespiegelten Diagrammen erhält man dieselbe Diagnose für „P+p → +Pp" und „P+(Hp) → +P(Hp)". „+Fp → F+p" (und entsprechend „+Pp → P+p") werden sogar schon für Satzbuchstaben falsifiziert, da man durch jedes spätere Umschalten unweigerlich am „p"-event vorbeizielt:[4]





Ebenso wird „+Sp → S+p" für Satzbuchstaben falsifiziert **[B3]**. Man bemerke, dass mit den (com)-Gesetzen für die schwachen Operatoren auch die äquivalenten Formeln mit starken Operatoren, also ⌜G×α → ×Gα⌝ etc. scheitern. Die (chr)-Gesetze werden ohne weiteres bereits für Satzbuchstaben falsifiziert **[B4]**. Äquivalent zu den oben angegebenen (chr)-Formeln sind außerdem ⌜F×α → ×Fα⌝, ⌜P×α → ×Pα⌝ und ⌜S×α → ×Sα⌝, so dass auch diese durch die Gegenbeispiele falsifiziert werden.

---

[4] Man beachte, dass durch das Umschalten *sofort* das „p"-event erreicht werden müsste. Man kann freilich etwas warten, die Achsenneigung stärker ändern, wieder warten und wird auf das „p"-event stoßen. Doch das verifiziert dann „+Fp → F+Fp" und nicht etwa „+Fp → F+p"

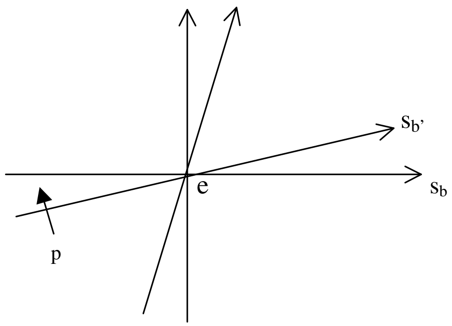
Heißt das, dass ^{Proto}Rel nicht vollständig axiomatisiert werden kann? Nein. Mein Eindruck ist vielmehr: Man kann sogar optimistisch sein, dass eine Axiomatik vollständig ist, die genau in folgender Weise vom gerade skizzierten Herleitungsspiel abweicht:

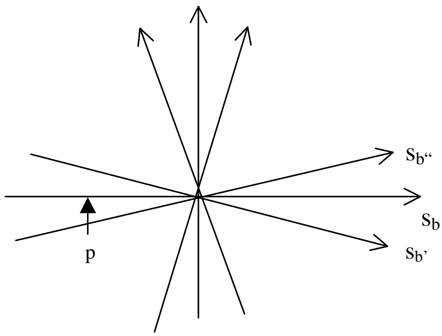
- $\ulcorner\alpha \rightarrow \times\alpha\urcorner$ ist Axiom, wenn α eine atomare Formel ist.
- Die Substitutionsregel ist ersetzt durch eine Anpassung der LC-Regel von Reynolds.[5]

Es lässt sich plausibel vermuten, wie die Anpassung genau aussehen müsste **[B5]**. Der Optimismus gründet sich auf erste Untersuchungen von zwischen Fusion und Produkt angesiedelten multidimensionalen Logiken, in denen die (com)- und (chr)-Gesetze nicht gelten, durch Kurucz und Zakharyaschev **[B6]**.[6]

2.2.5 Vorteile und Nachteile von ^{Proto}Rel

Dass für *ein* Bezugssystem in der Vergangenheit, was für ein *anderes* in der Zukunft liegt, lässt sich mit ^{Proto}Rel einfach darstellen. Einfach lässt sich das Beispiel auch zu einem Fall verschärfen, in dem das Ereignis für *ein* System in der Vergangenheit liegt, für eins gleichzeitig ist und für eins in der Zukunft liegt:





An e für b: SPp bzw. (wegen (com)) PSp	An e für b: Sp
An e für b': SFp bzw. FSp	An e für b': SFp bzw. FSp
	An e für b': SPp bzw. PSp
An e für jedes System: +FSp $\wedge$ +SPp	An e für jedes System: +FSp $\wedge$ +p $\wedge$ +SPp

Es ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Zeit- und Ortsoperatoren keine Rolle spielt, da für diese innerhalb eines Bezugssystems ja die (com)-Gesetze aus $S5\times K_{lin}$ gelten. Ferner ist zu beachten, dass es ein Rolle spielt, dass es sich um ein entferntes

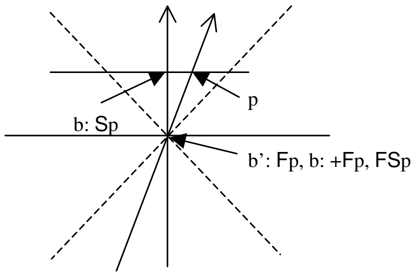
[5] Vgl. Kap. II 1.7.

[6] Agi Kurucz / Michael Zakharyaschev: „A Note on Relativized Products of Modal Logics“ in: Pierre Balbiani et al. (Hrsg.): Advances in Modal Logic 4, London: King’s College Publications 2003, S.221-242. Zugänglich unter http://www.aiml.net/volumes/volume4.

Ereignis, und zwar im Raumartigen zu e, handelt, in das die Ortsoperatoren hier verweisen. Die Formel „+Fp ∧ +p ∧ +Pp“ ließe sich hingegen in intendierten Modellen nicht verifizieren, wenn „p“ überhaupt nur an einem event wahr ist. Ebensowenig könnte, wenn „p“ nur einmal wahr ist, „+Fp ∧ +Pp“ in intendierten Modellen wahr sein. Denn jedes mögliche Hier, von dem man sich ohne „S“ nicht entfernen kann, liegt im Lichtkegel. Und für die Lichtkegel ist die zeitliche Ordnung in jedem Bezugsystem dieselbe. Nur kann es auch dann sein, dass „p“ für b’ zum selben Ort gehört wie e, für b aber nicht, so dass für b an e gilt:

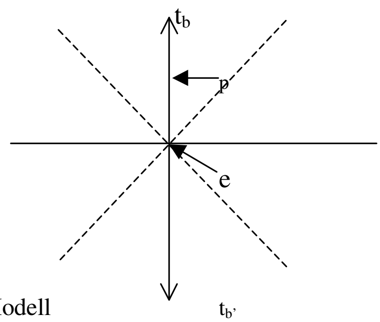
+Fp ∧ ~ Fp ∧ FSp

Es gibt ein System, für das es hier (d.h.: am selben Ort wie das Hier-und-Jetzt) der Fall sein wird, dass p; für das aktuelle System wird es aber nicht hier der Fall sein, dass p, sondern es wird anderswo der Fall sein.



Ganz allgemein kann erfreulicherweise kein Zweifel daran bestehen, dass gilt: Alle intuitiv intendierten Modelle für Minkowski-Raumzeiten sind als ^{Proto}Rel-Modelle darstellbar. Denn offensichtlich sind die Minkowski-Diagramme auch alle als Diagramme von ^{Proto}Rel-Modellen interpretierbar.

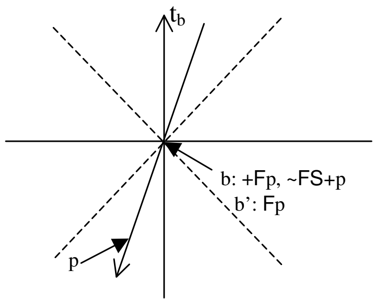
Es kann allerdings keine Rede davon sein, dass auch das Umgekehrte gilt: Nicht jedem ^{Proto}Rel-Modell entspricht ein Minkowski-Diagramm. Vielmehr gibt es eine solche Fülle von ^{Proto}Rel-Modellen, bei denen das nicht der Fall ist, dass eine Verfeinerung von ^{Proto}Rel geboten ist. So kann es z.B. vorkommen, dass sich zwei Bezugssysteme derselben ^{Proto}Rel-Struktur ganz gleichen, außer dass in dem einen die Zeit genau umgekehrt verläuft wie in dem anderen.



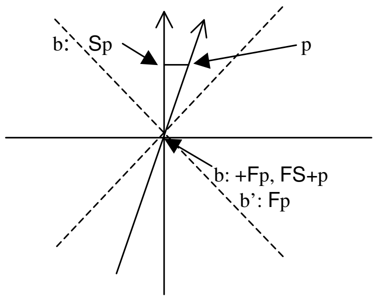
nicht-intendiertes ^{Proto}Rel-Modell

An e für b: Fp, für b’: Pp bei nur einmaligem Vorkommen von „p“.

Und es kann auch geschehen, dass die Formel „+Fp ∧ ~FS(+)p“[7] wahr wird:



Denn was hier für b’ in der kausalen Zukunft von e liegt, liegt für b in der kausalen Vergangenheit von e. Normalerweise sollte man aber erwarten, dass, was an einem b’-Ort durch e, also innerhalb des Lichtkegels von e, in der b’-Zukunft von e geschieht, auch in der b-Zukunft von e geschieht – wenn auch nicht an einem Ort durch e, sondern, von b aus gesehen, etwas „daneben“:



Dies sind noch vergleichsweise regelmäßige und daher beschreibbare Fälle. Aber nichtsdestotrotz sind sie als Modelle für eine Minkowski-Raumzeit ganz unmöglich, da innerhalb des Lichtkegels die zeitliche Reihenfolge für jedes System dieselbe sein muss. Das sollte Motivation genug sein, $^{\text{Proto}}$Rel-Strukturen um Lichtkegel zu erweitern. Denn diese sind es, die die Bedingungen dafür bilden, was überhaupt ein brauchbares Koordinatensystem ist.

[7] Zur Bedeutung des zweiten „+“ vgl. unten Abschnitt III 2.3.2.

2.3 Die Sprache Rel

2.3.1 Lichtkegel-Strukturen und Koordinatensysteme

2.3.1.1 Lichtkegel-Strukturen

Jedes event hat seinen Vergangenheits- und Zukunftslichtkegel unabhängig von menschlichem Zutun. Lichtkegel sind Teil der physikalischen Realität, die es zu berücksichtigen gilt. Es bietet sich daher an, Koordinatensysteme nicht einfach auf einer Menge von events einzuführen, sondern auf einer Menge von events mit ihnen zugeordneten Lichtkegeln. In diesem Sinne soll eine **Lichtkegel-Struktur** ein geordnetes Paar aus einer event-Menge W und einer **Funktion Δ** sein, die jedem Element aus W genau einen Lichtkegel zuordnet, bei dem es sich wiederum um eine Teilmenge gerade von W handelt. Es genügt dabei, jedem event einen *Vergangenheits*lichtkegel zuzuordnen. Den *Zukunfts*lichtkegel eines events e kann man einfach als die Menge aller events definieren, in deren Vergangenheitslichtkegel e liegt. Die Relationen „liegt im VLK von" und „liegt im ZLK von" sind dann trivialerweise konverse Relationen. Daraus ergibt sich eine definierte Funktion, die jedem event seinen Zukunftslichtkegel zuweist, und die als „∇" notiert sei:

(Def. ∇) $\nabla(e) = \{e' \mid e \in \Delta(e')\}$

Ferner sei, aus reiner Bequemlichkeit für folgende Formulierungen, angenommen, dass ein event immer zu seinem eigenen Vergangenheitslichtkegel gehört. Wer es seltsam findet, dass ein event zu seiner eigenen kausalen Vergangenheit gehört, wird sagen, dass die Δ-Funktion einem event eben seinen Vergangenheitslichtkegel *und* es selbst zuordnet. Es wird freilich praktisch sein, oft auch über Δ(e) *ohne* Einschluss von e zu sprechen. Dies sei als „$\Delta^{-}(e)$" notiert. Entsprechendes gilt für ∇(e).[8] Dies sei als „$\nabla^{-}(e)$" notiert. Die Vereinigung von Vergangenheitslichtkegel und Zukunftslichtkegel von e (incl. e), also schlicht der ganze Lichtkegel von e, soll als „$\rangle\langle(e)$ notiert werden:

(Def. $\Delta^{-}(e)$) $\Delta^{-}(e) = \Delta(e) \setminus e$
(Def. $\nabla^{-}(e)$) $\nabla^{-}(e) = \nabla(e) \setminus e$
(Def. $\rangle\langle(e)$) $\rangle\langle(e) = \Delta(e) \cup \nabla(e)$

Man kann sich nun überlegen, welche besonderen einschränkenden Bedingungen für die Δ-Funktion gelten sollen. Es bieten sich dabei folgende einfache Kandidaten an (Aussagen über den Zukunftslichtkegel sind dabei indirekt wiederum solche über viele Vergangenheitskegel). Allquantoren sind, wo selbstverständlich, unterdrückt:

---

[8] Es gilt dann auch $e \in \nabla(e)$, wenn die ∇-Funktion als Konverse der Δ-Funktion ist und die Δ-Funktion reflexiv ist.

(Δ1)	$e \in \Delta(e)$	Reflexivität
(Δ2)	$e = e'$ gdw $\Delta(e) = \Delta(e')$	Identifizierbarkeit
(Δ3)	$e \in \Delta(e')\ \&\ e' \in \Delta(e'') \Rightarrow e \in \Delta(e'')$	Transitivität
(Δ4)	$\Delta^{-}(e) \neq \varnothing$	Δ-Erstreckung
(Δ5)	$\nabla^{-}(e) \neq \varnothing$	∇-Erstreckung
(Δ6)	$e \in \Delta^{-}(e') \Rightarrow \exists e''\ [e'' \in \Delta^{-}(e')\ \&\ e \in \Delta^{-}(e'')]$	Δ-Dichte
(Δ7)	$\Delta(e) \cap \Delta(e') \neq \varnothing$	Konvergenz für Δ
(Δ8)	$\nabla(e) \cap \nabla(e') \neq \varnothing$	Konvergenz für ∇.

Nicht alle diese Kandidaten sind gleich fundamental.

(Δ1) bis (Δ3) sind basal. (Δ1) vermeldet einfach eine getroffene Entscheidung und ist nicht inhaltlich bedeutsam. (Δ2) stellt fest, dass die Δ-Funktion nie zwei verschiedenen events zwei gleiche Vergangenheitslichtkegel zuordnet, so dass events geradezu über ihre VLKs identifizierbar sind. (Δ3) postuliert die Transitivität von „liegt im VLK von", ohne die man sicher nicht darauf käme, hier von Licht*kegeln* zu sprechen. Denn erst die Transitivitätsforderung bringt eine gewisse Ordnung in die Δ-Werte von events. Sie sorgt, bildlich gesprochen, dafür, dass nicht von event zu event die Elemente des Δ-Werts völlig willkürlich gestreut sein können. Es lassen sich sofort einige sehr einfache Folgerungen festhalten:

1. Aus (Δ2) folgt (mit Kontraposition in beiden Richtungen):
   Wenn $e \neq e'$, dann $\Delta(e) \neq \Delta(e')$.
   Wenn $\Delta(e) \neq \Delta(e')$, dann $e \neq e'$.
   Wenn $e \in \Delta(e')\ \&\ e \notin \Delta(e'')$, dann $\Delta(e') \neq \Delta(e'')$.
2. Aus (Δ3) folgen sofort auch die folgenden Transitivitätsaussagen:
   (a) Wenn $e \in \nabla(e')$ und $e' \in \nabla(e'')$, dann $e \in \nabla(e'')$.
   (b) Wenn $e \in \Delta^{-}(e')$ und $e' \in \Delta^{-}(e'')$, dann $e \in \Delta^{-}(e'')$.
   (c) Wenn $e \in \nabla^{-}(e')$ und $e' \in \nabla^{-}(e'')$, dann $e \in \nabla^{-}(e'')$.
3. Aus (Def. $\Delta^{-}(e)$) folgt, dass für jedes e gilt: $e \notin \Delta^{-}(e)$; aus (Def. $\Delta^{-}(e)$) folgt, dass für jedes e gilt: $e \notin \nabla^{-}(e)$ (Irreflexivität). Damit folgen, zusammen mit den Transitivitätsaussagen (b) und (c), die folgenden Asymmetrie-Aussagen:[9]
   (a) Wenn $e \in \Delta^{-}(e')$, dann $e' \notin \Delta^{-}(e)$
   (b) Wenn $e \in \nabla^{-}(e')$, dann $e' \notin \nabla^{-}(e)$.

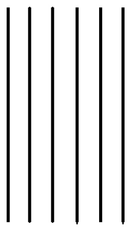
Die Bedingungen (Δ1) bis (Δ3) können erfüllt sein, ohne dass (Δ4), (Δ5) oder (Δ6) erfüllt sind. Während (Δ6) sehr realistisch ist und nicht weiter der Motivation bedarf, sind (Δ4) und (Δ5) ziemlich starke und diskussionswürdige Forderungen. Soll ein event nicht informational völlig isoliert sein, so muss sicher *eine* der beiden Bedingungen erfüllt sein: Entweder der Vergangenheits- oder der Zukunftslichtkegel

[9] Wenn gilt „Wenn aRb & bRc, dann aRc" (Transitivität), so mit Einsetzung a=c: „Wenn aRb & bRa, dann aRa". Nun gilt aber ~aRa (Irreflexivität), also gilt auch nicht: aRb & bRa, also impliziert „aRb" „nicht: bRa".

sollte noch mindestens ein anderes event enthalten. Doch es fragt sich, ob beide Bedingungen zugleich erfüllt sein müssen. Enthält die event-Menge W nämlich ein event e als ein Anfangs-event (evtl. im Sinne des „Urknalls“), so ist dieses geradezu dadurch charakterisiert, dass zwar $\nabla(e)$ ganz sicher nichtleer ist, weil gilt: $\nabla(e) = W$ („Alles ist in der kausalen Zukunft des Urknalls“). Doch e hat keine weiteren events mehr „hinter sich“, es gilt: $\Delta(e) = \{e\}$und $\Delta^{-}(e) \neq \emptyset$. Umgekehrtes würde für ein End-event gelten. Fordert man (Δ4) oder (Δ5), so bezieht man also eventuelle Anfangs- oder End-events einfach nicht in die Betrachtung mit ein, sondern schließt sie *aus W* aus. Das heißt jedoch nicht, dass man ihre *Existenz* damit ausschließt.[10] Vielmehr hat es wieder formulierungstechnische Gründe, Anfangs- und End-events außen vor zu lassen, wie gleich bei der Beschreibung der *constraints* für ein Koordinatensystem deutlich werden wird.

Die Bedingungen (Δ7) und (Δ8) fordern, dass sich zwei beliebige Vergangenheitslichtkegel irgendwann überschnitten haben bzw. sich zwei beliebige Zukunftslichtkegel irgendwann überschneiden. Dies sind die von Prior her bekannten Konvergenzforderungen, die in *seinem* Ansatz die kausalen Operatoren zu S4.2-Operatoren machen.[11] Wichtig ist, sich klarzumachen, dass beide unabhängig voneinander sind. Es ist theoretisch denkbar, dass sich Lichtkegel, die sich nie überschnitten haben, zusammenfinden, oder dass, obwohl sogar alle Vergangenheitslichtkegel irgendwo zusammenhängen, sich Zukunftslichtkegel auseinanderentwickeln. Den zweiten Fall diskutiert Prior als realistischen Fall der AR. Schon dadurch wird klar, wie wenig basal diese Forderungen sind.

Ein interessanter Grenzfall, der zwar nicht realistisch ist, aber dennoch eine Art physikalische Interpretation zulässt, ist der folgende: Kein Lichtkegel eines events überschneidet sich je mit einem Lichtkegel eines raumartig zu ihm liegenden events. In diesem Fall entkommt kein Signal jemals von dem Ort, an dem es ausgesandt wird, die allgemeine Signalübertragungsgeschwindigkeit ist 0. Alle Lichtkegel sind bloß Linien, keiner geht in die Breite, und das Universum ist komplett „verinselt“. Man mag sich das (ganz abgesehen von der physikalischen Realisierbarkeit) als Nebeneinander von lauter Schwarzen Löchern vorstellen.



Es ist interessant, zu sehen, wie viel in einem solchen Modell noch gilt. Und schon deshalb sollte man mit den Forderungen (Δ7) und (Δ8) nicht zu schnell bei der Hand sein.

[10] Man erinnere sich daran, dass Randlosigkeit nicht unendliche Ausdehnung der Zeit und des Raums impliziert.
[11] Vgl. Kap. III 1.2.2.1.

Eine Lichtkegel-Struktur, die nur die Bedingungen (Δ1) - (Δ3) erfüllt, soll eine **minimale**, eine, die die Bedingungen (Δ1) - (Δ6) erfüllt, eine **normale** und eine, die die Bedingungen (Δ1) - (Δ8) erfüllt, eine **spezielle Lichtkegel-Struktur** heißen.

2.3.1.2 Koordinatensysteme auf Lichtkegel-Strukturen

Ein Koordinatensystem, so hatten schon die Überlegungen in Teil II ergeben, entsteht durch das Zusammenspiel zweier Partitionen der event-Menge, nämlich einer in Momentanräume (Zeitpunkte) und einer in Orte (Ortsgeschichten). Nun sollte man ein solches Partitionenpaar, damit es wirklich *Orte* und *Zeiten* ergibt, nicht einfach beliebig auf einer event-Menge ohne Berücksichtigung der Lichtkegel definieren, sondern auf einer Lichtkegel-Struktur. Dabei lassen sich zunächst Orte und Zeiten charakterisieren, um erst später die Zeitrichtung, also die Reihenfolge der Momentanräume für ein Koordinatensystem einzuführen. Es bietet sich dazu an, auf einer gegebenen Lichtkegel-Struktur $\langle W,\Delta\rangle$ zwei weitere Funktionen einzuführen:

- eine t-Funktion, die *jedem* event eine Teilmenge von W zuweist, deren Elemente als die mit ihm gleichzeitigen events zu deuten sind, die mit ihm zusammen einen Momentanraum bilden;
- eine s-Funktion, die *jedem* event eine Teilmenge von W zuweist, deren Elemente als die mit ihm gleichortigen events zu deuten sind, die mit ihm zusammen einen Ort (eine Ortsgeschichte) bilden.

Die Bedingungen, die t- und s-Funktion erfüllen müssen, um ein vernünftigen raumzeitliches Koordinatensystem zu ergeben, sind – vielleicht bis auf die letzte – denkbar einfach. Sie lauten:

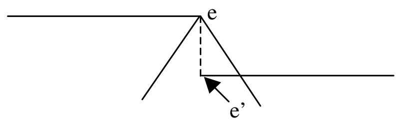
(t1) $t(e) \neq t(e') \Rightarrow t(e) \cap t(e') = \varnothing$	t-Disjunktheit
(t2) $t(e) \cap \rangle\langle(e) = \{e\}$	t-Bereich
(s1) $s(e) \neq s(e') \Rightarrow s(e) \cap s(e') = \varnothing$	s-Disjunktheit
(s2) $s(e) \subseteq \rangle\langle(\quad e)$	s-Bereich
(s3) $e \in s(e)$	s-Reflexivität
(s/t1) $\forall e, e'[\, t(e) \cap s(e') \neq \varnothing]$	Gitter-Bedingung
(s/t2) $\forall e, e', e''\, [\, e \in \Delta^{-}(e') \Rightarrow t(e) \cap s(e'') \subseteq \Delta^{-}(\, t(e') \cap s(e''))\,]$	Phalanx-Bedingung

(t1) besagt, dass zwei verschiedene, also in irgendeinem event voneinander abweichende Zeitpunkte kein einziges event gemeinsam haben. (s1) besagt, dass zwei verschiedene Orte kein einziges event gemeinsam haben.

(s1) zu formulieren, ist interessanterweise nur möglich, wenn man Anfangs- oder End-events nicht berücksichtigt. Denn wenn es eine typische Eigenschaft eines Anfangs-events ist, ganz W im Zukunftslichtkegel zu haben, so wird man einem solchen event *jeden* Ort zuordnen müssen („Der Urknall war überall"). Keinem im Koordinatensystem berücksichtigten event kann aber nach dem Gesagten mehr als ein

Ort zugeordnet werden. Denn unterscheidet sich ein Ort in *einem* event, so in allen, und das Anfangs-event kann nicht in zwei Orten enthalten sein, die sich ansonsten irgendwo unterscheiden.

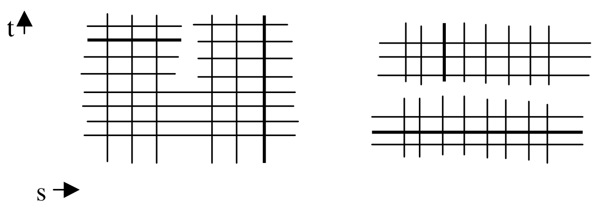
(t2) und (s2)/(s3) sind die zentralen Bedingungen, die überhaupt Orte von Zeiten unterscheiden. (t2) besagt, dass sich der Lichtkegel von e und der Zeitpunkt von e (in einem Koordinatensystem) nur in e überschneiden. Daraus folgt zweierlei: (1) e muss sowohl im Lichtkegel von e *als auch* in t(e) enthalten sein (t-Reflexivität); sonst wäre e nicht im Schnitt von beidem zu finden. Also gilt: e gehört selbst zu t(e). (2) Der einem event e zugeordnete Momentanraum (Zeitpunkt) enthält kein weiteres Ereignis außer e aus dessen Vergangenheits- oder Zukunftslichtkegel. Denn sonst müsste dieses in einem im Sinne von (t2) gebildeten Schnitt zu finden sein. Hat der Lichtkegel die übliche Form, so sind dadurch offensichtliche Verletzungen der „Scheibigkeit“ eines Zeitpunkts wie die Abbruchkante im folgenden Bild bereits ausgeschlossen.[12]



Denn hier liegt e’ nicht im Raumartigen, sondern im Vergangenheitslichtkegel von e.

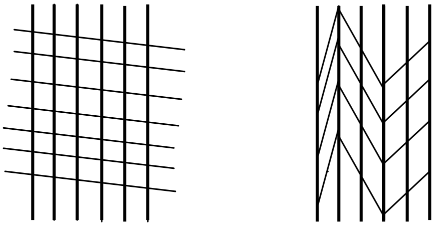
(s2) besagt, dass der Ort eines events eine Teilmenge seines Lichtkegels sein muss (im Fall des extrem isolierten Modells ist er mit ihm identisch, in der Regel handelt es sich aber um eine echte Teilmenge). (s3) besagt, dass e immer selbst zum Ort von e gehört, was aus (s2) noch nicht folgt. Kein event, das (im Sinne eines bestimmten Koordinatensystems) am gleichen Ort stattfindet wie e, darf sich demnach im Raumartigen zu e befinden: Orte sind Orts*geschichten.* Ein Ort zieht sich, von einem beliebigen seiner Elemente aus betrachtet, nur durch dessen Zeitartiges.

Die Gitter-Bedingung besagt, dass die Zeit jedes events sich mit dem Ort jedes (anderen) events schneidet. Bildlich gesprochen sorgt die Gitter-Bedingung z.B. dafür, dass eine Ortsgeschichte nicht einfach aufhören kann und anschließend daran eine andere anfängt, oder aber, dass ein Zeitpunkt mitten im Raum aufhört und sich ein anderer anschließt. Denn das würde zu den im Diagramm zwischen den fetten Linien deutlichen leeren Schnitten führen, die (s/t1) verbietet.



[12] Der Vorschlag für diesen Ausdruck stammt von Bertram Kienzle. Die Scheibigkeit ist rein topologisch charakterisiert. Zum metrischen Analogon vgl. die „Stetigkeitsforderung“ für die Zuweisung von Abständen bei Gauss’schen Koordinaten bei Einstein, „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie“, §25, und Sklar, „Space, Time and Spacetime“, S.31ff.

Sogenannte „trousers worlds“[13] wie links auf der Abbildung sind also mit der Bedingung (s/t1) nicht kompatibel. *Es ist aber auch gar nicht gesagt, dass jedes Auseinanderdriften von Lichtkegeln im Sinne von Priors AR-Gegenbeispiel zu den S4.2-Axiomen automatisch zu einer solchen Situation führt.* Vielmehr ist ein Koordinatensystem im hier definierten Sinn, wenn auch unter Berücksichtigung der Lichtkegel-Struktur eingeführt, von diesem doch unabhängiger als man zunächst denken mag. Schließlich war als Grenzfall eine total verinselte Lichtkegel-Struktur zugelassen (vgl. Kap. III 2.3.1.1). Auch auf der kann man Koordinatensysteme definieren. Nur hat man für die Orte keine Wahl (sie fallen mit den Lichtkegeln zusammen). Für die zeitlichen Koordination sind dagegen der Willkür keine Grenzen gesetzt.[14]



Aus den Bedingungen (t1) bis (t2), (s1) bis (s3) und (s/t1) ergeben sich einfache, aber z.T. schon recht interessante Folgerungen:
1. Aus (t1) und (t2) bzw. aus (s1) und (s3) folgt, dass die t-Funktion bzw. die s-Funktion die event-Menge W tatsächlich *partitioniert*.**[B7]**

2. Es gilt (neben der Reflexivität aus (t2) und (s3)):
$e \in t(e') \Rightarrow e' \in t(e)$ $\quad$ $e \in s(e') \Rightarrow e' \in t(e)$ $\quad$ Symmetrie **[B8]**
$e \in t(e')$ & $e' \in t(e'') \Rightarrow e \in t(e'')$ $\quad$ $e \in s(e')$ & $e' \in s(e'') \Rightarrow e \in s(e'')$ Transitivität **[B9]**

3. Aus (s2)/(s3) und (t2) folgt, dass sich der Ort und der Zeitpunkt eines events e genau in e überschneiden. Denn e ist das einzige event aus dem Lichtkegel von e, das auch zum Momentanraum von e gehören kann. Es gilt also für jedes e: $t(e) \cap s(e) = \{e\}$.

4. (s2) und (t2) erzwingen, dass es sich bei den t- und s-Werten von events in der zweidimensionalen Darstellung tatsächlich um *Linien* handeln muss, während die Partitionseigenschaft allein auch Streifen einer gewissen Breite zugelassen hätte, die sich in mehr als einem event schneiden. **[B10]**

5. (s/t1) allein lässt es zwar noch als denkbar erscheinen, dass die Schnittmenge mehr als ein event enthält. Das lässt sich im Zusammenspiel mit den anderen Bedingungen

[13] Sklar, „Space, Time and Spacetime“ (1974), S.306f. Vgl. Kap. I 2.3.3.2.
[14] Man entscheidet manchmal pragmatisch, welche Koordination sinnvoll ist. Vgl. d'Inverno, "Introducing Einstein's Relativity", Kap. 16.5 und 16.6: Statt so genannter Schwarzschild-Koordinaten werden als Zeit-Koordinaten für die Beschreibung eines Schwarzen Lochs deshalb die so genannten Eddington-Finkelstein-Koordinaten verwendet, weil man sie in das Schwarze Loch hineinlegen kann.

aber widerlegen. Es gilt also, wie es sich beim Schnitt von Linien in der Darstellung gehört **[B11]**:

Für jedes e, e' gibt es (genau) ein e", so dass gilt: $t(e) \cap s(e') = \{e''\}$.

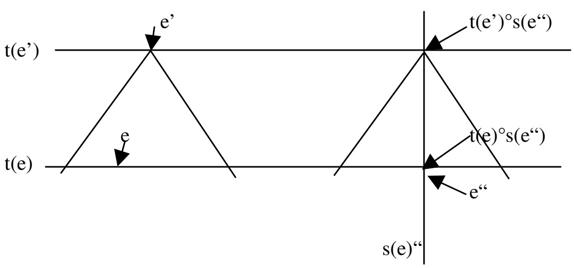
Dieses Ergebnis hat den großen praktischen Nutzen, dass man ein event eindeutig als Inhalt der Schnittmenge eines Orts und einer Zeit beschreiben kann, und dass, was (s/t1) sicherstellt, jeder solchen Beschreibung ein event entspricht. Die Bedingungen (s/t1) und (s/t2) lassen sich also jetzt, nach Einführung einer weiteren Abkürzung auch alternativ notieren wie folgt:

(Def. °) Sei $M \cap M' = \{x\}$. $M°M' := \iota x\,(M \cap M' = \{x\})$
„M°M' ist das einzige Element von M∩M'"

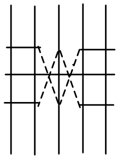
(s/t1') $\exists e''\ [t(e)°s(e') = e'']$
„Jeder Zeitpunkt und jeder Ort hat ein event gemeinsam"

(s/t2) $e \in \Delta^{-}(e') \Rightarrow t(e)°s(e'') \in \Delta^{-}(\,t(e')°s(e'')\,)$.
„Wenn e im echten VLK von e' liegt, dann liegt dasjenige event, das der Zeitpunkt von e mit dem Ort von e" gemeinsam hat, auch im echten VLK desjenigen events, das der Zeitpunkt von e' mit diesem Ort gemeinsam hat."

(s/t2) ist zweifellos die vergleichsweise komplizierteste Bedingung. Man mag sie, wenn man es weniger martialisch will, statt Phalanx-Bedingung auch Flutsaum- oder Wellenfront-Bedingung nennen, und es hat mit ihr folgendes auf sich. Zwei beliebige events, e und e', besitzen jeweils ihre t-Werte, t(e) und t(e'), die als Zeitpunkte gedeutet werden sollen. Zu einem weiteren beliebigen event e" (es mag mit e oder e' identisch sein oder nicht, zu t(e) oder t(e') gehören oder auch nicht) gibt es einen Ort s(e"). Es gibt daher nach (s/t1) ein event, das als Schnittpunkt von t(e) mit s(e") und eines, das als Schnittpunkt von t(e') mit s(e") identifizierbar ist: t(e)°s(e") und t(e')° s(e"). Da sie s(e") gemeinsam haben, ist klar, dass diese events zeitartig zueinander liegen, aber es ist nicht klar, in welcher Reihenfolge. Angenommen nun, e liege im echten Vergangenheitslichtkegel von e'. So besagt die Phalanx-Bedingung, dass auch t(e)°s(e") im echten Vergangenheitslichtkegel von t(e')°s(e") liegen muss. Die Situation könnte so aussehen:



Das schließt z.B. aus, dass zwei Zeitpunkte zwei isolierte events einfach gegeneinander austauschen können, wie es sonst etwa *im völlig verinselten Grenzfall*[15] in folgender Weise geschehen könnte:



Es ist vielmehr durch diese Bedingung sichergestellt, dass Zeitpunkte auf geordnete Weise aufeinander folgen, so dass die Zeit in wohlgeordneter Weise „vorrückt". *Das hat nichts mit der Natur der Welt zu tun, sondern schlicht damit, was wir einen Zeitpunkt zu nennen bereit sind.* Kurz: *Die raumweite Einheit der Zeitrichtung ist hausgemacht.*

2.3.1.3 Lokales und globales Früher und Später für ein Koordinatensystem

Es lassen sich für ein gegebenes Koordinatensystem b auf einer Lichtkegel-Struktur $\langle W,\Delta\rangle$ zwei Relationen $\prec_b$ und $<_b$ sowie deren Konversen $\succ_b$ und $>_b$ definieren wie folgt:

(Def. $\prec_b$) $e \prec_b e'$ gdw $e \in s_b(e')$ & $e \in \Delta^-(e')$
(Def. $\succ_b$) $e \succ_b e'$ gdw $e' \prec_b e$
(Def. $<_b$) $t_b(e) <_b t_b(e')$ gdw $\forall e'',e'''[e'' \in t_b(e)$ & $e''' \in t_b(e')$ & $e''' \in s_b(e'') \Rightarrow e'' \prec_b e''']$
(Def. $>_b$) $t_b(e) >_b t_b(e')$ gdw $t_b(e') <_b t_b(e)$.

Dabei handelt es sich um Bezugssystem-relative Relationen, die sich intuitiv als „früher als für b" und „später als für b" lesen lassen, die aber trotz ihrer Relativität aufs Bezugssystem auch durch den Bezug auf den Lichtkegel geerdet sind. Allerdings unterscheiden sich $\prec_b$ und $<_b$ schon in der Art ihrer Relate: für die erste Relation sind es events, für die zweite Zeitpunkte. Tatsächlich ist $\prec_b$ eine auf einen Ort von b beschränkte, lokale Früher/Später-Relation, $<_b$ aber eine raumweite, globale. Die globale Früher/Später-Relation hängt dabei auf natürliche Weise von der lokalen ab: Ein Zeitpunkt ist im Sinne von $<_b$ früher als ein anderer, wenn alle seine events im Sinne von $\prec_b$ früher sind als alle gleichortigen events des anderen Zeitpunkts.

Es lässt sich von der lokalen Relation $\prec_b$ sehr leicht folgendes festhalten: Schon auf einer minimalen Lichtkegel-Struktur ist $\prec_b$ (a) asymmetrisch und (b) transitiv, damit auch (c) irreflexiv, aber (d) nicht linear. Dasselbe gilt damit auch für $\succ_b$ als ihre Konverse **[B12]**.[16]

---

[15] Man beachte, dass in diesem Fall die oben angestellte Überlegung zum Ausschluss der „Abbruchkante" im Zusammenhang mit (t2) nichts nützt.
[16] Vgl. Kap. I 1, B15, B19, B20.

Dies ergibt ebenfalls sehr leicht, dass auch $<_b$ auf einer minimalen Lichtkegel-Struktur (a) asymmetrisch und (b) transitiv, damit auch (c) irreflexiv ist und obendrein (d) linear. Dasselbe gilt damit auch für $>_b$ als ihre Konverse **[B13]**.[17] Weiter lässt sich zeigen, dass auf *normalen* Lichtkegel-Strukturen außerdem noch sowohl $\prec_b$ als auch $<_b$ (e) dicht und (f) randlos sind und dass dasselbe für die Konversen gilt **[B14]**.

Ein Koordinatensystem lässt sich nach diesen Ergebnissen offensichtlich angemessen charakterisieren als geordnetes Paar aus einer t- und einer s-Funktion, das den Bedingungen (t1), (t2), (s1) - (s3), (t/s1) und (t/s2) genügt.

2.3.2 Rel-Modelle

2.3.2.1 Allgemeines

Das Alphabet und die Formregeln der Sprache Rel unterscheiden sich nicht von $^{\text{Proto}}$Rel. Auch die Definitionen der Bewertungs- und der Interpretationsfunktion bleiben gleich. Der einzige Unterschied zwischen $^{\text{Proto}}$Rel und Rel besteht in der Definition der Struktur zu Beginn der Modelldefinition. Sie lautet:

Ein **Rel-Modell** ist ein Quintupel $\langle W, \Delta, B, \beta, V\rangle$, so dass gilt:
1. W ist eine nichtleere Menge [von events];
2. Δ ist eine Funktion, so dass gilt: $\langle W, \Delta\rangle$ ist eine normale Lichtkegel-Struktur;
3. B ist eine nichtleere Menge von Koordinatensystemen auf $\langle W, \Delta\rangle$;
4. β ist eine Interpretationsfunktion wie in $^{\text{Proto}}$Rel;
5. V ist eine Bewertungsfunktion, wie für $^{\text{Proto}}$Rel definiert.

Die Grundidee ist, dass viele Koordinatensysteme, also geordnete Paare aus s- und t-Funktion, die Bedingung erfüllen können, Koordinatensysteme auf derselben Lichtkegel-Struktur zu sein, und dass dabei alle gleich gut sind.

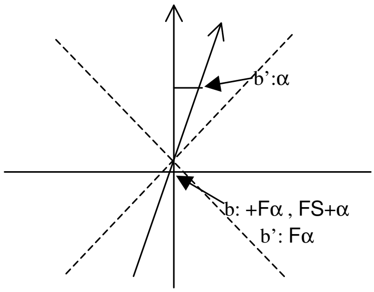
Zunächst lässt sich festhalten: Zu jedem Rel-Modell M gibt es ein $^{\text{Proto}}$Rel M', das dieselben Formeln wahr macht wie M **[B15]**. Deshalb sind alle $^{\text{Proto}}$Rel-allgemeingültigen Formeln auch Rel-allgemeingültig; Rel ist also eine konservative Erweiterung von $^{\text{Proto}}$Rel. Außerdem widerlegen die angegebenen Gegenbeispiele zu den (com)- und (chr)-Gesetzen mit Bezugssystem-Operatoren auch deren Rel-Allgemeingültigkeit. Denn die Zeichnungen lassen sich allesamt auch als Darstellungen von Rel-Modellen interpretieren.

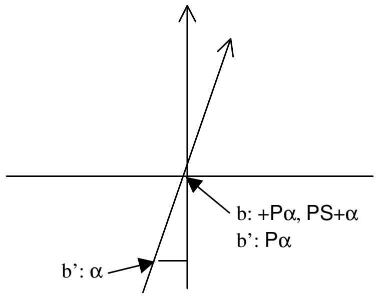
Es fragt sich nun, ob es Rel-allgemeingültige Formeln gibt, die nicht $^{\text{Proto}}$Rel-allgemeingültig sind und daher Rel gegenüber $^{\text{Proto}}$Rel abgrenzen. In der Tat gibt es solche Formeln. Es sind gerade die erwünschten charakteristischen Formeln für die Einheit der Zeitrichtung. Es lassen sich nämlich, um Rel korrekt und leistungsfähig zu

[17] Vgl. ebd.

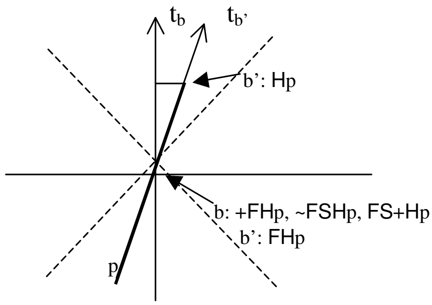
axiomatisieren, der vorgeschlagenen Axiomatik für ^{Proto}Rel die folgenden Schemata hinzufügen:

$\ulcorner$+Fα → FS+α$\urcorner$ $\ulcorner$+Pα → PS+α$\urcorner$.





Damit erhält man vermutlich noch keine vollständige Axiomatik. Es soll auch nicht behauptet werden, dass diese Schemata alles einfangen, was sich über die Beziehung von Bezugssystem- zu Zeit- und Ortsoperatoren für Rel sagen lässt. Doch sie liefern eine Abgrenzung und sind intuitiv ausgesprochen eingängig, wenn man das zunächst etwas überraschende zweite „+“ verstanden hat. Betrachten wir dazu die Einsetzungsinstanz mit „Hp“ für α, also „+FHp → FS+Hp”, und zwar im Gegensatz zur Formel „+FHp → FSHp”, in der das zweite „+“ fehlt. Man bemerkt schnell, dass die zweite im Gegensatz zur ersten Formel unplausibel ist:



Aus b mit senkrechten Orten ist nie die komplette „p“-Linie als Ort einzufangen. Schaltet man dagegen mit „+“ wieder auf die Achsenneigung von b' um, ist dies gesichert.

Es lässt sich zeigen, dass $\ulcorner$+Fα → FS+α$\urcorner$ und $\ulcorner$+Pα → PS+α$\urcorner$ in der Tat Rel-allgemeingültig sind. Sie sollen im Folgenden einfach **die typischen Rel-Schemata** genannt werden **[B16]**. Es ist bei beiden Schemata entscheidend, dass α, wenn das Antezedens wahr ist, *innerhalb* des Lichtkegels des Bewertungs-events wahr ist. Die Schemata $\ulcorner$+FSα → FS+α$\urcorner$ (und, ganz entsprechend) $\ulcorner$+PSα → PS+α$\urcorner$ sind dagegen nicht Rel-allgemeingültig, obwohl sie nur *ein* scheinbar harmloses „S“ mehr enthalten. Doch dieses „S“ kann gerade aus dem Lichtkegel hinausführen. Ähnliches gilt für die Umkehrungen $\ulcorner$+FSα → FS+α$\urcorner$ und $\ulcorner$+PSα → PS+α$\urcorner$ und die durch (com) damit äquivalenten Schemata $\ulcorner$+SFα → FS+α$\urcorner$, $\ulcorner$+SPα → PS+α$\urcorner$ und ihre Umkehrungen. Aus demselben Grund sind auch die Umkehrungen der typischen Rel-Schemata selbst nicht allgemeingültig **[B17]**. Ein Überschreiten des Lichtkegels im Sinne der *Einsetzung* „+FSp → FS+Sp“ ist dagegen unproblematisch.

Auch wenn die typischen Rel-Schemata ein wenig unregelmäßig (nur eine Implikationsrichtung, keine Vertauscher) und spezialisiert aussehen, so erlauben sie doch interessante Herleitungen, wenn man sie als Axiome dem vorgeschlagenen Herleitungsspiel für $^{\text{Proto}}$Rel hinzufügt. So sind die folgenden Formeln in diesem Sinne Rel-herleitbar **[B18]**:

(1)	+Fp → SF+p	(4)	+F+p → ×FS+p
(2)	S+Fp → SF+p	(5)	Fp → ×FS+p
(3)	+Fp → ×FS+p		

Besonders (5) ist eine starke und recht eingängige Behauptung für die Art und Weise, wie in Rel-Modellen die Zeitrichtung einheitlich ist: Wenn etwas im Sinne des aktuellen Bezugssystems hier der Fall sein wird, so gilt für *jedes* Bezugssystem, dass es im Sinne auch dieses Bezugssystems irgendwo der Fall sein *wird*, dass das Besagte in einem (nämlich im aktuellen) Bezugssystem der Fall ist.

Zum Abschluss verdient eine weitere Gruppe von interessanten Rel-allgemeingültigen Schemata Erwähnung. Die folgenden Schemata sind Rel-allgemeingültig, ihre Konversen aber jeweils nicht:

⌜P ×S α → ×S Pα⌝ ⌜F ×S α → ×S Fα⌝
⌜P +E α → +E Pα⌝ ⌜F +E α → +E Fα⌝ **[B19]**.

Dies beschert rein technisch gesehen wenigstens eine fragmentarische Reminiszenz an Produktgesetze, in denen Zeit-, Orts- und Bezugssystem-Operatoren zusammen vorkommen. Es stehen sich nämlich „×S“ und „+E“ wie starker und schwacher Modaloperator gegenüber („~×S ~“ = „~ × ~ ~ S ~“ = „+E“). Insofern kann man die erste Zeile als (chr)-Schemata deuten, in denen „×S“ der starke, der Box entsprechende Operator ist, und die zweite Zeile als dazu gehörende (com)-Schemata (freilich ohne die üblichen Konversen).

Darüber hinaus ist aber besonders das erste der Schemata und das Scheitern seiner Konversen intuitiv sehr eingängig und philosophisch höchst aufschlussreich: Die Formel

P ×S p → ×S P p

ist als (chr)-Formel ganz in Ordnung. Sie erinnert als (chr)-Formel semantisch gesehen unmittelbar an die prädikatenlogisch allgemeingültige Formel

$$\exists y\ \forall x\ [Rxy] \rightarrow \forall y\ \exists x\ [Rxy].$$

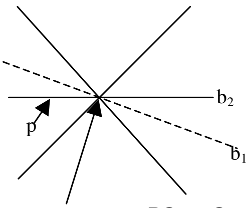
Die Formel

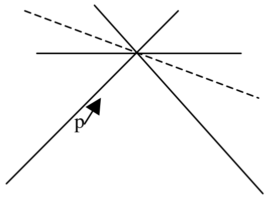
×S P p → P ×S p

hingegen ist alles andere als in Ordnung. Nicht von ungefähr erinnert sie an den berüchtigten prädikatenlogisch *nicht* allgemeingültigen „Quantorendreher“, die so genannte „quantifier shift fallacy“:

$$\forall x\, \exists y\, [Rxy] \rightarrow \exists y\, \forall x\, [Rxy].$$

Tatsächlich kann man beim Gegenbeispiel zu „×S P p → P ×S p“ einen Quantorendreher geradezu *sehen*:





„vorher“: e_1: für b_1 schon: PSp, ~Sp (nicht mehr!)
für b_2 noch: Sp, ~PSp (noch nicht!)

„nachher“: e_2: für b_1/b_2 SPp, ×SPp, ~P×Sp

Philosophisch aufschlussreich ist dieses Gegenbeispiel, weil sich dazu die folgende Deutung anbietet:

> Ein einmaliges, punktuelles Ereignis e’ befindet sich zwar gerade dann im Vergangenheitslichtkegel von e, wenn es für jedes Bezugssystem irgendwo in der Vergangenheit angesiedelt ist. Doch wenn e’ für *alle* Bezugssysteme in der Vergangenheit liegt, so heißt das noch lange nicht, dass es ein Bezugssystem b und *ein* event e“ in der b-Vergangenheit von e gibt, so dass e“ mit e’ in *jedem* Bezugssystem gleichzeitig war. Kurz: Dass ein Ereignis für alle Bezugssysteme in der (kausalen) Vergangenheit liegt, heißt nicht, dass es jemals in der Vergangenheit *eine* Gelegenheit gab, zu der es für jedes Bezugssystem Gegenwart war. Es heißt nur, dass es für jedes Bezugssystem eine Gelegenheit gab, zu der es Gegenwart war – und zwar für jedes Bezugssystem eine andere. Irgendwann sind sich die Benutzer verschiedener Bezugssysteme einig, dass das Ereignis stattgefunden *hat* – aber sie werden sich nie einigen, *wann* es es stattgefunden hat, d.h.: *womit* es gleichzeitig war.

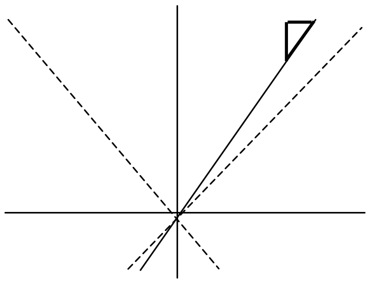
Dass dieser etwas knifflige Punkt sich in einer Rel-Formel überhaupt ganz übersichtlich hinschreiben lässt und sich als dem prädikatenlogischen Quantorendreher verwandt herausstellt, ist ein schöner Beleg für die Expressivität von Rel. Allerdings setzt die vorgeschlagene Deutung eine bestimmte Interpretation der Funktionsweise der Zeitoperatoren in der relativistischen Raumzeitlogik voraus, die nicht selbstverständlich ist. Ob sie plausibel ist, wird in Kap. III 3 noch zu diskutieren sein.

2.3.2.2 Randlosigkeit und Dichte in Rel-Modellen

Die zu erwartenden charakteristischen Schemata für Randlosigkeit und Dichte können problemlos übernommen werden. Es ließ sich bereits zeigen, dass auf *normalen* Lichtkegel-Strukturen[18] $<_b$ und $>_b$ randlos und dicht sind. Daraus ergibt sich ohne weiteres für Rel-Modelle, die ja per def. auf normalen Lichtkegel-Strukturen basieren, die Allgemeingültigkeit von[19]

$\ulcorner G\alpha \rightarrow F\alpha \urcorner, \ulcorner H\alpha \rightarrow P\alpha \urcorner$ (beidseitige Randlosigkeit)
$\ulcorner F\alpha \rightarrow FF\alpha \urcorner, \ulcorner P\alpha \rightarrow PP\alpha \urcorner$ (Dichte).

Interessant ist, dass die ersten beiden Schemata in gewisser Weise in Rel auch die Randlosigkeit des Raums postulieren, was bei intendierten, vollen SR-Modellen deutlich wird. Denn hier gibt es (in der Darstellung) Raumachsen mit bis zu beliebig an 45° angenäherte Neigung. Sind die Schemata allgemeingültig, so gelten sie für *jedes* Koordinatensystem. Ein event größerer zeitlicher Entfernung als ein gegebenes event auf der geneigten Achse ist aber ein event in größerer zeitlicher *und* räumlicher Entfernung im rechtwinklig dargestellten System.



Randlosigkeit muss dabei wiederum nicht unendliche *Ausdehnung* bedeuten.

2.3.2.3 Die Rietdijk-Eigenschaft

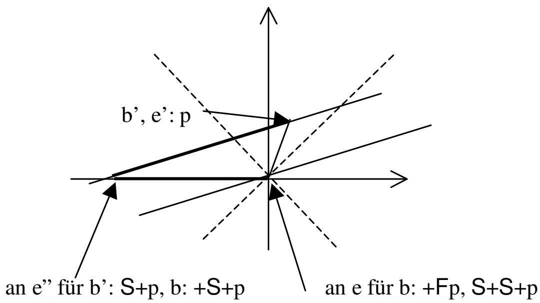
Ein philosophisch besonders interessantes Schema, das sich mit Orts- und Bezugssystem-Operatoren ausdrücken lässt, ist:

$\ulcorner +F\alpha \rightarrow S{+}S{+}\alpha \urcorner$.

Verblüffend daran ist, dass im Sukzedens ein Zeitoperator wie im Antezedens einfach nicht mehr auftaucht, ein zeitlicher Abstand geradezu umgangen wird. Das Schema

[18] also Lichtkegel-Strukturen, für die im Sinne der Bedingungen (Δ4) und (Δ5) eine Erstreckung der Lichtkegel in beiden Richtungen vorliegt und diese im Sinne der Bedingungen (Δ6) dicht liegen.
[19] Vgl. Kap. I 1.2.2.4.

besagt, dass man jedes zukünftige Ereignis im Lichtkegel durch Umschalten des Koordinatensystems an einem entfernten Ort gewissermaßen als gleichzeitig koordinieren kann. Es ist zwar schon deshalb nicht Rel-allgemeingültig, weil als Rel-Modelle auch Ein-Bezugssystem-Modelle möglich sind. Doch es ist zweifellos Rel-erfüllbar.



Die Erfüllbarkeit liegt dabei bereits bei Modellen mit zwei Bezugssystemen mit verschiedener Achsenneingung der s-Achse vor, und die Achsenneigung muss sich gar nicht dramatisch unterscheiden, sondern kann beliebig wenig abweichen, wenn im Modell nur genug „Platz zur Seite" da ist. Das wiederum ist nicht unbedingt in allen Rel-Modellen mit zwei Bezugssystemen der Fall **[B20]**. Dennoch ist das Schema offensichtlich für alle solchen Modelle nicht nur erfüllbar, sondern sogar allgemeingültig, die als realistische SR-Raumzeiten interpretiert werden können. Es fängt in gewisser Weise den (kleinen) wahren Kern eines berühmt-berüchtigten Arguments des ansonsten wenig bekannten Autoren Rietdijk aus dem Jahr 1966 ein.[20] Rietdijk argumentiert sinngemäß:

(1) Ist die SR wahr, so gibt es für jedes event im Zukunftslichtkegel, also die raumzeitliche Position von Beliebigem, was mir je zustoßen kann, *gleichzeitig* (für mein Bezugssystem) mit meinem Hier und Jetzt einen Ort s, so dass an s gilt: Es gibt ein Bezugssystem, so dass für dieses Bezugssystem das Geschehen an s *gleichzeitig* mit der besagten Position ist.
(2) Da die Relation „ist gleichzeitig mit" transitiv ist, ist in gewisser Weise die Position dessen, was mir je zustoßen kann, jetzt schon gegenwärtig.
(3) Wenn eine Position gegenwärtig ist, so muss, was an ihr der Fall sein kann, hier und jetzt schon feststehen.
(4) Also folgt aus der SR die Wahrheit des Determinismus.

Dieses Argument ist zu Recht von Howard Stein gescholten worden.[21] Schritt (1) ist insofern akzeptabel, als er dem fraglichen Schema entspricht. Schritt (3) mag in

[20] Rietdijk, "A rigorous proof of determinism derived from the special theory of relativity" (1966).
[21] Stein, „On Einstein-Minkowski Spacetime" (1968) und, nochmals, „On Relativity Theory and the Openness of the Future" (1991).

Zweifel gezogen werden, und das wird z.T. in Teil IV geschehen. Vor allem aber ist Schritt (2) außerordentlich befremdlich. Die Relation „ist gleichzeitig mit" ist ja in der SR gerade aufs Bezugssystem relativiert. Nun gilt zwar für *ein- und dasselbe* Bezugssystem b, dass wenn e zum selben b-Zeitpunkt (am selben oder einem anderen b-Ort) gehört wie e' und es sich mit e' und e" ebenso verhält, dies auch für e und e" gilt. Aber es gilt eben nicht, dass, wenn e zum selben b-Zeitpunkt gehört wie e' und e' zum selben b'-Zeitpunkt gehört wie e", e und e" zum selben b- oder auch b'-Zeitpunkt gehören. Gerade das sieht man am Beispiel Rietdijks gut. Man kann nun zwar eine Relation R definieren wie folgt:

e R e' gdw es ein Bezugssystem b gibt, so dass e gleichzeitig$_b$ ist mit e'

Aber bei dieser Relation kann von Transitivität keine Rede sein. Denn für die events der vorhergehenden Abbildung gilt zwar e R e" und e" R e', aber gerade nicht e R e". Diese Kritik lässt sich auch als Aussage über eine Rel-Formel auf den Punkt bringen:

„S+S+p $\rightarrow$ S+p" ist *nicht* Rel-allgemeingültig.

Dennoch weist das zur Diskussion stehende Schema zweifellos auf eine interessante Eigenschaft von für die SR realistischen Rel-Modellen hin. Insofern Rietdijk darauf indirekt aufmerksam gemacht hat, hat es, zusammen mit seiner „P"-Version, den Namen „Rietdijk-Schema" verdient. Den Rietdijk-Schemata entsprechen semantische Bedingungen, unter denen sie allgemeingültig werden **[B21]**. Rel-Modelle, die diese Bedingungen erfüllen, sollen **Rietdijk-Modelle** heißen. Interessant ist, dass man mit diesen Bedingungen die unendliche „Breite" eines Modells fordern und dies durch die Forderung der Rietdijk-Schemata auch objektsprachlich postulieren kann.

2.3.3 Die kausalen Operatoren als definierte Zeichen

2.3.3.1 Volle Modelle: die Sprache Rel^{pl}

In der Regel wird man an Modelle denken, in denen man so viele Koordinatensysteme zur Verfügung hat, dass sich *jedes* event im Zeitartigen eines gegebenen events als mit diesem gleichortig koordinieren lässt. Außerdem wird man davon ausgehen, dass auch das Raumartige auf verschiedenste Weise von Zeitpunkten verschiedener Bezugssysteme durchkreuzt werden kann. Man kann das so ausdrücken, dass es zu jedem Bezugssystem ein weiteres gibt, so dass sich die Zeiten des einen und des anderen gerade immer in einem einzigen Punkt schneiden.[22] Rel-Modelle, die diese Bedingungen erfüllen, sollen ***volle* Rel-Modelle** heißen.

[22] Dies schließt nicht aus, dass sich *manche* Bezugssysteme nur in der Ortskoordination unterscheiden. Im Falle der SR wird aber, stärker, gelten: Zwei beliebige Zeitpunkte zweier beliebiger verschiedener Bezugssysteme schneiden sich jeweils nur in einem event (ebenso zwei beliebige Orte).

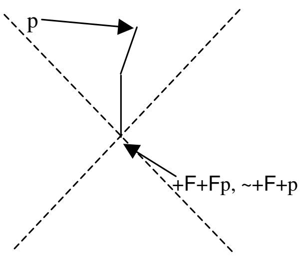
(Def. „volles Rel-Modell“) Sei $\langle W, \Delta, B, \beta, V\rangle$ ein Rel-Modell.
$\langle W, \Delta, B, \beta, V\rangle$ ist ein *volles* Rel-Modell genau dann, wenn gilt:
(1) Für alle e, e’ aus W gilt: Wenn $e \in \rangle\langle(e')$, dann gibt es ein b aus B, so dass gilt: $s_b(e) = s_b(e')$;
(2) Für jedes b aus B, e, e’ mit $e' \in t_b(e)$ gilt:
Es gibt ein b’ aus B und ein e“ aus W, so dass $\{e'\} = t_b(e) \cap t_{b'}(e'')$.

Beide Bedingungen sind voneinander unabhängig, werden aber bei der SR angemessenen Modellen zusammentreffen. Denn bei ihnen bedingt eine Änderung der Achsenneigung für die Orte auch immer eine Änderung der Achsenneigung für die Zeiten. Im besonderen Fall der SR heißt „volles Modell“ im wesentlichen, dass für jede mögliche Achsenneigung ein Koordinatensystem zur Verfügung steht. Aber die Definition des vollen Modells ist nicht auf Modelle beschränkt, die sich als SR-Modelle interpretieren lassen. Zunächst wird die erste Bedingung genügen, um eine Reihe von Ergebnissen zu erhalten. Die zweite Bedingung wird sich im nächsten Kapitel für die Möglichkeit von objektsprachlichen Positionsangaben als wichtig herausstellen.

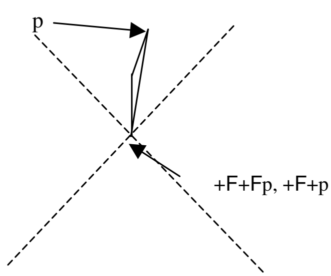
Die Sprache **Rel^{pl}** sei definiert wie Rel, nur dass zusätzlich zu den anderen Bedingungen noch gefordert ist, dass Rel^{pl}-Modelle *volle* Rel-Modelle sein müssen. Gibt es nun ein Schema, das nicht Rel-allgemeingültig, aber auf *vollen* Rel-Modellen allgemeingültig ist und so Rel von Rel^{pl} unterscheidet? Man muss nicht lange suchen:

$$\ulcorner +F+F\alpha \rightarrow +F+\alpha \urcorner$$

Instanzen dieses Schemas lassen sich auf nicht-vollen Modellen, z.B. auf einem Zwei-Bezugssystem-Modell falsifizieren, auf vollen Modellen dagegen nicht, weil auf jeden Fall ein Koordinatensystem zur Verfügung steht, um zwei beliebige zeitartige events direkt und ohne Umschalten als an *einem* Ort stattfindend zu verbinden **[B22]**:



Zwei Bezugssysteme-Modell

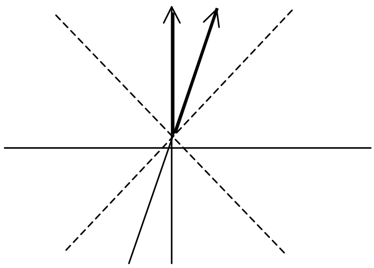


Volles Modell

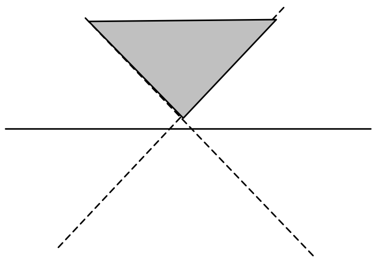
Mit der Allgemeingültigkeit von $\ulcorner +F+F\alpha \rightarrow +F+\alpha \urcorner$ geht die Allgemeingültigkeit von $\ulcorner +P+P\alpha \rightarrow +P+\alpha \urcorner$ einher **[B23]**. Beide Schemata können also, zur Unterscheidung von Rel, für ein korrektes und leistungsfähiges Herleitungsspiel für Rel^{pl} zur vorgeschlagenen Axiomatik für Rel hinzugefügt werden.

2.3.3.2 Kausale Operatoren: eine Annäherung

Volle Modelle haben den intuitiven Vorzug, dass die Operatoren-Kombinationen „+F“, „×G“, „+P“ und „×H“ eine substantielle Deutung erhalten. Man *kann* diese Kombinationen natürlich auch im Zusammenhang mit nicht-vollen Modellen verwenden. Doch auf einem Modell mit lediglich zwei Bezugssystemen wird z.B. „×Gp“ bereits wahr, wenn es nur zwei „p“-Linien gibt, in der gewohnten Darstellung eine senkrechte und eine schräge. In einem vollen Modell dagegen muss, damit dieselbe Formel wahr wird, genau jedes event im gesamten Vorwärtslichtkegel des Bewertungs-events ein „p“-event sein. Andererseits wird „+Fp“ bereits wahr, wenn irgendwo im Vorwärtslichtkegel ein „p“-event vorhanden ist: Während das im nicht-vollen Modell nur der Fall ist, wenn das „p“-event zufällig durch eine der zur Verfügung stehenden Achsen zu erreichen ist, ist bei vollen Modellen garantiert, dass für das „p“-event auch eine Achse zur Verfügung steht. Entsprechendes gilt für „+Pp“, „×Hp“ und den Vergangenheitslichtkegel.



Zwei Bezugssysteme-Modell: „×Gp“



Volles Modell: „×Gp“

Die Deutung der kombinierten Operatoren lautet somit *im großen und ganzen*:
+F : Es wird im ZLK der Fall sein, dass
×G: Es wird im ganzen ZLK der Fall sein, dass
+P: Es war im VLK der Fall, dass
×H: Es war im ganzen VLK der Fall, dass

Es liegt deshalb nahe, diese Kombinationen provisorisch ähnlich abzukürzen wie die Operatoren des Ansatzes von Prior und Goldblatt. Allerdings soll ein kleines Fragezeichen daran erinnern, dass eine völlige Analogie an dieser Stelle noch nicht als ausgemacht gelten kann:

„+F“ = „$F_{k?}$“ „×G“ = „$G_{k?}$“ „+P“ = „$P_{k?}$“ „×H“ = „$H_{k?}$“.

Tatsächlich wird sich (vielleicht etwas überraschend) herausstellen, dass an eine einfache Identifikation nicht zu denken ist und die genauen Analoga, die tatsächlich die uneingeschränkte Abkürzung „F_k“ etc. verdienen, noch einer kleinen Ergänzung bedürfen. Doch zunächst sieht es ganz gut aus.

(1) Es lässt sich bereits für $^{\text{Proto}}$Rel, und damit a fortiori für Rel und Rel$^{\text{pl}}$, bemerken:

(a) „$\mathsf{F}_{k?}$“ zu „$\mathsf{G}_{k?}$“ bzw. „$\mathsf{P}_{k?}$“ zu „$\mathsf{H}_{k?}$“ verhalten sich wie schwacher und starker Modaloperator zueinander.

(b) Für „$\mathsf{G}_{k?}$“ bzw. „$\mathsf{H}_{k?}$“ gilt das typische K-Schema:
$\ulcorner \mathsf{G}_{k?}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathsf{G}_{k?}\alpha \rightarrow \mathsf{G}_{k?}\beta)\urcorner$ $\ulcorner \mathsf{H}_{k?}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathsf{H}_{k?}\alpha \rightarrow \mathsf{H}_{k?}\beta)\urcorner$

(c) Es gilt: Ist α mit dem vorgeschlagenen Herleitungsspiel herleitbar, so auch $\mathsf{G}_{k?}\alpha$ und $\mathsf{H}_{k?}\alpha$.

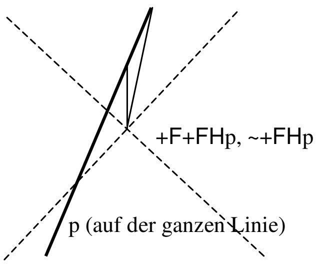
Kurz: Die besagten Operatoren-Kombinationen verhalten sich genau so wie die Grundoperatoren einer verdoppelten minimalen Modallogik K **[B24]**.

(2) Die folgenden Schemata sind zwar noch nicht $^{\text{Proto}}$Rel-allgemeingültig. Aber sie sind Rel-allgemeingültig:

$\ulcorner \mathsf{F}_{k?}\mathsf{H}_{k?}\alpha \rightarrow \mathsf{H}_{k?}\mathsf{F}_{k?}\alpha\urcorner$ $\ulcorner \mathsf{P}_{k?}\mathsf{G}_{k?}\alpha \rightarrow \mathsf{G}_{k?}\mathsf{P}_{k?}\alpha\urcorner$ **[B25]**.

Kurz: Die besagten Operatoren-Kombinationen verhalten sich wenigstens so wie die Grundoperatoren von K_t.

Doch es geht nicht so gut weiter: $\ulcorner +\mathsf{F}+\mathsf{F}\alpha \rightarrow +\mathsf{F}\alpha\urcorner$ ist *nicht* Rel$^{\text{pl}}$-allgemeingültig. Das ist überraschend. Denn die Relationen „liegt im ZLK von“ und „liegt im VLK von“ sind ja schon für Rel-Modelle allgemein transitiv und in vollen Modellen ist der ganze Kegel objektsprachlich ansprechbar. Es lässt sich folgendes Gegenbeispiel angeben:



Kurz: Man sollte das Zurückschalten (ins System mit der „p“-Achse) lieber nicht vergessen. Aus ganz analogen Gründen ist $\ulcorner +\mathsf{P}+\mathsf{P}\alpha \rightarrow +\mathsf{P}\alpha\urcorner$ nicht Rel$^{\text{pl}}$-allgemeingültig, ebensowenig, sind es die jeweils äquivalenten Schemata $\ulcorner +\mathsf{G}\alpha \rightarrow +\mathsf{G}+\mathsf{G}\alpha\urcorner$ und $\ulcorner +\mathsf{H}\alpha \rightarrow +\mathsf{H}+\mathsf{H}\alpha\urcorner$. Das zeigt, dass die betrachteten Operatoren-Kombinationen noch nicht die gesuchten kausalen Operatoren sein können. Denn in Priors $K_t^{\text{add(S4-}\square\text{1)}}$ mit seinen kausalen Operatoren *ist* $\ulcorner \mathsf{F}_k\mathsf{F}_k\alpha \rightarrow \mathsf{F}_k\alpha\urcorner$ allgemeingültig.[23]

[23] Wie ist das zu erklären? In Rel$^{\text{pl}}$ werden events nicht *simpliciter* angesprochen, sondern unter der Hinsicht eines Bezugssystems; und Formeln werden auf ein event *qua* Schnittpunkt eines Orts mit einem Zeitpunkt *eines Bezugssystems* bewertet. Im Ansatz von Prior und Goldblatt dagegen erfolgt die Bewertung von Formeln *simpliciter* auf events.

Trotzdem ist es bemerkenswert, wie stark das Verhalten der betrachteten Operatoren-Sequenzen für Rel^{pl} dem der kausalen Operatoren in Priors Ansatz entspricht: Abgesehen von einem einzigen „+“ induziert Rel^{pl} eine $K_t^{add(S4-\Box 1)}$-Axiomatik für sie. Dennoch ist die Situation etwas unbefriedigend. Denn wenn auch das an manchen Stellen erforderliche zusätzliche „+“ als Rückschalthebel semantisch bestens motiviert ist, so erinnert es doch auf unangenehme Weise an die Epizykel der späten Versionen der ptolemäischen Astronomie, die eingeführt werden mussten, um die errechneten Planetenbewegungen mit Mühe wieder einigermaßen den Beobachtungen anzupassen. Zum Glück muss es nicht dabei bleiben.

2.3.3.3 Kausale Operatoren: die Lösung

Schon das Antezedens des typischen Rel-Schemas kann einen auf den Gedanken bringen, dass dem kausalen Operator „F_k“ bei Prior und Goldblatt in Rel gar nicht „+F“ entspricht, sondern vielmehr „+F+“. Das Rückschalten würde dann systematisch, routinemäßig erfolgen und nicht mehr *ad hoc*. Diese Vermutung lässt sich bestätigen. Dafür sind die bisher für „+F“ etc. gewonnenen Ergebnisse nützlich.

Das starke Pendant zu „+F+“ ist die Operatoren-Kombination ist „×G×“, das starke Pendant zu „+P+“ ist „×H×“ **[B26]**. Es bietet sich also an, zu definieren:

„F_k“ $=_{def}$ „+F+“ „G_k“ $=_{def}$ „×G×“ „P_k“ $=_{def}$ „+P+“ „H_k“ $=_{def}$ „×H×“.

Es ist nun zu zeigen, dass diese Definitionen angemessen sind. Dafür lässt sich wie folgt argumentieren: Es gilt bereits auf der Ebene von ${}^{Proto}\mathrm{Rel}$ (und sogar schon für die vorangehende bloße Fusion):

(1) Für „×G×“ bzw. „×H×“ gilt das typische K-Schema:
$\ulcorner \times G\times (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\times G\times\, \alpha \rightarrow \times G\times\, \beta)\urcorner$ $\ulcorner \times H\times (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\times H\times\, \alpha \rightarrow \times H\times\, \beta)\urcorner$

(2) Ist α mit dem vorgeschlagenen Herleitungsspiel herleitbar, so auch $\times G\times\alpha$ und $\times H\times\alpha$ **[B27]**.

Es gelten ferner in Rel die typischen K_t-Axiome für die „k“-Operatoren:

$\ulcorner +F+\, \times H\times\, \alpha \rightarrow \times H\times\, +F+\, \alpha\urcorner$ bzw. $\ulcorner F_k\, H_k\, \alpha \rightarrow H_k\, F_k\, \alpha\urcorner$
$\ulcorner +P+\, \times G\times\, \alpha \rightarrow \times P\times\, +G+\, \alpha\urcorner$ bzw. $\ulcorner P_k\, G_k\, \alpha \rightarrow G_k\, P_k\, \alpha\urcorner$ **[B28]**.

Außerdem lassen sich die typischen Schemata für Randlosigkeit und Dichte für die kausalen Operatoren leicht mit dem vorgeschlagenen Herleitungsspiel beweisen **[B29]**:

$\ulcorner G_k\alpha \rightarrow F_k\alpha\urcorner$ $\ulcorner H_k\alpha \rightarrow P_k\alpha\urcorner$
$\ulcorner F_k\alpha \rightarrow F_kF_k\alpha\urcorner$ $\ulcorner P_k\alpha \rightarrow P_kP_k\alpha\urcorner$.

Schließlich lässt sich zeigen, dass auch das charakteristische S4-Axiom für die kausalen Operatoren in Rel^{pl} gilt:

$\ulcorner +F+\ +F+\ \alpha \rightarrow +F+\ \alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner F_k\ F_k\ \alpha \rightarrow F_k\ \alpha \urcorner$
$\ulcorner +P+\ +P+\ \alpha \rightarrow +P+\ \alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner P_k\ P_k\ \alpha \rightarrow P_k\ \alpha \urcorner$ **[B30]**.

Damit lässt sich festhalten: Die Semantik von Rel^{pl} induziert *bis auf* die Konvergenz-Forderungen (S4.2-Axiom) bereits eine komplette K_{Prior}-Axiomatik für die „k“-Operatoren.

2.3.3.4 Eine kleine Einschränkung: Die Ränder des Lichtkegels

Die s-Werte eines Koordinatensystems sind von Anfang an so eingeführt worden, dass sie als Orte gedeutet werden sollten; ja man wüsste nicht recht, wieso man beim Paar aus t- und s-Funktion überhaupt von einem *Koordinaten*system sprechen sollte, wenn dies nicht so wäre. Das impliziert im Prinzip noch keine Entscheidung dafür oder dagegen, ob der Δ-Wert eines events als die Ränder des Kegels enthaltend oder als sie ausschließend gedeutet werden soll: Zwar war verlangt, dass alle Orte durch e Teilmengen von $\rangle\langle(e)$ sein sollten. Doch das heißt noch nicht, dass die Vereinigung aller durch e möglichen Orte aller Bezugssysteme eines Modells wieder $\rangle\langle(e)$ ist. Es mag durchaus sein, dass eine Teilmenge von $\rangle\langle(e)$ prinzipiell übrig bleibt, dass also für alle n gilt: $\cup s_{bn}(e)$[24] $\setminus \rangle\langle(e) \neq \varnothing$ („Zieht man von der Menge der events aller möglichen Orte durch e den Lichtkegel von e ab, so bleibt ein Rest übrig“), und dass es sich bei diesem Rest genau um die Menge der zu e lichtartigen events handelt, die dann als in $\rangle\langle(e)$ enthalten angesehen werden.

Betrachtet man *volle* Rel-Strukturen, so ist diese Möglichkeit ausgeschlossen: Jedes event aus $\rangle\langle(e)$ soll ja als mit e gleichortig koordiniert werden können, so dass auf jeden Fall gilt: $\cup s_{bn}(e) = \rangle\langle(e)$ („die Menge aller events aller möglichen Orte durch e ist identisch mit dem Lichtkegel von e“). Das heißt wiederum nicht, dass obendrein gilt: $\cup t_{bn}(e) = W \setminus \rangle\langle^{-}(e)$ („alle events aller möglichen Zeitpunkte durch e füllen die event-Menge W abzüglich der echten Lichtkegel von e komplett aus“).[25] Vielmehr ist nur gefordert, dass jeder möglich Zeitpunkt durch e eine Teilmenge von $W \setminus \rangle\langle^{-}(e)$ ist. Doch es wird, da die zu e lichtartigen events in $W \setminus \rangle\langle^{-}(e)$ enthalten sind, nun für jedes n gelten: $W \setminus (\cup t_{bn}(e) \cup \rangle\langle(e)) \neq \varnothing$ („Zieht man von der event-Menge W alle events aller möglichen Orte durch e und den Lichtkegel von e ab, bleibt immer noch etwas übrig“).[26] Entsprechend ist bei Gebrauch der kausalen Operatoren in vollen Modellen das Wörtchen „kausal“ *cum grano salis* zu verstehen: Es kann ja auch durch Lichtsignal ein Einfluss ausgeübt werden. „$F_k p$“ wird aber auf vollen Modellen bereits nicht mehr wahr, wenn das einzige „p“-event lichtartig zum Bewertungs-event liegt. Wollte man die Zugänglichkeitsrelation für „G_k“ explizit formulieren, so käme man auf ein Analogon zu einer der Zugänglichkeitsrelationen bei Goldblatt, nämlich derjenigen irreflexiven Zugänglichkeitsrelation, welche die Ränder des Lichtkegels nicht mit einbezieht (III 1.2.2.2) .

---

[24] $\cup s_{bn}(e) = \{e' \in W \mid \exists b \in B\ [e' \in s_b(e)]\}$.
[25] $\rangle\langle^{-}(e) =^{def} \rangle\langle^{-}(e) \setminus e$.
[26] $\cup t_{bn}(e) = \{e' \in W \mid \exists b \in B\ [e' \in t_b(e)]\}$.

Macht sich diese Konsequenz der Deutung voller Modelle in wenigstens einem objektsprachlichen Theorem bemerkbar? Ja, wie eine Übertragung von Goldblatts interessanter Beobachtung zu den Kegelrändern zeigt. Es müssen dann nämlich die Goldblatt-Axiome allgemeingültig sein **[B31]**:

$$\ulcorner F_k\alpha \wedge F_k\beta \rightarrow F_k\,(F_k\alpha \wedge F_k\beta\urcorner \qquad\qquad \ulcorner P_k\alpha \wedge P_k\beta \rightarrow P_k\,(P_k\alpha \wedge P_k\beta\urcorner$$

Auch die Goldblatt-Axiome können so zur Unterscheidung von Rel^{pl} gegenüber Rel dienen und empfehlen sich damit für ein möglichst leistungsfähiges Herleitungsspiel für Rel^{pl}.

2.3.3.5 Die Linearität der Weltlinie

Es lässt sich nach der eingehenden Untersuchung der Operatoren-Kombinationen „+F+“ und „+P+“ als kausale Operatoren in Rel^{pl} abschließend feststellen:

Sei von einem Rel^{pl}-Modell die Rede. So gilt für beliebiges e, e', b:
(1) Wenn $V(\alpha, \langle t_b(e'), s_b(e')\rangle) = 1$ und $e' \in \Delta^{-}(e)$, dann $V(+P+\alpha, \langle t_b(e), s_b(e)\rangle) = 1$.
(2) Wenn $V(\alpha, \langle t_b(e'), s_b(e')\rangle) = 1$ und $e' \in \nabla^{-}(e)$, dann $V(+F+\alpha, \langle t_b(e), s_b(e)\rangle) = 1$.

Wenn für ein Bezugssystem und für ein event im Zukunftslichtkegel zum Bewertungs-event α wahr ist, ist also an diesem (und für dasselbe Bezugssystem) $\ulcorner +F+\alpha\urcorner$ bzw. $\ulcorner F_k\alpha\urcorner$ wahr. Und wenn für ein Bezugssystem und für ein event im Vergangenheitslichtkegel zum Bewertungs-event α wahr ist, ist also an diesem (und für dasselbe Bezugssystem) $\ulcorner +P+\alpha\urcorner$ bzw. $\ulcorner P_k\alpha\urcorner$ wahr **[B32]**. Das Umgekehrte gilt freilich nicht **[B33]**. Unmittelbar aus dem Festgestellten folgt unter den gleichen Bedingungen:

(3) Wenn $V(\alpha, \langle t_b(e'), s_b(e'), b\,\rangle) = 1$ und $e' \in \rangle\langle(e)$ oder $e' = e$,
dann $V(+F+\alpha \vee \alpha \vee +P+\alpha, \langle t_b(e), s_b(e)\rangle) = 1$.

Wenn für ein Bezugssystem und für ein event, *das auf derselben Weltlinie liegt wie das Bewertungs-event*, α wahr ist, ist am Bewertungs-event (und für dasselbe Bezugssystem) $\ulcorner +F+\alpha \vee \alpha \vee +P+\alpha\urcorner$ bzw. $\ulcorner F_k\alpha \vee \alpha \vee P_k\alpha\urcorner$ wahr.

2.3.4 Konvergenzforderungen: Die Sprachen Rel^{root} und SRel

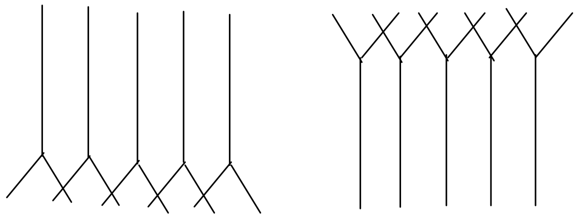
Wie Prior sinngemäß bemerkte, kann es sich auch bei $K_t^{add(S4-\Box 1)}$ mit Randlosigkeit und Dichte noch nicht um eine spezifische Logik für die SR handeln. Denn für sie gilt, dass sich alle Vorwärtslichtkegel einmal überschneiden, und – so kann man Prior ergänzen – erst recht alle Vergangenheitslichtkegel. Ganz entsprechend ist auch die feinkörnigere Sprache Rel^{pl} noch keine spezifische Logik für die SR. $K_t^{add(S4-\Box 1)}$ mit

Randlosigkeit und Dichte ließ sich durch Hinzufügung der Konvergenzforderung zu K_{Prior} aufstocken, und K_{Prior} ist für die SR spezifisch, was objektsprachlich in der Geltung der S4.2-Axiome für die kausalen Operatoren zum Ausdruck kam. Es ist zu erwarten, dass Rel^{pl} sich auf ganz analoge Weise zu einer feinkörnigen, spezifischen Logik für die SR aufstocken lässt, die **SRel** heißen soll.

SRel sei definiert wie Rel^{pl}, nur dass zusätzlich Δ-Konvergenz im Sinne der Bedingung (Δ7) und ∇-Konvergenz im Sinne der Bedingung (Δ8) gefordert wird, also:

(Δ7) $\Delta(e) \cap \Delta(e') \neq \emptyset$ (Δ8) $\nabla(e) \cap \nabla(e') \neq \emptyset$.

Zunächst ist zu bemerken, dass beide Forderungen unabhängig voneinander sind.



Prior thematisiert dies nicht, da er sich ganz auf Zukunftslichtkegel und deren kausale Operatoren konzentriert. Doch man kann sich ein Modell (wie links) vorstellen, das sich – warum auch immer – isoliert, während es über die Vergangenheitslichtkegel zusammenhängt. Man kann sich auch eines vorstellen, in dem zwar große Bereiche auch über die Zukunftslichtkegel zusammenhängen, aber nicht so, dass (Δ8) *allgemein* erfüllt ist.

Der Zusammenhang der Vergangenheitslichtkegel ist intuitiv sehr plausibel. Man mag zumindest zweifeln, ob ein Modell, in dem (Δ7) nicht erfüllt ist, überhaupt *eine* Welt darstellte, auch wenn der Ausgang des Zweifel nicht ganz klar ist: Das mehrfach aus technischen Gründen betrachtete, völlig isolierte Modell ist ja ein solches Modell; und es scheint auch nicht wieder völlig ausgeschlossen, dass es sich dabei um *eine* Welt handelt, nur eben um eine, in der nie Information von irgendwo irgendwohin sonst gelangt. Es scheint jedenfalls unumgänglich, einen Zusammenhang im Sinne von (Δ8) anzunehmen, wenn das Modell noch einen Urknall im Rücken haben soll. Denn dieser müsste im Vergangenheitslichtkegel *aller* events liegen, und es scheint physikalisch keinen Sinn zu machen, dass event-Mengen so voneinander separiert sein sollten, dass sie *nur* den (im Modell nicht berücksichtigten) Urknall gemeinsam hätten. Kurz: Möglicherweise sind nur Modelle, in denen (Δ7) erfüllt ist, überhaupt plausible AR-Modelle. Da man sich den Zusammenhang der Vergangenheitslichtkegel[27] wie eine Wurzel vorstellen kann, sei die Erweiterung von Rel^{pl} *nur* um die Forderung von (Δ7) $\mathbf{Rel^{root}}$ genannt und die Vermutung geäußert, dass es sich bei Rel^{root} um eine realistische Logik für die AR handeln könnte.

[27] Sehr genau genommen sichert paarweise nichtleerer Schnitt über einer unendlichen Menge von Mengen noch nicht, dass die Schnittmenge *aller* dieser Mengen nichtleer ist. Aber man mag sich die stärkere Forderung hier miterfüllt denken.

Auch ein Modell (wie rechts auf der Abbildung), in dem zunächst isolierte Stränge des Universums sich schließlich zusammenfinden, und für das also (Δ8) gilt, nicht aber (Δ7), ist möglich, auch wenn ich mir physikalisch nichts Rechtes darunter vorstellen kann.

Wie inzwischen zu erwarten ist, gelten die charakteristischen Varianten der S4.2-Axiome in folgendem Sinn:

$\ulcorner \mathsf{P}_k\, \mathsf{H}_k\alpha \rightarrow \mathsf{H}_k\, \mathsf{P}_k\, \alpha \urcorner$	ist allgemeingültig, wenn (Δ8) gefordert wird;
$\ulcorner \mathsf{F}_k\, \mathsf{G}_k\alpha \rightarrow \mathsf{G}_k\, \mathsf{F}_k\, \alpha \urcorner$	ist allgemeingültig, wenn (Δ7) gefordert wird **[B34]**.

Dabei ist auffällig, dass die Eigenschaft des vollen Modells und die Erstreckung der Kegel im Beweis eine Rolle spielen.[28] Daraus folgt sofort: Die SRel-Semantik induziert eine komplette K_{Prior}-Axiomatik (mit Goldblatt-Axiomen). SRel enthält also K_{Prior} als Fragment.

Man wird allerdings gegenüber Prior, besonders aber gegenüber Goldblatt und Müller, eine gewisse Akzentverschiebung bemerken können: Das Hinzufügen auch der zweiten Konvergenzforderung wirkt nach dem bereits Festgestellten alles andere als zentral für die relativistische Raumzeitlogik. Streift man einmal die Metrik ab und betrachtet die Sache topologisch, so erscheint die SR im Lichte der relativistischen Raumzeitlogik mit Orts- und Bezugssystem-Operatoren von vornherein als ziemlich eingeschränkter Spezialfall.

[28] Das Zweite scheint Prior bereits zu vermuten (PPF, S.205, meine Hervorhebung): „This condition [CFGpGFp] is met in the space-time of special relativity; at least it is met *if we assume that time has no end*. (In this space-time, we might say, all futures tend to merge, but if time stopped some futures would be left separated.)“.

KAPITEL 3

Fast wie die Seeschlacht: Wahrheitswerte im Raumartigen und im Lichtkegel

3.1 Einleitung

Nach der SR kann dasselbe entfernte Ereignis, je nach freier Wahl des Bezugssystems, zum hier und jetzt gegenwärtigen Ereignis früher, später oder gleichzeitig koordiniert werden (B-Ordnung). Voraussetzung dafür ist freilich, dass sich dieses Ereignis im Raumartigen zum Hier-und-Jetzt befindet. Zum **Problem des Raumartigen** wird dies, wenn man das Vergangene und Gegenwärtige als feststehend, die Zukunft aber als offen ansieht, d.h. als noch gar nicht in bestimmter Ausführung zur Welt gehörend. Schließlich, so wird man sagen wollen, können wir uns ja wohl nicht aussuchen, was von der Welt hier und jetzt schon fertiggestellt sein soll, und was nicht!

Die Offenheit der Zukunft kann unter Berücksichtigung eines einzigen Weltblatts mit komplett festgelegter Beschriftung noch nicht vollständig dargestellt werden. Doch schon die Sprache Rel^{pl} versetzt uns in die Lage, verschiedene Auffassungen zu Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft in der Relativitätstheorie klar abgegrenzt gegenüber zu stellen. Man kann sich fragen:

> Ist denn nun ein Ereignis im Raumartigen *tatsächlich* als vergangen, gegenwärtig oder zukünftig anzusehen? *Auf welche Art und Weise* sollen wir die Bezugssystem-relativen Datierungen solcher Ereignisse ernst nehmen?

Die folgende Antwort ist weit verbreitet:

> „*So richtig* Vergangenheit sind als vergangen datierte Ereignisse im Raumartigen nicht. Als echte Vergangenheit ist nur die *kausale* Vergangenheit anzusehen, also der Vergangenheitslichtkegel. Entsprechend ist auch nur die kausale Zukunft *so richtig* Zukunft, und auch nur der ausdehnungslose Punkt des Hier-und-Jetzt *so richtig* Gegenwart.“[1]

Man mag versuchen, dies durch die folgende Aussage zu stützen:

> „*So richtig* Vergangenheit sind nur solche Ereignisse, die für *jedes* Bezugsystem als vergangen gelten müssen, *so richtig* Zukunft nur solche, die für *jedes* Bezugssystem als zukünftig und so richtig gegenwärtig nur solche, die für *jedes* Bezugssystem als gegenwärtig gelten müssen.“

[1] Zu zustimmungswürdiger Kritik am letzteren vgl. Müller, „Arthur Priors Zeitlogik“, Kap. 4.5.2, S.257f.

Doch auch das könnte falsch sein. Schließlich bleibt auch die Option offen, zu sagen:

> Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft sind nur Bezugssystem-relativ zu haben. Richtiger geht's nicht.

Zum Vergleich der Positionen im Rahmen von Rel ist es nützlich, zu bemerken, dass die kombinierte Zeit- und Modallogik LF und die relativistische Raumzeitlogik Rel große Gemeinsamkeiten aufweisen. Das führt zwar noch nicht auf eine Analogie zwischen Lösungsmöglichkeiten für das Seeschlacht-Problem und Lösungsmöglichkeiten für das Problem des Raumartigen, die erst Sache von Teil IV ist. Denn Rel ist es nicht um Alternativen zu tun. Dennoch kann man mit Rel drei verschiedene Positionen zur Bewertung von Aussagen über events im Raumartigen unterscheiden, die verschiedenen Zukunftsoperatoren in der Kombinierten Zeit- und Modallogik (KTM) entsprechen. Und es versetzt uns in die Lage, darunter eine quasi-ockhamistische von einer quasi-Peirce'schen Position zu unterscheiden. Die Analogie besteht in folgenden Punkten:

(1) Sowohl LF×S5 als auch Rel sind Erweiterungen von K_{lin}×S5 um eine Dimension; im ersten Fall um die Dimension der Möglichkeit, im zweiten Fall um die Dimension des Bezugssystems. Im Fall von LF×S5 kommt der Box-Operator „N" hinzu, im Fall von Rel der Operator „×". „p" impliziert, wie in LF, einerseits „Np", andererseits „×p", aber dasselbe gilt nicht allgemein für α.

(2) Grob gesagt stößt man sich an der einfachen Interpretation von „F" als „Es wird der Fall sein, dass" in LF und LF×S5, weil der „F"-Operator sich nur auf *eine* Alternative unter vielen bezieht. Ebenso mag man sich an der einfachen Interpretation von „S" als „Es ist (jetzt) irgendwo der Fall, dass" stoßen, weil der „S"-Operator sich nur auf *ein* Bezugssystem unter vielen bezieht.

(3) Im Fall von „F" in LF und LF×S5 liegt es nahe, zu sagen, die Operatorenkombination „NF" entspreche wirklich der Wendung „Es wird der Fall sein, dass" (die Lösung des Peirceaners). Ebenso liegt es im Fall von Rel nach dem Gesagten nahe, zu vertreten, die Operatorenkombination „×S" entspreche der Wendung „Es ist (jetzt, hier) *tatsächlich* irgendwo der Fall, dass".

(4) Freilich ist als Gegenreaktion auch die Betonung des gewählten *Bezugssystems* denkbar. Sie entspricht, formal gesehen, der Betonung der Bewertungs-*Alternative*, wie sie der Ockhamist für seine Deutung von LF und von LF×S5 vornimmt. Man kann also sowohl von einem Alternativen-Ockhamismus wie auch von einem Bezugssystem-Ockhamismus sprechen.

Die Entsprechung von „NF" und „×S" ist kaum zu übersehen, wenn die Rel-Operatoren erst einmal zur Verfügung stehen. Für ein vollständiges Bild muss man allerdings etwas genauer hinschauen, bis sich die Analogie der Positionen im einzelnen durchführen lässt. Hierfür sind zwei Dinge zu berücksichtigen: Mit dem Wechsel des Bezugssystems ändert sich auch der Ort, der einem event zugewiesen wird. In der Regel wird „hier" also nicht „hier" bleiben (III 3.2). Einige Feinheiten im Zusammenhang mit dem Seeschlacht-Problem erforderten Datumsangaben; entsprechend sollten raumzeitliche Positionsangaben eingeführt werden (III 3.3).

In III 3.4 kann dann der direkte Positionsvergleich in Angriff genommen werden. Zunächst lässt sich eine Position beschreiben, die der Verwendung des „vielleicht einmal"-Operators „f" in LF entspricht. Ihr zufolge wird das gesamte Raumartige zu einem Ereignis als relativ zu diesem bereits gegenwärtig oder vergangen angesehen (III 3.4.2). Ferner wird wird sich eine quasi-peirceanische Beschreibung der Situation finden lassen. (III 3.4.3). Schließlich werden sich ferner zwei Lesarten einer ockhamistischen Interpretation unterscheiden lassen, von denen eine plausibel ist, die andere nicht. Ihnen zufolge teilt sich die Raumzeit an einem Ereignis entlang einer Bezugssystem-relativen Vorderkante in Vergangenheit *cum* Gegenwart einerseits und Zukunft andererseits (III 3.4.4). Ein Analogon zur Thomason'schen Position (Supervaluation) Position ist an dieser Stelle noch nicht interessant, sondern erst mit der Berücksichtigung von Alternativen in Teil IV.[2]

In Kap. III 3.5 ist noch einmal genau festzustellen, wieso die Behandlung des Problems mit den Mitteln von Rel nicht ausreichend sein kann: Einerseits kann der Schluss von „vergangen" auf „feststehend" noch nicht hinterfragt werden, wenn nur vom Vergangenen die Rede ist. Er ist aber vielleicht fragwürdig. Außerdem ist mit den Ressourcen von Rel ausgerechnet die *kausale* Zukunft eines events als bereits in bestimmter Weise gegeben anzunehmen.

3.2 Was entspricht in Rel welchem Zeichen in LF?

In LF lassen sich verschiedene Zeichen definieren, die zum Teil zur Formulierung der einen oder anderen Position zum Seeschlacht-Problem nützlich waren:

(1) „**F**" („Es wird *bestimmt* der Fall sein, dass") als „NF" und „**G**" als „NG"
(2) „f" („Es wird *vielleicht* der Fall sein, dass")
als „MF" und „g" als „MG" (bzw. als „~ **G** ~" und als „~ **F** ~")

Gibt es Kombinationen von Operatoren in Rel, die diesen Zeichen entsprechen? Zuerst ist zu bemerken, dass bei einer Übertragung nach Rel die im Fall des Seeschlacht-Problems nur im Zusammenhang mit dem „F"-Operator erforderlichen Definitionen für das Raumartige in jeweils drei Definitionen ausdifferenziert werden müssen. Denn das Raumartige zu einem event umfasst nicht nur relativ zu einem Bezugssystem

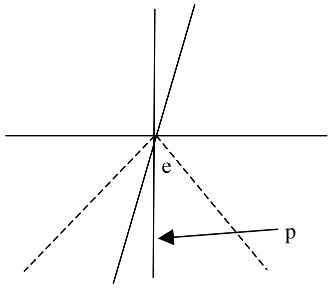
[2] Es ist sehr leicht, das zu Formeln mit Peirceanischen Operatoren Gesagte für einen Ansatz mit Supervaluationen zu adaptieren. Dabei bekommen viele mit „gewöhnlichen" Operatoren beginnende Gegenstücke von mit Peirceanischen Operatoren beginnenden Formeln *keinen* S-Wert, während die Peirceanischen Varianten den Wert 1 bekommen. Im Folgenden wird sich aber zeigen: Solange keine Alternativen im Spiel sind, ist der Ockhamismus vertretbar und für S-Werte intuitiv kein Bedarf.

zukünftige, sondern auch gleichzeitige und vergangene räumlich entfernte events. Es kann ja z.B. vorkommen, dass etwas vom selben event aus beurteilt für ein Bezugssystem in der Vergangenheit liegt, für ein anderes aber nicht. Man wird zunächst an die folgenden Entsprechungen denken:

(1) „**F**“ (= „NF“) und „**G**“ (= „NG“) entsprechen: $\begin{cases} \text{„}\times\text{F“ und „}\times\text{G“} \\ \text{„}\times\text{S“} \\ \text{„}\times\text{P“ und „}\times\text{H“} \end{cases}$

(2) „f“ (= „MF“) und (= „MG“) „g“ entsprechen: $\begin{cases} \text{„+F“ und „+G“} \\ \text{„+S“} \\ \text{„+P“ und „+H“} \end{cases}$

Doch ganz angemessen lässt sich das Erwünschte mit diesen Operatoren-Kombinationen noch nicht ausdrücken. Denn mit ihnen ließe sich auch ein einmaliges Ereignis im Vergangenheitslichtkegel des Bewertungs-events und am Ort dieses events relativ zum gerade gewählten Bezugssystem nicht als *wirklich* vergangen einstufen. Schließlich fand es in einem realistischen SR-Fall für jedes andere Bezugssystem als das gerade benutzte *nicht* am Ort des Bewertungs-events statt, und der „P“-Operator heißt „Es war *hier* der Fall, dass“:



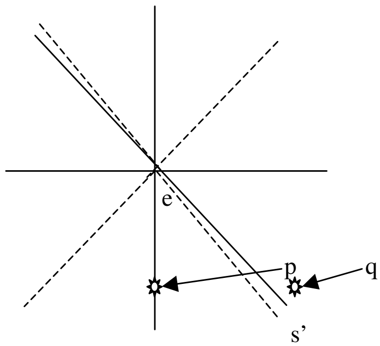
Für b (rechtwinklig) und $t_b(e)$, $s_b(e)$: Pp aber ~×Pp.

Entsprechendes gilt für den „F“-Fall. Nur für den „S“-Fall ist die Definition intuitiv angemessen. Zum Glück bringt einen das Gegenbeispiel schnell darauf, was fehlt, nämlich ein „irgendwo“. Ein Ereignis ist demnach für b an $\langle t_b(e), s_b(e)\rangle$ tatsächlich in der Vergangenheit, wenn es für jedes b' an $\langle t_{b'}(e), s_{b'}(e)\rangle$ *irgendwo* stattgefunden hat. Die den definierten Zeichen für LF entsprechenden definierten Zeichenkombinationen in Rel haben eine spatiale Komponente. Diese Überlegung führt zu den folgenden Entsprechungen:

(1) „**F**“ (= „NF“) und „**G**“ (= „NG“) entsprechen: $\begin{cases} \text{„}\times\text{ S F“ und „}\times\text{SG“} \\ \text{„}\times\text{(S) S“} \\ \text{„}\times\text{ S P“ und „}\times\text{SH“} \end{cases}$

$$\text{(2) „f“ (= „MF“) und „g“ (= „MG“) entsprechen:} \begin{cases} \text{„+S F“ und „+SG“} \\ \text{„+(S) S“} \\ \text{„+S P“ und „+SH“} \end{cases}$$

Man sieht an folgendem Beispiel gut, wieso die Operatoren-Kombination „×SP“ zwischen einem einmaligen Ereignis im Vergangenheits-Lichtkegel und einem einmaligen Ereignis im Raumartigen unterscheidet, während „+SP“ das Raumartige mit einbezieht:



Für b (rechtwinklig) und $t_b(e)$, $s_b(e)$: Man hat ×SPp, aber mit b’ ein Bezugssystem, für das gilt: ~ SPq, denn es gilt für b’ sogar: SFq. Also gilt für b: + ~ SPq, also ~ ×SPq. Dagegen gilt allein schon, weil für b SPq vorliegt, für b auch +SPq.

Wie im Fall der offenen Zukunft müssen auch im Raumartigen logische Gesetze als *tatsächlich* wahr gelten; es sind also logische und kontingente Wahrheiten über das Raumartige zu unterscheiden. Hierzu lässt sich leicht festzuhalten, dass für eine beliebige, wie üblich mit „T“ abgekürzte allgemeingültige Formel allgemein für Rel (a) gilt und außerdem (b), *wenn* man beidseitig randlose Modelle zu Grunde legt:

Allgemeingültig sind:

(1) (a) „×SG T“, „×SH T“, „×S T“ (b) „×SP T“ , „×SF T“,

(2) (a) „+SG T“, „+SH T“, „+S T“ (b) „+SF T“, „+SP T“ **[B1]**.

Man sieht außerdem schnell, dass „×SF“, „×S“ und „×SP“ noch nicht einmal schwache Modaloperatoren im Sinne der minimalen Modallogik K sind, ebensowenig wie „**F**“ dies in der kombinierten Zeit- und Modallogik ist. Denn sonst müssten „×SF“, „×S“ und „×SP“ sich immer über die Alternation verteilen lassen. Dies ist aber nicht der Fall **[B2]**.

3.3 Positionsangaben

Es hat sich in Teil III herausgestellt, dass das Seeschlacht-Problem, entgegen bisherigen nicht-metrisierten Ansätzen, mit Hilfe von Datumsangaben formuliert werden sollte, wenn man seiner historischen Formulierung gerecht werden will. Eine Datumsangabe hatte dabei (willkürlich mit „q“ als Satzbuchstaben formuliert) die Feinstruktur

$$\mathsf{H} \sim q \wedge q \wedge \mathsf{G} \sim q.$$

Die Idee ist einfach genug: Die Nennung des heutigen Tages im Präsens („Heute ist der...“ = q) war vor heute nie wahr ($\mathsf{H} \sim q$) und wird es ab morgen nie wieder sein ($\mathsf{G} \sim q$). In der KTM war dem noch eine über alle möglichen Weltverläufe reichende Box vorgeschaltet:

$$\Box\, (\mathsf{H} \sim q \wedge q \wedge \mathsf{G} \sim q).$$

Es ist zu erwarten, dass eine Übertragung aufs Raumartige etwas Ähnliches wie Datumsangaben erfordert, nämlich raumzeitliche Positionsangaben. Gibt es eine Art von Feinstruktur einer Formel der relativistischen Raumzeitlogik, die dasselbe leistet wie die oben angegebene Struktur in der Zeitlogik? Ja, wenn man volle Strukturen voraussetzt, also die verwendete Logik wenigstens Rel^{pl} ist. Um eine Positionsangabe übersichtlich ausdrücken zu können, lässt sich nämlich nun definieren:

$\ulcorner \times(\mathsf{HE}{\sim}\alpha \wedge \alpha \wedge \mathsf{GE}{\sim}\alpha) \urcorner$ lässt sich stets als $\ulcorner \underset{\cdot}{\alpha} \urcorner$ abkürzen **[B3]**.

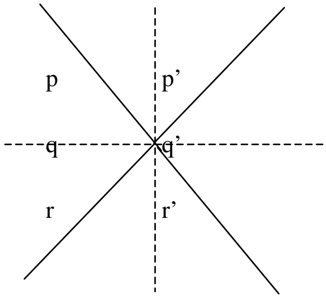
3.4 Vergleich dreier möglicher Auffassungen zu Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft

3.4.1 Drei Sorten von Operatoren-Kombinationen

Aufgrund der (com)-Gesetze lässt sich statt „$\times$SF“, „$\times$SP“, „+SF“ und „+SP“ auch immer schreiben: „$\times$FS“, „$\times$PS“, „+FS“ und „+PS“. Nach den bisherigen Überlegungen kann man dann drei Gruppen von Operatoren-Kombinationen unterscheiden:

(1)	$\times$PS	$\times$FS	$\times$S
(2)	PS	FS	S
(3)	+PS	+FS	+S

Betrachten wir ein Rel^{pl}-Modell vom rechtwinklig dargestellten Bezugssystem aus und an e, dessen Lichtkegel dargestellt ist. Die atomaren Formeln „p“, „q“, „r“, „p’“, „q’“ und „r’“ sollen *allein* dort wahr sein, wo angegeben:



Wir erhalten:

	mit „+“			ohne „+“ bzw. „×“			mit „×“		
	+PSp̣	+Sp̣	+FSp̣	~PSp̣	~Sp̣	FSp̣	~×PSp̣	~×Sp̣	~×FSp̣
Raumartiges	+PSq̣	+Sq̣	+FSq̣	~PSq̣	Sq̣	~FSq̣	~×PSq̣	~×Sq̣	~×FSq̣
	+PSṛ	+Sṛ	+FSṛ	PSṛ	~ Sṛ	~FSṛ	~×PSṛ	~×Sṛ	~×FSṛ
	~+PSp̣’	~+Sp̣’	+FSp̣’	~PSp̣’	~Sp̣’	FSp̣’	~×PSp̣’	~×Sp̣’	×FSp̣’
Lichtkegel	~+PSq̣’	+Sq̣’	~+FSq̣’	~PSq̣’	Sq̣’	~FSq̣’	~×PSq̣’	×Sq̣’	~×FSq̣’
	+PSṛ’	~+Sṛ’	~+FSṛ’	PSṛ’	~ Sṛ’	~FSṛ’	×PS ṛ’	~×S ṛ’	~×FSṛ’

Zunächst fällt zur an der Verteilung der Negatoren sichtbaren Vergabe der Wahrheitswerte auf: In Bezug auf den Lichtkegel weichen die drei Positionen nicht voneinander ab. In Bezug auf Raumartiges und Lichtkegel macht die mittlere Position keinen Unterschied, die beiden anderen Positionen dagegen weichen für Raumartiges und Lichtkegel voneinander ab.

Versuchen wir nun einzuschätzen, welche Chancen ein ernsthafter Benutzer jeder der verschiedenen Zeichengruppen hätte, die Ansicht durchzufechten, *seine* bevorzugten Zeichenkombinationen seien angemessen, um die folgenden Wendungen wiederzugeben:

„Es war tatsächlich (irgendwo) der Fall, dass“
„Es ist tatsächlich (irgendwo) der Fall, dass“
„Es wird tatsächlich (irgendwo) der Fall sein, dass“.

3.4.2 Die Position des Befürworters von „+PS“, „+S“, „+FS“ (Rietdijkianer)

Nach der Ansicht eines Befürworters der Zeichenkombinationen „+PS“, „+S“, „+FS“ zur Wiedergabe der genannten Wendungen genügt die Möglichkeit, auch nur ein einziges Koordinatensystem zu finden, mit dem man ein Ereignis als gleichzeitig zum

Bewertungs-event koordinieren kann, um dieses als tatsächlich gegenwärtig zu bezeichnen; entsprechend soll ein einziges Koordinatensystem, mit dem man ein Ereignis als vergangen koordinieren kann, ausreichen, um es als tatsächlich in der Vergangenheit liegend anzusehen; und es soll ein einziges Koordinatensystem, mit dem man ein Ereignis als zukünftig koordinieren kann, ausreichen, um es als tatsächlich in der Zukunft liegend anzusehen.

Diese Position entspricht rein formal gesehen der Position in der KTM, „f" (="MF") sei ein gutes Zeichen, um die Wendung „Es wird der Fall sein, dass" wiederzugeben. Meines Wissens hat das nie ein Indeterminist ernsthaft vertreten. Dies wäre auch angesichts der zwingenden Deutung „Es wird *vielleicht* der Fall sein, dass" für „f" einfach absurd. Die reine Möglichkeit reicht für eine futurische Aussage *simpliciter* nicht aus. Dazu muss wenigstens die Überzeugung kommen, gerade diese Möglichkeit werde verwirklicht werden. Doch die rein formale Analogie trägt nichts aus. Es spricht nichts dagegen, dass eine Position auf einem Gebiet absurd ist und ihr formales Pendant auf anderem Gebiet ganz vernünftig.

Der stärkste Einwand gegen die Benutzung der Operatoren-Kombinationen mit „+" ist zweifellos dieser: Zwar ist, wie man sieht, ein einmaliges punktuelles Geschehen am Bewertungs-event selbst und im Zeitartigen dazu nur entweder zukünftig, gegenwärtig oder vergangen. Aber ein einmaliges punktuelles Geschehen im *Raumartigen* wird, ohne Unterscheidung der Aussage-Hinsicht, als sowohl gegenwärtig als auch zukünftig als auch vergangen eingeordnet. Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft sind nach dieser Ansicht also nicht prinzipiell inkompatibel, sondern nur innerhalb des Lichtkegels. Es dürfte aber eine sehr tief verankerte Intuition zu jedem wiedererkennbaren Gebrauch der Wörter „Vergangenheit", „Gegenwart" und „Zukunft" sein, dass diese im Hinblick auf ein einmaliges punktuelles Geschehen *prinzipiell* inkompatibel sind. Anders als „+PS", „+S" und „+FS" werden „×PS", „×S" und „×FS" und auch „PS", „S", „FS" dieser Intuition gerecht, indem sie im besagten Sinn prinzipiell inkompatibel sind.

3.4.3 Die Position des Befürworters von „×PS", „×S" und „×FS" (Peirceaner)

Nach der Ansicht eines Befürworters der Zeichenkombinationen „×PS", „×S" und „×FS" zur Wiedergabe der genannten Wendungen reicht allein die Möglichkeit, ein Ereignis mit *jedem* Koordinatensystem als gleichzeitig zum Bewertungs-event zu koordinieren, hin, um dieses als *tatsächlich* gegenwärtig zu bezeichnen; entsprechend muss man ein Ereignis für jedes Koordinatensystem als vergangen koordinieren können, um es als tatsächlich in der Vergangenheit liegend ansehen zu dürfen; und man muss ein event für jedes Koordinatensystem als zukünftig koordinieren können, um es als tatsächlich in der Zukunft liegend ansehen zu dürfen.

Zweifellos entspricht dies inhaltlich der eingangs als Position des (populär-) wissenschaftlichen *mainstreams* bezeichneten Ansicht. Man mag einen Fortschritt darin sehen, diese mit den Operatoren-Kombinationen mit „×" im Rahmen von Rel präzise wiedergeben zu können. Vielleicht kann man an der formalen Stellung Zeichenkombinationen „×PS“, „×S“ und „×FS“ sogar noch indirekt etwas Interessantes über die *mainstream*-Ansicht lernen, nämlich, dass es sich bei ihr um ein Pendant zur peirceanischen Position in der KTM handelt.

Formal entspricht diese Position nämlich der Position in der KTM, „**F**“ (=“NF“) sei ein gutes Zeichen, um die Wendung „Es wird der Fall sein, dass“ wiederzugeben, wobei dies in der Bedeutung „Es wird *bestimmt* der Fall sein, dass“ zu verstehen ist. Es spricht nichts dagegen, die Operatoren-Kombintionen mit „×“ Zeichen auch im Hinblick auf $\mathrm{Rel}^{\mathrm{pl}}$ als Peirce'sche Operatoren zu bezeichnen. Auch in der relativistischen Raumzeitlogik gibt es also eine peirceanische Position. Natürlich kann man sich entscheiden, in Bezug auf die KTM Peirceaner zu sein und in Bezug auf Rel nicht oder umgekehrt. Doch die auch inhaltliche Parallelität legt eine Koexistenz beider Positionen nahe. Der Peirceaner in beiderlei Hinsicht kann auf Folgendes hinweisen:

(1) Er hat eine natürliche Erklärung für das Wort „tatsächlich“ im Falle von Rel. Es spielt genau dieselbe Rolle wie das Wort „bestimmt“ für zukünftige Alternativen. Mit „Es wird der Fall sein, dass“ ist *eigentlich* „Es wird *bestimmt* der Fall sein, dass“ gemeint. Das *tempus futur* hat, wenn man an Alternativen denkt, bereits einen modalen Beigeschmack. Genauso tragen alle drei *tempora verbi*, wenn man an Bezugssysteme denkt, bereits einen Verweis auf den Bezugsysystem-invarianten Lichtkegel in sich.

(2) Gerade so, wie etwas für *alle* zukünftigen Alternativen der Fall sein muss, um als zukünftig gelten zu können, muss etwas für *alle* Bezugssysteme vergangen (bzw. zukünftig, gegenwärtig) sein, damit es als tatsächlich vergangen gelten kann. Ja, schärfer und genauer gesagt: Vergangenheit-*relativ-auf-ein-Bezugssystem* (ebenso Gegenwart oder Zukunft) ist genausowenig Vergangenheit (bzw. Gegenwart, Zukunft), wie Bevorstehen-relativ-auf-eine-Alternative überhaupt Zukunft ist. Gerade so, wie ein V-Wert in der KTM nur als Wahrheitswert (bzw. „*aktualer* Wahrheitswert“) ernst zu nehmen ist, wenn er Alternativen-invariant ist, ist auch ein V-Wert in Rel nur als Wahrheitswert ernst zu nehmen, wenn er Bezugssystem-invariant ist.

(3) So, wie in der KTM bereits die zukünftige Geltung logischer Gesetze behauptet werden darf, da sie Alternativen-invariant ist, darf in Rel die tatsächliche Geltung logischer Gesetze für jedes event der Raumzeit behauptet werden, da diese Bezugssystem-invariant ist.

Ferner kann ein Peirceaner im Hinblick auf Rel auf Folgendes hinweisen: Die Differenzierung der drei „N“-Operatoren in der modalisierten klassischen Raumzeitlogik (vgl. Kap. II 3.3) entspricht in auffälligster Weise der Differenzierung in „PS“, „+PS“ und „×PS“. Während „N“ mit seiner Berücksichtigung einer raumweiten Vorderkante offensichtlich zu „PS“ passt und „N_∇“ ebenso offensichtlich zu „+PS“, ist der zu „×PS“ passende Operator natürlich „N_Δ“. Denn er hat ja gerade den Vergangenheitslichtkegel als Zugänglichkeitsfläche. „N_{Δ}“ war zu lesen als „Es ist wissbar, dass“. Und der Peirceaner mag es als Vorteil seiner Position ansehen, dass man vom Vergangenen in *seinem* Sinn auch immer prinzipiell *wissen* kann, dass es vergangen ist.

Doch ist das wirklich ein Vorteil? Die modalisierte klassische Raumzeitlogik könnte auch eine ganz andere Konsequenz nahelegen: Schon im klassischen Bild führt die Berücksichtigung der Endlichkeit der maximalen Signalgeschwindigkeit dazu, dass manches, was schon geschehen ist, noch nicht wissbar ist. Wieso sollte das ausgerechnet in der Relativitätstheorie anders sein, die die Berücksichtigung der Endlichkeit der maximalen Signalgeschwindigkeit in letzter Konsequenz durchführt? Hier gewinnt Rakićs Argument gegen den Ausschluss des *gesamten* Raumartigen aus dem „Realisierten“[3] Kraft als Argument gegen den Peirceaner: Wir erfahren doch später, dass etwas zuvor im Raumartigen geschehen *ist*. Sein Stattfinden wird ja nicht etwa rückwirkend dadurch in den Weltlauf eingesetzt, dass wir davon erfahren; und es behauptet auch niemand, dass es erst dann *geschieht*, wenn wir davon erfahren.

Außerdem spricht gegen die peirceanische Position (und damit übrigens auch dagegen, dass der derzeitige *mainstream* das letzte Wort sein sollte),[4] dass ihr zufolge die Gegenwart auf ein einziges event zusammenschrumpft. Man sieht dies deutlich daran, dass im Beispiel die Formel „×Sq’ “ wahr wird, die Formel „×Sq“ aber nicht; „q“ ist für das gerade benutzte Bezugssystem b ebenso wie für alle Bezugssysteme einzig und allein am Bewertungs-event e selbst wahr. Für jedes event, das in b gleichzeitig mit e ist, aber nicht gleichortig, gibt es dagegen ein Bezugssystem, für das es nicht gleichzeitig mit e ist. Nur was für alle Bezugssysteme gleichzeitig mit e ist, soll nach Ansicht des Peirceaners als Gegenwart von e ernst genommen werden dürfen. Diese Bedingung erfüllt aber nur e.

3.4.4 Die zwei möglichen Positionen des Befürworters von „FS“, „S“, „PS“: Anti-Relativismus und Bezugssystem-Ockhamismus

3.4.4.1 „FS“, „S“, „PS“: ein scheinbar wenig aussichtsreicher Ansatz

Die ernsthafte Verwendung von „PS“, „S“ und „FS“ in Rel zur Wiedergabe von „Es war (irgendwo) der Fall, dass“ entspricht der ernsthaften einfachen Verwendung von “F” in der KTM.

Was ist damit gemeint? Zwar braucht der Peirceaner, wenn er die positionsübergreifende Sprache LF benutzt, mit „**F**“ ein Zeichen, das unter Verwendung von „F“ definiert wird (nämlich als „NF“) (vgl. Kap. III 2). Und der Thomasonianer verwendet das Zeichen „F“ in Formeln, dessen S-Wert er als Wahrheitswert ernst nimmt. Aber unter dem ernsthaften *einfachen* Gebrauch von „F“ ist etwas anderes zu verstehen: die Verwendung dieses Zeichens zur Wiedergabe der

[3] Vgl. Kap. III 1.2.3.2.

[4] Vgl. wiederum Müller, a.a.O., Abschnitt 4.5.2, S.257f.

Wendung „Es wird der Fall sein, dass“, bei der man Alternativen-relative V-Werte als Wahrheitswerte interpretiert, obwohl diese nicht Alternativen-invariant sind. Offensichtlich macht es ein ernsthafter Benutzer der Zeichen „PS“, „S“ und „FS“ ganz ähnlich: Der V-Wert von $\ulcorner \mathrm{PS}\alpha \urcorner$ ist, anders als der von $\ulcorner \times\mathrm{S}\alpha \urcorner$ oder $\ulcorner +\alpha \urcorner$, nicht Bezugssystem-invariant.

Die Analogie zur KTM sieht zunächst nicht gerade nach einer Empfehlung aus. Denn es hatten sich zwei Möglichkeiten ergeben, wie die ernsthafte Benutzung von „F“ in der KTM zu verstehen ist; und beide hatten sich im Rahmen eines indeterministischen Ansatzes definitiv als unbrauchbar erwiesen:

(1) Von der Bewertungs-Alternative h wird vorausgesetzt, dass sie die wirkliche Zukunft ist. Dies ergibt überhaupt keine indeterministische Position, sondern einen Determinismus in KTM-Verkleidung. Sie wird manchmal „aktualistisch“ genannt. Schon die Bezeichnung „ockhamistisch“ wäre unfair, denn die ockhamistische Position ist eine (mehr oder weniger erfolgreiche) *in*deterministische Position.

(2) Wahrheitswerte werden „provisorisch“, also relativ zur *Annahme* der Verwirklichung von h vergeben. Die Verwirklichung von h wird aber nicht vorausgesetzt, sondern nur für möglich gehalten. Dies ist die ockhamistische Position. Auch diese Position hat sich jedoch als nicht ernsthaft vertretbar herausgestellt.[5] Wenn man über zukünftige Alternativen spricht, will man einfach nicht wissen, welchen Wahrheitswert die Aussage „Eine Seeschlacht wird stattfinden“ zu t hat, *falls* die Seeschlacht stattfindet; sondern man will wissen, welchen Wahrheitswert sie zu t *simpliciter* hat, und das muss heißen: Alternativen-invariant. Ja, schärfer gesagt: Es ist nicht zu sehen, wie man einen nicht Alternativen-invarianten V-Wert überhaupt als *Wahrheits*wert deuten soll.

3.4.4.2 KTM-Aktualismus als Pendant zur Chimäre des ontologisch vorrangigen Bezugssystems

In Bezug auf die KTM nennt man die Auszeichnung einer bestimmten Zukunft als wirklicher Zukunft oft **Aktualismus**. Fragt man sich, welche Position *im Hinblick auf Rel* der Auszeichnung einer bestimmten Zukunft, dem Aktualismus in der KTM entspricht, so wird man schnell fündig. Es ist die Bevorzugung eines bestimmten Bezugssystems als ontologisch vorrangig. V-Werte nur für dieses System nimmt man als Wahrheitswerte ernst, und für gewöhnlich wird man allein dieses System als Bewertungs-System (für Gesamtformeln)[6] verwenden. Genauso verhält sich der KTM-Aktualist im Hinblick auf die von ihm vorausgesetzte wirkliche Zukunft. Sie ist eine

[5] Vgl. Kap. II 1.6.1.

[6] Bei der Bewertung einer komplexen Formel muss man dann natürlich auch V-Werte für andere Bezugssysteme ermitteln. Diese wird der raumzeitliche Aktualist aber nicht als Wahrheitswerte ernst nehmen.

angeblich ontologisch vorrangige Alternative. In beiden Fällen spricht nichts dafür, dass man von dem, was der Aktualist voraussetzt, ausgehen sollte. Es gibt, wenn der Indeterminismus wahr ist, keine als wirkliche Zukunft ontologisch vorrangige Alternative. Und es gibt im Sinne der Relativitätstheorie kein ontologisch vorrangiges Bezugssystem. Wenn Prior, wie zu befürchten ist, im Hinblick auf die Raumzeitlogik Aktualist war, so kann man immerhin hoffen, dass er seine Position überdacht hätte, wenn man ihm dies vor Augen geführt hätte. Denn im Hinblick auf die KTM hat er jedenfalls keinen Aktualismus vertreten, sondern vielmehr das Instrumentarium ausgearbeitet, mit dem man die Annahme einer wirklichen Zukunft gründlich loswird. Doch vielleicht hätte er auch darauf bestanden, dass es konsistent ist, in einer Hinsicht Aktualist zu sein (Raumzeitlogik) und in der anderen nicht (KTM).

3.4.4.3 Ockhamismus – eine überraschend gut vertretbare Position für Bezugssysteme in der Raumzeit

Als indeterministische Deutung einer KTM bezüglich zukünftiger Alternativen hat sich die ockhamistische Deutung als unbrauchbar erwiesen. Doch es ließ sich auch schon festellen: Eine Position mag auf einem Gebiet absurd und ihr formales Pendant auf anderem Gebiet ganz vernünftig sein. Es ist also durch das Scheitern der ockhamistischen Deutung für die KTM nicht ausgeschlossen, dass sie für die relativistische Raumzeitlogik Rel ganz vernünftig ist. Das Problem im Zusammenhang mit der KTM war ja, dass die ockhamistische Deutung sich *bezüglich zukünftiger Alternativen* und als *indeterministische* Deutung nicht durchhalten ließ. Im Zusammenhang mit Rel geht es aber weder um Alternativen noch um Indeterminismus. Das Gebiet ist hinreichend anders, um eine ockhamistische Deutung dafür ohne Vorurteil in Angriff zu nehmen.

Tatsächlich steht jemand, der die Operatoren „PS“, „S“ und „FS“ in Rel ockhamistisch (und *nicht* etwa aktualistisch!) deutet, überraschend gut da. Er repräsentiert nämlich damit mit formaler Präzision den bereits oben kurz genannten denkbaren Einwand gegen die Peirceanische Position, der sich wie folgt ausführen lässt:

> Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft sind unüberwindlich Bezugssystem-relative Begriffe. Man jagt einem Phantom nach, wenn man dem Wort „tatsächlich“ in der Aussage „Dies war tatsächlich der Fall“ einen besonderen Sinn geben will. Es ist redundant. Jedes Bezugssystem ist zur Beschreibung der Wirklichkeit gleich gut und beschreibt die *Wirklichkeit*. Wenn man die Wirklichkeit beschreiben will, so wird man nicht umhinkommen, erst einmal das Koordinatensystem zu spezifizieren; dann kann man, selbstverständlich Bezugssystem-relative, Behauptungen aufstellen, wie die Dinge sind: „You can’t describe the world without describing it“[7].

[7] Putnam, „Renewing Philosophy“ (1992), S.123.

Sieht man die Dinge so, so spricht es nicht gegen, sondern eher für die Verwendung von „PS“, „S“ und „FS“, dass die V-Werte von Formeln, an deren Beginn sie stehen, nicht Bezugssystem-invariant sind; und man wird auch nicht zögern, die V-Werte nicht als bloße Verrechungseinheiten, sondern als völlig ernst zu nehmende Wahrheitswerte zu interpretieren. Es ist bemerkenswert, dass erst Rel die Wiedergabe dieser Ansicht überhaupt ermöglicht, während dies mit Priors und Goldblatts kausalen Operatoren und ihrer Fixierung auf den Bezugssystem-invarianten Lichtkegel noch nicht möglich ist. Als Vorteile der Verwendung von „PS“, „S“ und „FS“ kann der Ockhamist anführen:

(1) Wie die Formel „Sq“ in der Abbildung zeigt, gibt es für den Ockhamisten eine räumliche ausgedehnte Gegenwart. Sie ist je Bezugssystem-spezifisch. Aber das muss sie im Rahmen der Relativitätstheorie auch sein. Es gibt also kein Problem mit einer zum Punkt geschrumpften Gegenwart.

(2) Die Betonung von „PS“, „S“ und „FS“ wird der Tatsache gerecht, dass ein raumzeitliches Koordinatensystem die *ganze* Raumzeit partitioniert und dass durch die Koordination z.B. ganz natürlich Vergangenheits-Aussagen über events im Raumartigen gemacht werden.

Es gibt daher kein Problem damit, dass etwas nie zuvor gegenwärtig war, aber dann plötzlich in der Vergangenheit auftaucht. Für ein beliebiges, frei gewähltes Bezugssystem gilt: Wenn „PS p̣“ (bzw. „SPp̣“), wahr wird, so ist zuvor am selben Ort auch einmal „Sp̣“ wahr gewesen.

Dies ermöglicht es, die oben[8] zur Erläuterung vorgeschlagene Deutung der Nicht-Allgemeingültigkeit des Quasi-Quantorendrehers „×S P p → P ×S p“ ernst zu nehmen. Der Benutzer der Zeichenkombinationen „×PS“, „×S“ und „×FS“ kann das hingegen nicht. Denn seiner Meinung nach sind die einfachen Operatoren irrelevant; und wenn „×PSp̣“ wahr wird, so ist sowieso nie zuvor überhaupt „×Sp̣“ wahr gewesen. Er behauptet gar nicht, dass, wenn ein Ereignis zur Vergangenheit gehört, es für jedes Bezugssystem eine Gelegenheit in der Vergangenheit gab, zu der es irgendwo gegenwärtig war. Und so ist es für ihn witzlos, was *daraus* nicht folgt. Tatsächlich aber scheint doch der Quasi-Quantorendreher einen besonders typischen Zug der Relativitätstheorie auf den Punkt zu bringen – aber eben nur, wenn man sie als *Relativitäts*theorie ernst nimmt.

Doch es sind gegen die Position des Ockhamisten auch Einwände denkbar, ein nicht sehr schwerwiegender und ein schwerwiegender.

(1) Behauptet der Ockhamist nicht ebenso wie der Befürworter von „+PS“, „+S“ und „+FS“, dass Vergangenheit, Zukunft und Gegenwart im Raumartigen kompatibel sind, dass also ein Ereignis manchmal sowohl vergangen, gegenwärtig und zukünftig ist?

---

[8] Vgl. Kap. III 2.3.2.

Nein. Zwar behauptet er, dass dasselbe Ereignis bei Benutzung eines Koordinatensystems so koordiniert werden mag, bei Benutzung eines anderen anders. Aber hat man sich für ein System entschieden, sind, wie die unter der Abbildung angegebenen Formeln zeigen, Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eines einmaligen punktuellen Ereignisses inkompatibel.

Als den Fehler des Benutzer von „+PS“, „+S“ und „+FS“ wird er die fehlende Hinsichten-Unterscheidung ansehen. Er kann dabei klarstellen, dass die Wahrheit von „+PSp“ seiner Ansicht nach noch nicht hinreicht, um – relativ aufs gewählte Koordinatensystem – der Behauptung „Es war (tatsächlich) der Fall, dass (irgendwo) p“ zuzustimmen, sondern erst die Wahrheit von „PSp“.

(2) Kann man nicht wie folgt argumentieren: Angenommen, man kann daraus, dass etwas Kontingentes in der Vergangenheit liegt, darauf schließen, dass es mittlerweile feststeht; angenommen, man kann daraus, dass etwas Kontingentes in der Zukunft liegt, darauf schließen, dass es noch nicht feststeht; und angenommen, dass das Feststehen eines Ereignisses Bezugssystem-invariant ist. Schließlich – im Sinne des Ockhamisten – angenommen, die Wahrheit von „PS p̣“ bezüglich eines Koordinatensystems b und events e (d.h. an $t_b(e)°s_b(e)$) reicht hin, um bezüglich b und e zu behaupten: „Es war (tatsächlich) der Fall, dass (irgendwo, einmalig) p“; und die Wahrheit von „FS p“ bezüglich eines Koordinatensystems b’ und e reicht hin, um bezüglich b’ und e zu behaupten „Es wird (tatsächlich) der Fall sein, dass (irgendwo, einmalig) p“. Klarerweise gibt es Fälle, in denen „PS p̣“ bezüglich b und e wahr wird und „FS p̣“ bezüglich b’ und e. „PS p̣“ deutet der Ockhamist als „Es war (tatsächlich) der Fall, dass (irgendwo, einmalig) p“ für e und b. Und „FS p̣“ deutet der Ockhamist als „Es wird (tatsächlich) der Fall sein, dass (irgendwo, einmalig) p“ für e und b’. Aus dem ersten schließt man, dass es für b, und (wegen der Invarianz der Wahrheitswerte von atomaren Formeln über Bezugssysteme) auch für b’, feststeht, dass p; aus dem zweiten schließt man (wegen der Invarianz), dass es für b’ und auch für b, *nicht* feststeht. Es steht also sowohl für b als auch für b’ sowohl fest als auch nicht fest. Dieser Widerspruch widerlegt die ockhamistische Deutungsmöglichkeit für „PS“ und „FS“.

Die Intuition hinter diesem Argument ist ernst zu nehmen, und es stellt einen schwerwiegenden Einwand dar. Aber es macht auch eine Menge Annahmen, die zunächst sehr genau zu untersuchen sind, bevor man sie zugibt. Ist z.B. der Schluss von der Vergangenheit aufs Feststehen angesichts der Relativitätstheorie überhaupt plausibel? Ist Feststehen wirklich etwas Bezugssystem-Invariantes? Indirekt ist, wenn von „Feststehen“ die Rede ist, jedenfalls schon von Alternativen die Rede.

3.5 Die Notwendigkeit der Berücksichtigung von Alternativen

Wie üblich bei einem echten Problem, geht keine Position aus dem Vergleich in Kap. III 3.4 ganz ungerupft hervor.

- „+PS“, „+S“ und „+FS“ stehen ziemlich schlecht da.
- Die peirceanischen Zeichenkombinationen „×PS“, „×S“ und „×FS“ stehen ganz gut da, wenn man intuitiv mit einer zu einem einzigen event geschrumpften Gegenwart zufrieden ist – sonst weniger gut.
- Die Zeichenkombinationen „PS“, „S“ und „FS“ stehen in einer ockhamistischen Deutung überraschend gut da.

Der letzte Einwand in Kap. III 3.4 geht bereits über das hinaus, was sich allein mit Mitteln von Rel diskutieren lässt. Man merkt dies streng genommen schon an der etwas schrägen Rede von etwas, das in der Zukunft *liegen*, aber noch nicht feststehen soll. Denn man wird sagen wollen: Wenn etwas noch nicht feststeht, dann liegt es auch noch nicht in der Zukunft. Alternativen, die hier Klarheit schaffen könnten, sind aber in Rel noch nicht berücksichtigt.

Ein weiterer, eng mit dem genannten Punkt zusammenhängender Grund für die Berücksichtigung von Alternativen ist der folgende: In Rel verhalten sich, wie auch in der Zeitlogik oder klassischen Raumzeitlogik ohne Alternativen, „F“- und „P“-Operatoren völlig parallel. An der Wahrheit von „×FS p’“ und „FS p’“ unter der Abbildung in Kap.III 3.4.1 sieht man, dass sich im Rahmen von Rel Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel gar nicht unterscheiden, da man überhaupt nur *eine* Alternative betrachtet, unproblematisch die wirkliche Zukunft dar. Wenn aber überhaupt etwas von einem event e aus noch nicht festgelegt ist, dann die inhaltliche Beschaffenheit seines Zukunftslichtkegels.

Das vorangehende Kapitel macht also bereits deutlich, wieso die in Teil III entwickelte relativistische Raumzeitlogik mit Orts- und Bezugssystem-Operatoren um die Berücksichtigung von Alternativen aufgestockt werden muss, um das Problem des Raumartigen zu diskutieren. Dies soll in Teil IV geschehen.

TEIL IV

RELATIVISTISCHE RAUMZEITLOGIK MIT ALTERNATIVEN

ei mh bou lei a riqmein, a l l a deicon apo poi a j..
Apo poi a j grammh j; - Apo tauthj.

As coisas não têm paz.

KAPITEL 1

Verzweigte Raumzeit („Branching spacetime“)

1.1 Überblick

Im abschließenden Teil der Studie soll es an die endgültige Beantwortung ihrer Hauptfrage gehen: Steht an einem gegebenen event fest, was im Raumartigen, den „wings“, zu diesem event der Fall ist; und folgt daraus ein unschlagbares Argument für den Determinismus? Diese Frage stand seit Mitte der 60er Jahre des 20. Jahrhunderts im Mittelpunkt einer intensiv geführten Debatte, die nie zu einem klaren Abschluss gelangte. Die verschlungenen Pfade dieser Debatte bis zu Beginn der 90er Jahre nachzuvollziehen, wäre an dieser Stelle ermüdend. Wer sich darüber informieren will, der sei auf Anhang 1 verwiesen. Dort werden die einzelnen Beiträge eingehend dokumentiert und eingeschätzt. An dieser Stelle genügt es, sich vor Augen zu führen: Fast alle denkbaren Positionen wurden vertreten, doch keine konnte sich allgemein durchsetzen. Als denkbare Positionen kann man dabei nennen:

- Vergangenheitslichtkegel, Zukunftslichtkegel und Raumartiges zu einem event e, also die ganze Raumzeit, gehören *laut SR* an e zum Determinierten (Rietdijk, Putnam, Weingard, Maxwell).
- Der Vergangenheitslichtkegel ist „directly real“, das Raumartige, zumindest aber die Bezugssystem-relative Vergangenheit, sind „indirectly real“, der Zukunftslichtkegel ist „unreal“ (Lango, Fitzgerald).
- Die Bezugssystem-relative Vergangenheit ist bezugssystem-relativ als determiniert anzusehen, die Bezugssystem-relative Zukunft als indeterminiert (McCall).
- Nur der Vergangenheitslichtkegel, nicht aber das Raumartige zu e gehören (an e) zum Determinierten (Landsberg, z.T. Harris).
- Die Frage „Sind die ‚wings‘ determiniert?“ ist nicht richtig gestellt; man hat es mit einem Scheinproblem zu tun (Stein).

Zwei weitere denkbare Positionen sind:

- Vergangenheitslichtkegel und Raumartiges zu einem event e gehören an e (wenigstens manchmal) zum Determinierten, nicht aber der Zukunftslichtkegel; der Einschluss der „wings“ ist (wenigstens manchmal) zu befürworten.
- Es existiert an e eine Bezugssystem-unabhängige Vorderkante des Determinierten durch das Raumartige zu e hindurch.

Auf die beiden letztgenannten Positionen und ihr Verhältnis zueinander ist bereits in diesem Kapitel einzugehen. Der Grund dafür ist: Es gibt in der Debatte um das Problem der „wings“ eine Zeit vor und eine Zeit nach dem Erscheinen des Aufsatzes

„Branching Spacetime“ (BST) von Nuel Belnap im Jahre 1992. BST ist also im wahrsten Sinne des Wortes epochemachend. Dieser Text ist nicht nur ein neues Ansetzen zur Lösung des Problems. Seine Veröffentlichung bedeutete nicht weniger als einen Qualitätssprung in der ganzen Debatte. Denn erst seit „Branching Spacetime“ hat man für das Problem Modelle, über die man wirklich präzise reden kann.

Nun hat Belnap bereits in BST nachgewiesen, dass die erste der beiden Positionen *unter bestimmten Bedingungen* aus Vorannahmen folgt, die er für sehr plausibel hält. Und Nataša Rakić hat 1997 für die zweite Position als Ergebnis einer ausführlichen Studie plädiert, die bereits Belnaps Modelle berücksichtigt.

Belnap hat so sehr stilbildend gewirkt, dass man es begründen muss, wenn man von BST-Modellen abweicht und einen anderen Weg der Modellbildung bevorzugt. Im Folgenden soll tatsächlich ein anderer Weg verfolgt werden. Dafür ist zu sagen, wo ich mit Belnaps Ansatz nicht glücklich bin. Es sind dies im Wesentlichen drei Punkte:

- BST-Modelle verlangen immer Konvergenz der Lichtkegel. Bereits Prior hat aber gesehen, dass dies nur in der SR, nicht aber in der AR garantiert ist. Die in Teil III entwickelte allgemeinere Begrifflichkeit scheint mir hier zu bevorzugen zu sein.
- Auch wenn – was leicht zu übersehen ist[1] – der Einschluss der „wings“ ins Determinierte nur unter bestimmten Bedingungen folgt, so ist es mir doch lieber, wenn er unter gar keinen Bedingungen folgt. Auch sollte der *Ausschluss* der *kompletten* „wings“ aus dem Determinierten nicht von vornherein unmöglich sein. Dies ist aber bei Belnap der Fall.
- Das von Belnap befürwortete so genannten „prior choice principle“ erzwingt „upper cuts“ und schließt „lower cuts“ aus. Meiner Meinung nach sollte man aber Modelle in diesem Punkt neutral halten. In Kap. II 1 haben sich gute Gründe dafür ergeben, dass gerade „lower cuts“ oft realistisch sind, da, klassisch gesprochen, Entscheidungen eher *mit* Zeitpunkten als *an* Zeitpunkten erfolgen.

Für alle drei Punkte ist im Folgenden etwas ausführlicher zu argumentieren, bevor der in Teil III eingeschlagene Weg in Kap. IV 2 unter Einbeziehung von modalen Alternativen fortgesetzt wird. Auch der Ansatz von Rakić ist zuvor kurz vorzustellen, da sich manches im Folgenden im Kontrast dazu besser darstellen lässt.

[1] Belnap weist darauf in einer Fußnote der im Internet befindlichen Version von BST ausdrücklich hin. Ich danke Thomas Müller für den Hinweis darauf. Mein Argument in „Entscheidungen mit Zeitpunkten oder: Warum ich nicht an Belnaps ‚(Prior) Choice Principle‘ glaube“ (in: F.Stadler, M.Stölzner (Hrsg.), Akten des 28. Internationalen Wittgenstein-Symposiums in Kirchberg am Wechsel, 7.-13.8.2005) ist in diesem Punkt streckenweise zu allgemein.

1.2 Belnaps „Branching Spacetime“ (BST)

1.2.1 Der Grundansatz von BST

Eine verzweigte Raumzeit („branching spacetime“) im Sinne Belnaps besteht aus einer nichtleeren Menge „OW“ („our world“) von „possible point events“ (e_1, e_2, ...)[2] mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation ≤ darauf.[3] „$e_1 \leq e_2$“ ist zu deuten als „e_1 might causally influence e_2“. Dies ist natürlich gerade dann der Fall, wenn ein Lichtsignal oder ein Signal mit geringerer Geschwindigkeit, von e_1 ausgesandt, e_2 erreichen *könnte*.

Die Aufgabe einer Reihe von Definitionen in BST ist es, Alternativen („histories“) gewissermaßen aus dem tempo-spatial-modalen Kontinuum einer verzweigten Raumzeit herauszuschälen bzw. einzelne Weltblätter aus ihm herauspräparieren zu können. Dazu definiert Belnap zunächst die Gerichtetheit einer Teilmenge von OW. Eine *gerichtete* Teilmenge von OW ist eine solche Teilmenge von OW, für die gilt: Für beliebige e_1 und e_2 daraus gibt es immer noch ein weiteres mögliches event e, so dass sowohl e_1 als auch zu e_2 dazu in der ≤-Beziehung stehen, dieses mögliche event also eine gemeinsame obere Grenze für beide bildet.[4] Das heißt einfach, dass sich die Zukunftslichtkegel von e_1 und e_2 irgendwann überschneiden.

Eine Alternative („history“) wird sodann als *maximale* gerichtete Teilmenge von OW definiert.[5] Zwei mögliche events sind kompatibel („compatible“), wenn es eine Alternative gibt, zu der beide gehören.[6] Die Definition wird in der Umkehrprobe anschaulich: Man stelle sich vor, zwei mögliche events liegen auf zwei verschiedenen Weltblättern, und zwar in auf diesen Weltblättern inhaltlich divergierenden Bereichen. So gibt es, da das eine mögliche event zur einen Alternative gehört, das andere zur anderen und Alternativen nie in Richtung der Signalausbreitung wieder verschmelzen, kein mögliches event, das von beiden beeinflusst werden könnte. In der modalen Dimension haben zwei mögliche events die in den divergierenden Regionen zweier Weltblätter liegen, nie eine gemeinsame Obergrenze bezüglich der Relation der möglichen Signalübertragung in Form eines weiteren möglichen events. Ihre möglichen Zukunftslichtkegel überschneiden sich nicht, denn sie liegen in verschiedenen Alternativen.

Belnap kann nun definieren, was es für zwei mögliche events heißt, raumartig zueinander zu liegen („space-like separated“): Sie sind zwar kompatibel; es gibt also

---

[2] BST, Def.1. Die Kursivierung dient in dieser Studie zur Abgrenzung von events und *möglichen* events. Bei beiden handelt es sich um deutlich verschiedene Arten von Entitäten. Mögliche events entsprechen den tempo-modalen Positionen, events den Zeitpunkten der kombinierten Zeit- und Modallogik.

[3] BST, Postulate 1 (Def. 1*).

[4] BST, Def. 4: „Let E be a subset of OW. E is directed iff for all e_1, $e_2 \in$ E: there is some e_3 such that $e_3 \in$ E & $e_1 \leq e_3$ & $e_2 \leq e_3$“.

[5] Def.5: „Let h be a subset of OW. H is a history iff h is directed & there is no M such that M is directed and h$\subset$ M“.

[6] BST, Def.7: „e_1 and e_2 are compatible iff there is some h such that $e_1 \in$ h & $e_2 \in$ h“.

eine Alternative, die sie gemeinsam haben, sie liegen gleichsam auf demselben Weltblatt. Aber weder steht das erste event in der ≤-Beziehung zum zweiten noch umgekehrt.[7]

1.2.2 Vier Kritikpunkte an BST

1.2.2.1 Eingebaute Konvergenz

Belnaps Ansatz ist zweifellos elegant: Seine Definitionen fangen komplizierte Strukturen mit einfachen Mitteln ein. Doch die Eleganz hat ihren Preis, und zwar meiner Ansicht nach einen recht hohen: Der Anwendungsbereich von Belnaps Modellen muss so beschaffen sein, dass, falls zwei mögliche events keine gemeinsame Obergrenze besitzen, allein *modale* Separiertheit der Grund dafür sein kann. Das ist aber eine implizite Konvergenzforderung. Fehlt die Konvergenz der Lichtkegel, so gibt es ja Fälle, in denen *innerhalb derselben Alternative* (auf demselben Weltblatt) eine gemeinsame Obergrenze für zwei events fehlt. Dieser Punkt legt es nahe, es auch aus philosophischen Gründen nicht bei Belnaps bewundernswerter Sparsamkeit zu lassen, sondern Alternativen in ihrem eigenen Recht und nicht als an die Signalrelation gebundene Konstrukte bestehen zu lassen.

Auch die neueren Überlegungen von Müller weichen insofern von Belnaps Modellbildung ab, als er – ganz im Sinne des auch in dieser Studie verfolgen Ansatzes – ihre Modelle gewissermaßen als aufeinander geklebte alternative Raumzeiten („pasted spacetimes“)[8] definiert und nicht als tempo-spatial-modales Kontinuum, wie dies Belnap tut. Für seinen Zweck genügt ihm eine Sprache mit einem kontrafaktischen Modaloperator. Denn es geht ihm um einen relativistischen Blick auf die berüchtigten Einstein-Podolsky-Rosen-Korrelationen in der Quantenphysik.[9]

---

[7] BST, Def.11: „e_1 and e_2 are space-like separated iff (i) neither $e_1 \leq e_2$ nor $e_2 \leq e_1$ (ii) e_1 and e_2 are compatible“.

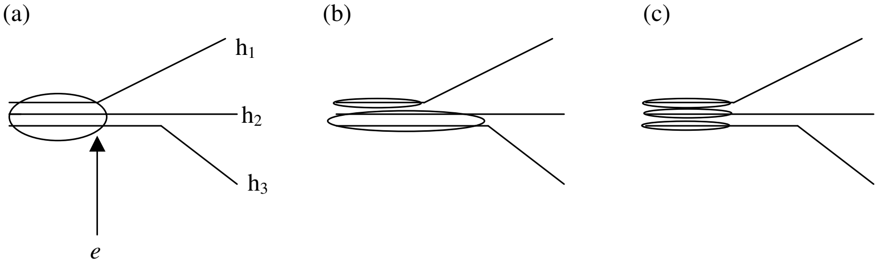
[8] Müller, „Branching space-time and the counterfactual conditional“ (2002).

[9] Vgl. zur einführenden Information zu EPR Esfelds „Einführung in die Naturphilosophie“ (2002), Kap. 5, besonders S.54-60. Dass EPR mit Hilfe des Ansatzes der „branching spacetime“ konkret diskutiert werden kann, hatte Belnap bereits 1992 vermutet, vgl. BST, S.416-421 (Abschnitt 11). Eingehendere Überlegungen dazu finden sich in McCall, „A Model of the Universe“ (1994), Kap.3, und Placek, Is Nature Deterministic? (2000) und Müller / Placek, Against a minimalist reading of Bell’s theorem (2001). Es ist eine aufregende Perspektive, dass vielleicht ein synthetisierender Blick auf Relativitätstheorie und Quantenphysik mit den relativ einfachen Mitteln der Modallogik möglich sein könnte – und das ausgerechnet im Zusammenhang mit den Experimenten, die beide Theorien scheinbar am weitesten auseinander klaffen lassen. Da das für das Problem dieser Studie nicht von Bedeutung ist, soll dieser Ansatz i.F. aber nicht genauer dargestellt werden. Die Entwicklung bleibt mit Aufmerksamkeit abzuwarten.

1.2.2.2 Das „prior choice principle“ schlägt manchmal das Raumartige dem Determinierten zu

Belnap sieht das technisch präzise Pendant zur philosophischen Frage „Are events in the wings ontologically definite or indefinite?“ in der Frage: „Do point events in the wings belong to the intersection $h_1 \cap h_2$?“.[10] Die Alternativen h_1 und h_2 sollen dabei dadurch charakterisiert sein, dass sie zumindest alle möglichen events im Vergangenheitslichtkegel von *e* gemeinsam haben. Es fragt sich nun: Gibt es eine natürliche Bedingung, die zur Konsequenz hat, dass in diesem Fall h_1 und h_2 *auch* die „wings“ gemeinsam haben müssen? Belnaps Antwort ist: ja. Die seiner Meinung nach natürliche Bedingung nennt er das „prior choice principle“.[11]

Belnaps Argument basiert auf dem Gedanken, dass an einem möglichen event verschiedene Bündel von Alternativen zur Auswahl stehen und dort eine Entscheidung zwischen ihnen ansteht. Jeweils ein solches Bündel nennt Belnap, relativ zu einem möglichen event, eine „elementary possibility“.[12] Alle Elemente dieser Bündel relativ zu einem möglichen event *e* zusammen müssen gerade wieder die Menge aller Alternativen bilden, in denen e überhaupt vorkommt. Ferner darf keine Alternative in mehreren Bündeln vorkommen. Die Menge der „elementary possibilities“ durch *e* ist also eine Partition, von Belnap notiert als: π_e. Aber es kann sich nicht um *irgendeine* Partition handeln, wie ein Seitenblick auf *e* im folgenden Modell motivieren mag:



Variante (a) ist nicht feinkörnig genug. Denn an e steht offensichtlich eine Entscheidung für oder gegen h_1 an. Variante (c) wiederum ist zu feinkörnig. Denn an *e* steht offensichtlich keine Entscheidung zwischen h_2 und h_3 an. An *e* sind nämlich h_2 und h_3 “obviously undivided“, was heißen soll,[13] dass es sogar in der (kausalen) Zukunft von *e* noch mindestens ein mögliches event gibt, das beide Alternativen gemeinsam haben (Belnap notiert dies als „$\approx_e$“). Variante (b) ist dagegen gerade die intuitiv erwünschte Partition, nicht zu grob und nicht zu fein. Ihr zufolge steht an e eine Entscheidung zwischen h_2 und h_3 einerseits und h_1 andererseits an, was die Partition $\{\{h_2, h_3\}, \{h_1\}\}$ ganz richtig wiedergibt. Es handelt sich bei ihr um die „finest

[10] BST, S.400.
[11] BST, Postulat 28.
[12] BST, S.402.
[13] BST, Def.18.

partition that respects the no choice principle“, welches besagt: „No elementary possibility can distinguish between h_1 and h_2 if $h_1 \approx_e h_2$“.[14] Und gerade als diese Partition wird π_e definiert. Gerade dann, wenn π_e mehr als *ein* Bündel von Alternativen enthält, steht an *e* eine Entscheidung an, und *e* ist damit „indeterministic“ zu nennen.[15] Befindet sich h_1 in einem Bündel von π_e und h_2 in einem anderen, so ist es angebracht, *e* einen „choice point“ zwischen h_1 und h_2 zu nennen.[16]

Mit dieser Begriffsbildung im Hintergrund kann Belnap nun ein „choice principle“ und das „prior choice principle“ formulieren:

Choice principle:[17] „For each two histories, there is at least one choice point.“

Prior choice principle:[18] „If *e* belongs to $h_1 - h_2$, then there is a choice point for h_1 and h_2, lying in the past of *e*.“

Das „choice principle“ impliziert, dass je zwei Alternativen überhaupt ein mögliches event gemeinsam haben. Das kommt einem Postulat der Verinselungsfreiheit gleich. Darüber hinaus besagt es (wie noch zu diskutieren sein wird): Je zwei Alternativen sollen immer ein letztes gemeinsames event haben.

Das „prior choice principle“ besagt noch mehr als das „choice principle“: Wenn *e* nicht sowohl zu h_1 als auch zu h_2 gehört („$h_1 - h_2$“), dann muss, von *e* aus gesehen, einmal die Entscheidung *in Form eines „choice point“* dafür angestanden haben, dass es einen in eine Alternative mit *e* darin und nicht in eine Alternative ohne *e* darin verschlagen hat. Zunächst klingt das harmlos und plausibel genug. Doch Belnap stellt nun *für einen bestimmten Fall* eine alles andere als harmlose Behauptung auf, mit der dem „prior choice principle“ entscheidende Bedeutung für die Frage beigemessen ist, ob zwei im Vergangenheitslichtkegel eines events *e* überein kommende Alternativen auch die „wings“ von *e* gemeinsam haben müssen:

> „[I]f any point in the wings failed to lie in the intersection $h_1 \cap h_2$, then the prior choice principle would be violated.“[19]

Ein mögliches event („point“) liegt natürlich gerade dann in der *Schnitt*menge von h_1 und h_2, wenn es sowohl zu h_1 als auch zu h_2 gehört. Daraus ergibt sich ein Argument für den Einschluss der „wings“ *im fraglichen Fall* in der folgenden Form:

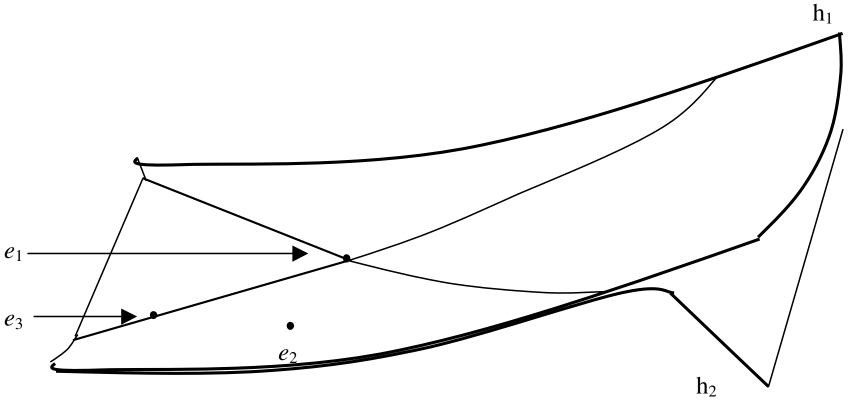
---

[14] BST, S.402, 4. Postulat, formale Fassung: Def.19.
[15] BST, Def.23.
[16] BST, Def.24.
[17] BST, Postulat 26.
[18] BST, Postulat 28. Belnap beweist im Anhang von BST, dass das Prior Choice Principle das Choice Principle impliziert, aber nicht umgekehrt.
[19] BST, Fact 31 (S.411).

P1: Das „prior choice principle“ ist plausibel und sollte als wahr angenommen werden.
P2: Der Nicht-Einschluss der „wings“ widerspricht manchmal dem „prior choice principle“
C1: Das „prior choice principle“ impliziert den Einschluss der „wings“
C2: Der Einschluss der „wings“ sollte manchmal als wahr angenommen werden.

Wie kommt Belnap auf die zweite Prämisse? Die Verbindung zwischen „prior choice principle“ und Einschluss der „wings“ liegt ja immerhin so wenig auf der Hand, dass Belnap zu Recht behauptet, das Argument enthalte im Bezug auf die „wings“ keinerlei „ad-hocery“.[20]

Betrachten wir eine Situation mit zwei Alternativen und e_1 als *einzigem „choice point“*. Im folgenden Fall muss das „prior choice principle“ für e_2 (in den „wings“ von e_1, in h_1 vorhanden, in h_2 nicht) verletzt sein, falls die beiden Alternativen nicht wirklich auch in den „wings“ von e_1 aufeinander kleben.



Doch warum? e_2 hat doch seinen Vergangenheitslichtkegel, und in diesem liegt z.B. e_3. Könnte sich e_3 nicht direkt auf der „Klebekante“ von h_1 und h_2 befinden, und h_1 und h_2 lägen im weiteren Bereich der „wings“ von e_1 nur locker aufeinander? Wäre dann e_3 damit nicht ein „choice point“ für h_1 und h_2? Man mag das zunächst für möglich halten (die Grafik *soll* in diesem Punkt doppeldeutig sein). Aber nach Belnaps Definitionen kann es nicht so sein: h_1 und h_2 sind nämlich bezüglich e_3 „obviously undivided“. Denn es gibt in der kausalen Zukunft von e_3 noch mindestens ein weiteres mögliches event, das sowohl zu h_1 als auch zu h_2 gehört: e_1. Allein an e_1 sind h_1 und h_2 nicht mehr „obviously undivided“. Denn in der kausalen Zukunft von e_1 liegt kein h_1 und h_2 gemeinsames mögliches event mehr. Eine Situation mit e_1 als einzigem „choice point“, in der das „prior choice principle“ *nicht* verletzt wird, muss demnach so beschaffen sein, dass alle möglichen events, die nur in einer der beiden Alternativen vorkommen, e_1 in ihrem *Vergangenheits*lichtkegel haben. Und das heißt, dass alle diese events im

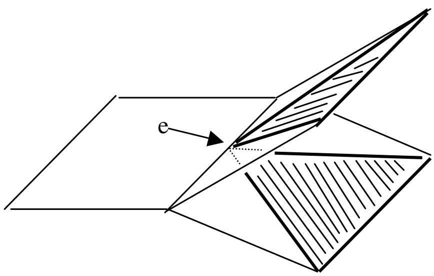
[20] BST, S.410.

*Zukunfts*lichtkegel von e_1 liegen. Genau das ist aber die Situation, in der sich h_1 und h_2 auch die „wings“ teilen.

Zunächst ist festzuhalten: Der Einschluss der „wings“ wäre, *wenn* sich das Argument verallgemeinern ließe, ein intuitiv äußerst unbefriedigendes Ergebnis. Man kann den Punkt auf zwei Arten darstellen:

(1) Gleichberechtigung. Machen wir uns noch einmal die Situation klar, die sich mit dem Einschluss der “wings” ergäbe: Warum soll gerade das völlig willkürlich ausgewählte event e_1 auf einmal festlegen, dass an e_2 tatsächlich keine Alternativen mehr offen stehen? Offenbar müssen alle events als Ausgangspunkte gleichberechtigt sein. Dann hätte man, wenn man von e_2 ausgegangen wäre, dasselbe Bild bekommen, nun aber mit Alternativen für den Zukunftlichtkegel von e_2, aber keine mehr für e_1? Das ist schwer zu deuten. Denn was soll es bei zwei raumartig zueinander liegenden events e und e‘ heißen, dass *von* e *aus gesehen* die kausale Zukunft von *e* nicht determiniert ist, *von e‘ aus gesehen* aber schon – und umgekehrt?

(2) Der in China umfallende Sack Reis. In Kap. II 2.3.2.2 hatte sich unter klassischen Voraussetzungen ergeben, dass eine Person X mit ihrer Entscheidung, von der Autobahn abzubiegen, nicht genau die Alternativen auswählt, in denen X von der Autobahn abbiegt, sondern lediglich die Alternativen ausschließt, in denen sie dort nicht abbiegt. *Zugleich* schließt nämlich die Entscheidung zum Umfallen eines Sacks Reis in China all diejenigen Alternativen aus, in denen der Sack Reis stehen bleibt, mithin auch die Alternativen, in denen er stehen bleibt und X von der A7 abbiegt. In Kap. II 3.3.1 ließ sich dieser Gedanke dahingehend vertiefen, dass der Einschluss der „wings“ im ontologischen Sinne zumindest unter klassischen Voraussetzungen absurd wäre:



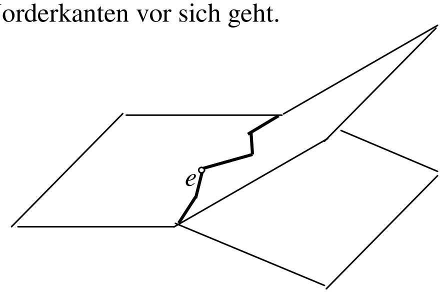
Zwar konnte man sagen: Nur am Zustandekommen oder an der Vermeidung von Ereignissen in diesem Bereich lässt sich *von e aus* bei h-artigem Weltverlauf bis t_e mitwirken. Doch warum sollte bei bis zu t_e h-artigem Weltverlauf *nur* noch offen stehen, was sich *von e aus* beeinflussen lässt, ansonsten sollte aber bereits alles feststehen? Denn warum sollte e der einzige Raumzeitpunkt sein, von dem aus sich zu t_e noch etwas in der Zukunft beeinflussen lässt? Vielmehr ergab sich als plausible Aussage: Welche Kandidaten zur Verwirklichung im Rennen bleiben, hängt nicht nur von dem ab, was X jetzt hier tut, sondern z.B. auch von dem, was sich jetzt anderswo tut. Es ist nicht einzusehen, warum sich *daran* unter relativistischen Voraussetzungen etwas ändern sollte.

Kurz: Der Einschluss der „wings“ ist derart unplausibel, dass er auch in solchen Modellen besser nicht vorkäme, bei denen man, der Einfachheit halber, nur zwei Alternativen und einen einzigen „choice point“ voraussetzt. Allein dies ist ein Grund, das „prior choice principle“ abzulehnen, wenn es nicht aus anderen Gründen überwältigend plausibel ist.

Allerdings ist die Situation für BST-Modelle im Allgemeinen nicht so schlimm, wie es zunächst aussieht. Im soeben diskutierten Fall war e_1 der einzige „choice point“ weit und breit. Das war für das Argument entscheidend. Das *einzige*, was e_3 im angegebenen Beispiel als „choice point“ disqualifizierte, war, dass e_3 gerade noch im Vergangenheitslichtkegel von e_1 lag. Hätte e_3 auch nur das kleinste Stückchen weiter vorne, also auch nur die kleinste Strecke in den „wings“ gelegen, so hätte es als weiterer „choice point“ zwischen den beiden Alternativen getaugt und verhindert, dass e_2 beiden Alternativen zugeschlagen werden muss. Man kann so viele „choice points“ einführen, wie man will, ohne das „prior choice principle“ zu verletzen, *solange diese nur alle raumartig zueinander liegen*. Nichts hindert an der Annahme, dass diese sogar dicht liegen. BST-Modelle lassen also eine raumweite „Vorderkante“ als Verzweigungsstelle zwischen Alternativen zu. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie diese aussehen kann:

- Es handelt sich um eine „gerade“ Verzweigung entlang eines Zeitpunkts eines SR-Koordinatensystems.
- Es handelt sich um eine Verzweigung entlang einer beliebig gezackten Gegenwart im Sinne des Ansatzes von Rakić (vgl. Kap. III 1.2.3.2).

Die bisher ausführlichste Rezeption von Belnaps Gesamt-Ansatz lässt sich denn auch im vierten Kapitel von Rakićs „Common Sense Time and Special Relativity“ (1997) finden, in dem sie modale Verzweigungen berücksichtigt. Allerdings steht ihre Aufarbeitung ganz im Dienste ihrer These, die sich bereits in Kap. III 1.2.3.2 als recht exzentrisch herausgestellt hat: Wenn man nur die enge Verbindung zwischen A- und B-Ordnung aufgebe, so könne man von einer primitiv gegebenen Bezugssystem-unabhängigen Gegenwart ausgehen, die in der grafischen Darstellung als wild gezackte Vorderkante des Realisierten erscheint. Weder erklärt sie die gesamten „wings“ zu einem gegebenen event für relativ zu diesem event determiniert, noch erklärt sie die gesamten „wings“ für nicht determiniert. Vielmehr ist sie der Auffassung, dass das modale „branching“ entlang den von ihr favorisierten gezackten ontischen Vorderkanten vor sich geht.



Die entscheidende formale Einschränkung, die sie dafür einführen muss, ist, dass für ein beliebiges event *e* und beliebige Geschichten H und H‘ die Gegenwartskante durch *e gleich* gezackt ist.[21] Das ist zu verlangen, denn sonst hätte man, bildlich gesprochen, keine vernünftige Klebekante zu Verfügung.

1.2.2.3 Das „prior choice principle“ schlägt nie die *kompletten* „wings“ dem Indeterminierten zu

Es ließ sich feststellen: Das „prior choice principle“ zwingt in *realistischen* Fällen nicht zum Einschluss der kompletten „wings“. Doch zugleich ist als Kehrseite festzuhalten: Es schließt auch den Ausschluss der *kompletten* „wings“ aus dem Indeterminierten aus. Es erlaubt keine Verzweigung direkt am Vergangenheitslichtkegel. Denn so wenig weit man e_3 im Beispiel auch ins Raumartige zu e_1 hinausrücken mag – ein wenig muss man es eben doch hinausrücken, wenn es als „choice point“ taugen soll. Und dann liegt ein kleines Stück der „wings“ in seiner kausalen Vergangenheit und muss beiden Alternativen zugeschlagen werden. Eine Verzweigungskante aus lauter dicht liegenden „choice points“, die ja allesamt raumartig zueinander liegen müssen, müsste immer ein Stück der „wings“ zu e_1 hinter sich abzäunen

Die bisherigen Überlegungen haben somit an einen Punkt geführt, an dem man sagen muss: Belnaps BST mit dem „prior choice principle“ und der Ansatz von Rakić sind nicht nur kompatibel. Sie konvergieren deutlich. Die beiden im Überblick noch getrennt formulierten Positionen sind für realistische Fälle (mit unendlich vielen, dicht gelagerten „choice points“) eigentlich zwei Beschreibungen derselben Ansicht. Denn es *könnte* zwar eine Bezugssystem-relative Verzweigung mit einem BST-Modell dargestellt werden. Aber im ganzen Ansatz von BST ist von Bezugssystemen nicht die Rede. Was hier modelliert werden soll, soll offenbar unabhängig vom Bezugssystem sein. Das ist ganz in Rakićs Sinn.

Rakićs Weiterentwicklung ihres Ansatzes aus dem 2. Kapitel ihres Buchs in Richtung modale Verzweigungen im 4. Kapitel trifft jedoch, als Weiterentwicklung, dieselbe Kritik wie der Ansatz selbst: Rakić verbindet nicht eigentlich „common sense“ und SR. Vielmehr versucht sie, der SR einen vermeintlichen „common sense“ überzustülpen, ohne der philosophischen Herausforderung durch die Relativitätstheorie wirklich zu begegnen.

[21] Rakić, a.a.O., S.116: „[W]e argue for a principle which says that if an event is in the past or in the present of another event in one history, then that is the case in all histories containing the two events“. S.117: „splitting of histories will occur, not at events, but at ‚possible presents of e‘“. Vgl. auch die Abbildung auf S.118.

1.2.2.4 Das „prior choice principle“ erlaubt keine „upper cuts“

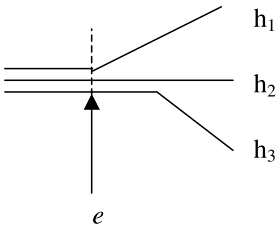
Der vorhergehende Abschnitt hat gezeigt: Dass das „prior choice principle“, wenn auch nur manchmal, zum Einschluss der „wings“ führt, ist so unplausibel, dass man es ablehnen sollte, wenn es nicht aus anderen Gründen überwältigend plausibel ist. Doch ist es das nicht? Es ist ja in der Tat sehr plausibel, dass gelten muss:

> „Wenn ein mögliches event *e* nicht sowohl zu h_1 als auch zu h_2 gehört (‚$e \in h_1 – h_2$‘), dann muss, von e aus gesehen, einmal die Entscheidung dafür angestanden haben, dass es einen in eine Alternative mit *e* darin und nicht in eine Alternative ohne e darin verschlagen hat.“

Wäre das nicht so, so müsste man wohl annehmen, dass man es gar nicht mit einem verinselungsfreien Modell zu tun hat, oder dass jedenfalls h_1 und h_2 überhaupt nie Alternativen zueinander waren. Es ist aber sehr plausibel, anzunehmen, dass zwei Alternativen wenigstens in einem möglichen event überein kommen bzw. dass zwei Alternativen, die in *e* übereinkommen, auch im Vergangenheitslichtkegel von *e* übereinkommen.[22] Doch auch wenn es ihm zum Verwechseln ähnelt - dies ist *nicht* das „prior choice principle“. Denn das besagt vielmehr:

> „Wenn *e* nicht sowohl zu h_1 als auch zu h_2 gehört (‚$e \in h_1 – h_2$‘), dann muss, von *e* aus gesehen, einmal die Entscheidung *in Form eines ‘choice point‘* dafür angestanden haben, dass es einen in eine Alternative mit *e* darin und nicht in eine Alternative ohne *e* darin verschlagen hat.“

Dass die Entscheidung die Form eines „choice point“ im Sinne von Definition 24 in Belnaps „Branching Space-Time“ haben muss, ist nämlich eine weit stärkere Forderung. Erinnern wir uns, dass sie sich am besten mit einem Längsschnitt wie dem folgenden motivieren ließ:



Entscheidend ist das Folgende: *e* sollte hier ein „choice point“ zwischen h_1 einerseits und h_2 und h_3 andererseits sein, aber noch keiner zwischen h_2 und h_3. Denn an *e* sind h_2

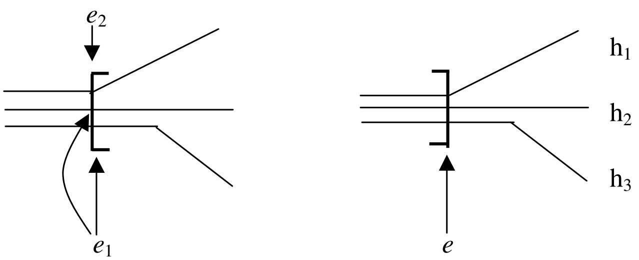
[22] Belnap setzt das vernünftigerweise voraus. Vgl. BST, Def.8, Fact 10 sowie, für das „bzw.“ S.399: „Since histories are closed downward, the shaded parts [past light-cones, N.St.] must be two pictures of the same points.“

und h_3 noch „obviously undivided“, h_1 und (z.B.) h_2 sollen es aber nicht sein. Und gerade das sollte ein Kriterium dafür sein, dass zwischen h_2 und h_3 noch keine Entscheidung ansteht, zwischen h_1 und (z.B.) h_2 dagegen schon. Das legt die folgende Erklärung nahe:

(a) Wenn es *nach e* noch weitere mögliche events gibt, in denen beide Alternativen überein kommen, kann es sich bei *e* noch nicht um einen Entscheidungspunkt zwischen beiden Alternativen handeln.
(b) Vielmehr muss ein Entscheidungspunkt ein solches mögliches event sein, das zwar in beiden Alternativen vorkommt, für das aber auch gilt: Dieses ist das „letzte“ mögliche event, mit dem es sich so verhält, d.h. es liegt nicht in der kausalen Vergangenheit irgendeines anderen möglichen events, das in beiden Alternativen vorkommt.
(c) Also gibt es zu zwei Alternativen immer einen Entscheidungspunkt, der so beschaffen ist, dass nach ihm nicht noch weitere mögliche events kommen, die in beiden Alternativen enthalten sind, sondern dass es sich bei ihm um das letzte so beschaffene mögliche event handelt.

Doch was wäre der Status dieser Erklärung? Bei näherer Betrachtung zeigt sich: Als Argument für das „prior choice principle“ ist sie entweder lückenhaft oder petitiös. Petitiös ist sie, wenn (c) eine Prämisse in einem Argument für das „prior choice principle“ sein soll. Denn (c) *ist* das „prior choice principle“. Lückenhaft ist die Erklärung, wenn man sie so auffasst, dass aus (a) und (b) (c) folgen soll. Denn (b) sagt zwar wie ein „choice point“ aussehen müsste, *wenn* es einen gibt, aber nichts darüber, dass es immer einen geben muss.

Kann man sich ein sinnvolles indeterministisches Szenario vorstellen, in dem es keinen „choice point“ gibt? Aber ja! Schon die vorangehende Darstellung lässt sich *fast* in diesem Sinn deuten:



Die vorangehende Darstellung entspricht der rechten Seite *dieser* Darstellung: *e* ist letztes gemeinsames mögliches event von h_1 einerseits und h_2 und h_3 andererseits. Aber es ist auch denkbar, dass es sich verhält, wie links dargestellt: *Es gibt gar kein letztes gemeinsames mögliches event*, sondern h_1 einerseits und h_2 und h_3 andererseits koinzidieren zwar für jedes mögliche event vor e_1 und e_2; e_1 und e_2 sind aber erste mögliche events, in denen sie divergieren. Zugleich ist angenommen, dass die möglichen events dicht geordnet sind. In diesem Fall gilt für *jedes* dargestellte mögliche event, das sowohl in h_1 als auch in h_2 vorkommt, dass davor ein weiteres mögliches event liegt, das sowohl in h_1 als auch in h_2 vorkommt. Das “prior choice principle” ist also im linken Szenario ständig verletzt und es kommt überhaupt kein “choice point” in seinem Sinne (bzw. im Sinne von Def. 24 in “Branching Space-Time”) vor. Gilt das “prior choice principle”, so ist ein solches Szenario ausgeschlossen.

Dennoch ist nicht zu sehen, was am Szenario auf der linken Seite absurd sein soll. Vielmehr hat sich unter klassischen Voraussetzungen in Kap. II 2.3.2.3 herausgestellt: Die Annahme von ersten divergierenden Punkten zweier Alternativen ist *mindestens* so plausibel wie die Annahme eines letzten gemeinsamen Punktes. Es sei daran erinnert, dass dort der wichtigste Gedanke der Gedanke der *Entscheidung durch Geschehen* war, und zwar *mit* einem Punkt, *nicht an* einem Punkt.

Ich argumentiere an dieser Stelle *nicht* dafür, dass jede Entscheidungssituation in einer indeterministischen Raumzeit im Sinne von ersten divergierenden Punkten und keine im Sinne eines letzten gemeinsamen Punktes analysiert werden sollte. Alles, worauf es mir hier ankommt, ist, festzuhalten: Es spricht so viel dafür, dass zumindest manchmal erste divergierende Punkte vorliegen, dass man diese Möglichkeit nicht *a priori* ausschließen sollte. Das “prior choice principle” Belnaps würde erste divergierende Punkte aber ausschließen. Also ist das “prior choice principle” Belnaps eine zu restriktive Forderung.[23] Es ist deshalb abzulehnen.[24]

Im Folgenden soll auch eine Verzweigung am Vergangenheitslichtkegel möglich sein. Sie wird sich zum Teil sogar als sehr plausibel erweisen. Bei der Feinstruktur einer Verzweigung sollte eine Modelldefinition nicht zu restriktiv sein. Selbst Modelle, bei denen *allein* die Spitze eines Lichtkegels nicht zu beiden von zwei relevanten Alternativen gehört, die Ränder des Kegels aber dennoch zu beiden Alternativen gehören, sollten erlaubt sein. Vielleicht sind sie für einen ernst genommenen Indeterminismus sogar wünschenswert.

---

[23] Mit dem “prior choice principle” sollte man auch das“choice principle” Belnaps ablehnen. Denn das “choice principle” ist zwar schwächer als das “prior choice principle”. Aber auch das schwächere Prinzip ist ein Prinzip, das in jedem Fall die Existenz eines Belnap’schen “choice points” zwischen Alternativen postuliert.

[24] Belnap selbst merkt bereits, dass die Frage, ob es letzte gemeinsame oder erste getrennte mögliche events in Alternativen gibt, entscheidend dafür ist, wie sich das „prior choice principle“ auswirkt (vgl. BST S.413 und Fact 50) Es scheint mir aber, dass er sich zu sehr an die grafische Darstellung hält, und „Aufeinanderkleben“ unkritisch mit inhaltlicher Identität assoziiert, ohne zu beachten, dass man es einer nicht ausgedehnten Faltkante gar nicht ansehen *kann*, ob auf ihr zwei Papierstücke noch aufeinander kleben oder nicht. Belnap merkt an (BST, S,413): „e_1 and e_2 will in some sense be ‚very close‘, No wonder it is hard to build this model of Our World with paper and cellophane tape“. Es genügt aber, was er in Fußnote 26 feststellt: „You can easily find an open set containing one but not the other.“

KAPITEL 2

Formale Sprachen für die verzweigte Raumzeit

2.1 Die Sprache LF×Rel

2.1.1 Definitionen für LF×Rel

Am Ende von Teil II wurde mit der Sprache LF×S5 mit ihren Weltbuch-Modellen eine Logik entwickelt, die den verzweigten tempo-modalen Strukturen der Sprache LF eine räumliche Dimension hinzufügte. Die Erweiterung von LF×S5 zur Sprache 3N ließ bereits erkennen, dass zwei weitere „N“-Operatoren so definiert werden können, dass sie auf den Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel eines Ereignisses verweisen.

Am Ende von Teil III wurden im Rahmen der relativistischen Raumzeitlogik Rel Möglichkeiten der formalen Übertragung der verschiedenen Lösungsansätze zum Seeschlachtproblem auf die relativistische Raumzeit diskutiert. Allerdings sind Rel-Modelle als bereits fertig gestellte Weltblätter aufzufassen, so dass die kausale Zukunft eines events ganz so wie seine Vergangenheit erscheinen musste. Das zeigt, dass im Rahmen von Rel die Berücksichtigung modaler Alternativen noch nicht möglich ist.

Es liegt sehr nahe, beide Ansätze zu einer umfassenden, sehr ausdrucksstarken Sprache zu vereinigen und das Problem der „wings“ abschließend in ihrem Rahmen zu diskutieren. Diese Sprache soll LF×Rel heißen. LF×Rel verschmilzt die LF×S5 genannte klassische Raumzeitlogik mit modalen Verzweigungen aus Kap. II 3 mit der Rel genannten relativistischen Raumzeitlogik ohne modale Verzweigungen aus Kap. III 2.

Das Alphabet von LF×Rel enthält das übliche aussagenlogische Vokabular und als Modaloperatoren die Zeichen „H“, „G“, „N“, „□“, „E“ und „×“. Die Formregeln sind wie üblich. Die Zeichen „P“, „F“, „M“, „◊“, „S“ und „+“ sind als „~ ξ ~“-Versionen der Grundoperatoren definiert.

Die Grundidee der Modelldefinition ist: Man geht vom Rel-Modell aus; an die Stelle einer einzigen Interpretationsfunktion, die den Satzbuchstaben pro event einen Wahrheitswert zuweist, tritt aber nun eine nichtleere Menge H von solchen Funktionen (h_1, h_2...). Jede von ihnen repräsentiert eine andere inhaltliche „Füllung“[1] der Eventmenge und stellt damit eine Alternative in der Raumzeit dar. Formeln werden nun für eine Zeit und einen Ort eines Koordinatensystems relativ zu einer Alternative bewertet. Es gehen also in die Bewertung einer Formel verschiedene Parameter ein,

[1] Diese Redeweise ist rein illustrativ zu verstehen und nicht etwa als Befürwortung einer „absolutistischen“ Position bezüglich der Raumzeit.

die aber zum Teil in enger Verbindung stehen: event, Zeitstelle, Ort, Koordinatensystem und Bewertungs-Alternative („mögliche Welt“). Eine Zeitstelle und ein Ort ist immer Zeitstelle und Ort *eines* events *im Rahmen eines* Koordinatensystems. Die Bewertung erfolgt deshalb auf ein Tupel der Form $\langle t_b(e), s_b(e), h \rangle$.[2]

Die fundamentalen Entitäten eines LFxRel-Modells sind in der Deutung events, nicht etwa *mögliche* events wie bei Belnap. Mögliche events verhalten sich zu events wie tempo-modale Positionen zu Zeitstellen der kombinierten Zeit- und Modallogik, die ja auch von Alternative zu Alternative anders „gefüllt“ sein können.

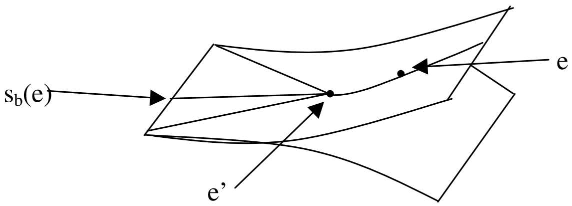
Es sei daran erinnert,[3] dass ein Rel-Modell immer auf einer normalen Lichtkegel-Struktur basiert. Jedem event der Eventmenge W wird demnach eine e einschließende, ganz bestimmte, über e hinaus nichtleere Teilmenge $\Delta(e)$ von W zugeordnet, die als der Vergangenheitslichtkegel von e gedeutet wird. Dabei sind die Vergangenheitslichtkegel insgesamt transitiv und dicht geordnet. Auch die Menge $\nabla(e)$ aller events, in deren Vergangenheitslichtkegel e liegt, der Zukunftslichtkegel von e, sollte über e hinaus nichtleer sein.

Ferner sei daran erinnert,[4] dass ein Koordinatensystem auf einer Lichtkegel-Struktur ein geordnetes Paar aus einer t- und einer s-Funktion ist. Die t-Funktion weist jedem event eine Teilmenge von W zu, deren Elemente als mit ihm gleichzeitig gelten; die s-Funktion weist ihm eine Teilmenge von W zu, die mit ihm als gleichortig[5] gelten. Die t-Funktion und die dazugehörige s-Funktion partitionieren die Eventmenge auf einleuchtende Weise, wenn sie einige in Kap. IV 3 diskutierte fundamentale Bedingungen erfüllen, deren Erfüllung für ein Rel-Modell verlangt wird. Auf der Eventmenge war dabei, abhängig vom Koordinatensystem („b“), die „früher-als“-Relation $<_b$ auf t-Werten (Zeitpunkten) und deren Konverse definiert.[6] Die Dichte und Randlosigkeit von $<_b$ und $>_b$ für beliebiges b ließ sich aus den Eigenschaften der normalen Lichtkegel-Struktur herleiten.[7]

Für beliebige h, h’ aus der Alternativenmenge H, b aus der Menge der Koordinatensysteme B und e aus W soll gefordert sein: Es gibt wenigstens ein event e’ mit $s_b(e)=s_b(e')$ und $t_b(e') <_b t_b(e)$, so dass h und h’ auf dem gesamten Vergangenheitslichtkegel von e’ “gleich beschriftet” sind.

---

[2] Diese Auffassung lässt sich ohne weiteres umnotieren in eine Bewertung auf ein Tupel $\langle e,b,h \rangle$, da e bezüglich b genau einen t- und einen s-Wert hat. Die etwas umständlichere Notation lässt sich aber viel besser an die Überlegungen aus den Teilen I – III anschließen, die das Paradigma der klassischen Physik voraussetzten. Sie erinnert zudem daran, dass die Relativitätstheorie eine Theorie der Koordination von events zu Zeiten und Orten ist.
[3] Vgl. Kap. III 2.3.1.1.
[4] Vgl. Kap. III 2.3.1.2.
[5] Statt „gleichortig“ mag man auch „ortsgleich“ sagen.
[6] Vgl. ebd.
[7] Vgl. B14 zu Kap. III 2.



Das ist eine auf Vergangenheitslichtkegel abgeschwächte Forderung der *Verinselungsfreiheit.* Sie ist schwächer als die entsprechende Forderung für LF×S5,[8] die letztlich besagte, dass es für zwei Alternativen wenigstens einen *Zeitpunkt* geben soll, bis zu einschließlich dem sie *raumweit* "gleich beschriftet" sind. Denn diese Forderung muss wegen der Bezugssystem-Relativität von Zeitpunkten in einer relativistischen Raumzeitlogik unangemessen stark erscheinen.[9]

Neu im Vokabular gegenüber Rel sind die Zeichen „□" und „N", die aus LF×S5 übernommen werden. Die globale Kutschera-Box[10] „□" bereitet keine Probleme, da sie keine eigene Zugänglichkeitsrelation benötigt. „N" soll mit Hilfe einer Bezugssystem-abhängigen Zugänglichkeitsrelation $A^N_{e,b}$ charakterisiert werden, die definiert ist wie folgt:

> h $A^N_{e,b}$ h' gdw für jedes e' aus $\{e' \mid t_b(e') \leq_b t_b(e)\}$ und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$.

Demnach sind h und h' an einem event e relativ auf ein Bezugssystem b gerade dann Alternativen, wenn sie bis zu einschließlich dem Zeitpunkt von e relativ zu b „gleich beschriftet" sind. Diesen Zeitpunkt kann man sich als Faltkante vorstellen, die, je nach Bezugssystem, ein Weltblatt in einem anderem Winkel faltet[11] und dann nur mit ebenso gefalteten und bis zur Kante gleich beschrifteten Blättern zusammenpasst.

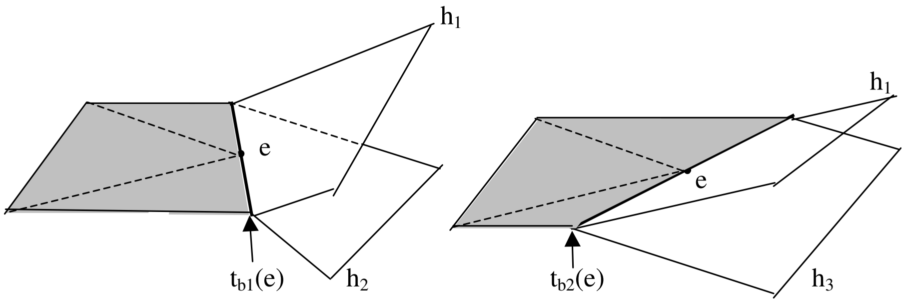
---

[8] Vgl. Kap. II 3.2, Definition des LF×S5-Modells, Punkte 3 und 4.

[9] Fordert man dies nicht (und zwar relativ auf *jedes* Bezugssystem), so ist auch das typische Schema $\ulcorner \Diamond\alpha \rightarrow \mathrm{PMF}\alpha \urcorner$ für die Verinselungsfreiheit, auf das im Zusammenhang mit LF hingewiesen wurde (vgl. III 1.3, III 3.2), nicht LF×Rel-allgemeingültig. Zu einem Gegenbeispiel vgl. unten B7, wo das entsprechende Schema mit „M_Δ" für eine Erweiterung von LFxRel bewiesen wird.

[10] Vgl. Kap. II 1.2.

[11] Dass das in jedem Winkel möglich sein soll, setzt voraus, dass die Natur entlang jeder Weltlinie ein „busy chooser" im Sinne von Belnap et al. „Facing the Future" ist (vgl. S.49f), also ständig Alternativen ausgeschlossen werden. Die Möglichkeit, in jedem Winkel eine „Faltkante" zu erreichen, wäre ja eingeschränkt, denn man muss sie sich auch aus lauter lokalen Verzweigungen zusammengesetzt vorstellen können. Dies ist aber nicht etwa eine Einschränkung für die Anwendbarkeit von LF×Rel, sondern vielmehr ein Argument dafür, dass die Natur überall und ständig als „busy chooser" aufzufassen ist: Dass eine Faltkante in jedem Winkel möglich sein muss, ist eine natürliche Folge daraus, dass die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems ja ganz willkürlich ist.



Links: h_1 und h_2 sind bis zu einschließlich $t_{b1}(e)$ gleich beschriftet. Deshalb: $h_1\ A^N_{e,b1}\ h_2$.
Rechts: h_1 und h_2 sind bis zu einschließlich $t_{b2}(e)$ gleich beschriftet. Deshalb: $h_1\ A^N_{e,b2}\ h_2$.

Nach diesen vorangehenden Klärungen lässt sich die Modelldefinition für LFxRel formulieren wie folgt:

Ein **LFxRel-Modell** ist ein Quintupel $\langle W, \Delta, B, H, V\rangle$, so dass gilt:
1. W ist eine nichtleere Menge [von events];
2. Δ ist eine Funktion, so dass gilt: $\langle W, \Delta\rangle$ ist eine normale Lichtkegel-Struktur;
3. B ist eine nichtleere Menge von Koordinatensystemen auf $\langle W, \Delta\rangle$;
4. H ist eine nichtleere Menge von Interpretationsfunktionen, so dass gilt:
   (1) für jedes h aus H gilt: h weist jeder *atomaren* Formel für jedes e aus W genau einen Wert aus {1,0} zu;
   (2) für alle h, h‘ aus H, b aus B und e aus W und jede *atomare* Formel α gilt: es gibt mindestens ein e' aus W mit $s_b(e)=s_b(e')$ und $t_b(e')<_b t_b(e)$, so dass für alle e“ mit $e“ \in \Delta(e‘)$ gilt: $h(\alpha,e“) = h'(\alpha,e“)$ [Verinselungsfreiheit];
5. V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Tupel $\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle$ mit b aus B, e aus W und h aus H genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei gilt:

(0) $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle) =1$ gdw α eine atomare Formel ist und $h(\alpha, e)=1$;
(i) $V(\sim\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=0$;
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=0$ oder[&] $V(\beta,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$;
(iii) $V(\mathsf{E}\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $t_b(e') = t_b(e)$ und $s_b(e)\ A_b\ s_b(e')$ gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e'), h\rangle)=1$;
(iv) $V(\mathsf{G}\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e) <_b t_b(e')$ gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e'), h\rangle)=1$;
(v) $V(\mathsf{H}\alpha, \langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle e' mit $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e') <_b t_b(e)$ gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e'), s_b(e'), h\rangle)=1$;
(vi) $V(\times\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle b' aus B gilt: $V(\alpha,\langle t_{b'}(e), s_{b'}(e), h\rangle)=1$.

(vii) $V(\Box\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle h' aus H gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h'\rangle)=1$
(viii) $V(N\alpha, \langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle h' aus H mit $h\ A^N_{e,b}\ h'$ gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h'\rangle)=1$.

Die Allgemeingültigkeit ist definiert wie zu erwarten: Eine Formel ist LF×Rel-allgemeingültig gdw sie für jedes Bewertungstupel jedes LF×Rel-Modells den Wert 1 erhält.

Die Operatoren behalten im Wesentlichen ihre aus LF×S5 und Rel bekannte Deutung. Allein die Deutung von „N" als „es ist notwendig, dass" wird sich als diskussionsbedürftig herausstellen.

2.1.2 Überlegungen zur Axiomatik von LF×Rel

Das folgende Herleitungsspiel ist eine einfache Addition der für LF×S5 und Rel vorgeschlagenen Herleitungsspiele (mit Dichte und Randlosigkeit für die Zeitoperatoren):

- PC-Basis
- S5-Axiome für „E", „×", „□", „N"
- K_{lin} mit Dichte und Randlosigkeit für „G" und „H"
- Interaktionsgesetze für Zeit- und Ortsoperatoren
  (chr-FE) $\ulcorner FE\ \alpha \rightarrow EF\alpha\urcorner$ (chr-PE) $\ulcorner PE\ \alpha \rightarrow EP\alpha\urcorner$
- Interaktions-Gesetze für Zeit- und Modaloperatoren
  (PN) $\ulcorner PN\ \alpha \rightarrow NP\ \alpha\urcorner$ [Brückenaxiom]
  (□/N) $\ulcorner \Box\ \alpha \rightarrow N\ \alpha\urcorner$ [Box-Hierarchie]
  (com) $\ulcorner \Diamond P\ \alpha \equiv P \Diamond \alpha\urcorner$ $\ulcorner \Diamond F\ \alpha \equiv F \Diamond \alpha\urcorner$ [Produkt-Gesetze]
  (chr) $\ulcorner P\Box\ \alpha \rightarrow \Box P\ \alpha\urcorner$ $\ulcorner F\Box\ \alpha \rightarrow \Box F\ \alpha\urcorner$
- Interaktions-Gesetze für Orts- und Modaloperatoren
  (com-◊S) $\ulcorner \Diamond S\ \alpha \equiv S\Diamond\alpha\urcorner$ (chr-◊E) $\ulcorner \Diamond E\ \alpha \rightarrow E\Diamond\alpha\urcorner$
  (com-MS) $\ulcorner MS\ \alpha \equiv SM\alpha\urcorner$ (chr-ME) $\ulcorner ME\ \alpha \rightarrow ME\Diamond\alpha\urcorner$
- Interaktions-Gesetze für Zeit- Orts- und Bezugssystem-Operatoren
  (Rel-1) $\ulcorner +F\ \alpha \rightarrow FS{+}\alpha\urcorner$ (Rel-2) $\ulcorner +P\ \alpha \rightarrow PS{+}\alpha\urcorner$
  (Rel-3) $\ulcorner F{\times}S\ \alpha \rightarrow {\times}SF\ \alpha\urcorner$ (Rel-4) $\ulcorner P{\times}S\ \alpha \rightarrow {\times}SP\ \alpha\urcorner$
  (Rel-5) $\ulcorner F{+}E\ \alpha \rightarrow {+}EF\ \alpha\urcorner$ (Rel-6) $\ulcorner P{+}E\ \alpha \rightarrow {+}EP\ \alpha\urcorner$
  (Rel-7) $\ulcorner +F{\times}H\ \alpha \rightarrow {\times}H\ {+}F\ \alpha\urcorner$ (Rel-8) $\ulcorner +P{\times}G\ \alpha \rightarrow {\times}G\ {+}P\ \alpha\urcorner$
- Herleitungsregeln: Subst, MP und NEC-Regeln für „G", „H", „E", „□", „N" und „×".

Zweifellos ist dieses Herleitungsspiel, *wenn* es für LF×Rel korrekt ist, bereits ein ziemlich leistungsfähiges Herleitungsspiel für LF×Rel. Denn es macht nicht nur alle bisher herleitbaren LF×S5-Formeln und alle bisher herleitbaren Rel-Formeln zusammen herleitbar, sondern aufgrund des reichen Vokabulars von LF×Rel auch eine Fülle von weiteren Formeln, in denen sowohl Alternativen- als auch Bezugssystem-Operatoren enthalten sind.

In der Tat ist dieses Herleitungsspiel, ganz im Sinne der in Kap. I 1.2.2.1. und Kap. I 2 referierten Ergebnisse zu Fusionen von Modallogiken, korrekt **[B1]**. Das Argument dafür etabliert nebenbei das stärkere Ergebnis, dass alle LF×S5-allgemeingültigen und alle Rel-allgemeingültigen Schemata auch LFxRel-*allgemeingültig* sind – ganz unabhängig von ihrer *Herleitbarkeit* mit der angegebenen fragmentarischen Axiomatik. LF×Rel ist also semantisch gesehen eine konservative Erweiterung von LF×S5 und von Rel.

Das *angegebene* Herleitungsspiel ist wegen der LF×Rel-Allgemeingültigkeit von „p→Np“ und von „p→×p“ nicht vollständig. Dass es überhaupt eine vollständige Axiomatik für LF×Rel gibt, ist zwar durch die Allgemeingültigkeit dieser Formeln nicht ausgeschlossen.[12] Es ist aber aufgrund der Dimensionenzahl unwahrscheinlich.[13]

Man wird das angegebene Herleitungsspiel so leistungsfähig wie möglich machen wollen. Es stellen sich also die Fragen: Gibt es für LF×Rel überhaupt Interaktions-Gesetze, die die Bezugssystem-Operatoren und die Alternativen-Operatoren miteinander verbinden? Tritt eine Interaktion zwischen diesen Sorten von Operatoren überhaupt auf, oder bleiben sie, wie bei einer Fusion, ganz unabhängig voneinander? Zunächst zeigt sich eine weitgehende Unabhängigkeit von „N“ und „×“:

- Weder impliziert ⌜Nα⌝⌜×α⌝, noch umgekehrt **[B2]**.
- Kein einziges der (com)- und (chr)-Gesetze für „N“ und „×“ gilt.

Der erste Punkt ist kaum überraschend, der zweite schon. Denn man sollte zunächst nicht erwarten, dass es etwas ausmacht, ob man zuerst das Bezugssystem und dann die Alternative „umschaltet“ oder ob man es umgekehrt macht. Tatsächlich macht es aber einen Unterschied, so dass die folgenden Schemata sämtlich *nicht* LF-Rel-allgemeingültig sind:

(chr +N) ⌜+Nα → N+α⌝ bzw. ⌜M×α → ×Mα⌝
(com +M) ⌜+Mα → M+α⌝ bzw. ⌜×Nα → N×α⌝
(com M+) ⌜M+α → +Mα⌝ bzw. ⌜N×α → ×Nα⌝ **[B3]**.

Auch das als Erweiterung des typischen LF-Schemas ⌜PNα → NPα⌝ vielleicht zu erwartende ⌜+P N α → N +P α⌝ ist nicht allgemeingültig. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, dass es in LF×Rel spezielle Interaktions-Gesetze für “N” und “ ×” gibt. Aber es ist mir bisher nicht gelungen, eines zu finden. Leicht zu finden sind dagegen charakteristische Theoreme für LF×Rel für *Satzbuchstaben*, die aber im Herleitungsspiel nichts zu suchen haben, z.B.:“×p ≡ Np”,“×Pp → NPp” (nicht aber “NPp → ×Pp“, immerhin jedoch “NPp → ×PSp“) **[B4]**.

Ganz unproblematisch, wenn auch leider weniger interessant, sind die Interaktions-Gesetze für die nicht-historizistische Kutschera-Box “□” mit den Bezugssystem-Operatoren. Es gelten sämtliche (com)- und (chr)-Gesetze, also:

---

[12] Vgl. das zu LF Ausgeführte in II 1.7.

[13] Bedeutende Ergebnisse zur vollständigen Axiomatisierbarkeit einer auf BST-Modellen beruhenden, etwas weniger expressiven Sprache im Sinne des Ockhamismus hat Hu Liu von der University of New South Wales im September 2005 auf der Tagung „Branching space-times“ in Krakau vorgetragen. Diese Ergebnisse sind meines Wissens noch nicht veröffentlicht.

(chr +□) ⌜+□α → □+α⌝ bzw. ⌜◊×α → ×◊α⌝
(com +◊) ⌜+◊α → ◊+α⌝ bzw. ⌜×□α → □×α⌝
(com ◊+) ⌜◊+α → +◊α⌝ bzw. ⌜□×α → ×□α⌝ **[B5]**.

Faute de mieux sollte man zunächst diese Schemata als LF×Rel-typisch festhalten.

2.1.3 Erweiterungen auf Rel^{pl} und andere Verfeinerungen von Rel

Statt Rel kann man als Komponente für eine Verschmelzung mit LF×S5 auch eine der Verfeinerungen von Rel nehmen, z.B. Rel^{pl} für volle Modelle (in denen für jede Achsenneigung ein Bezugssystem zur Verfügung steht) oder Rel^{root} (wenn man annimmt, dass sich alle Vergangenheitslichtkegel einmal überschneiden) oder SRel (für SR-Modelle mit ihren konvergenten Zukunftslichtkegeln). Entsprechend wird man die fragmentarische Axiomatik anreichern

- für Rel^{pl} um ⌜+F+Fα → +F+α⌝ und die Goldblatt-Axiome (vgl. Kap. III 2.3.3.4)
- für Rel^{root} zusätzlich um ⌜+P×Hα → ×H+P+α⌝
- für SRel zusätzlich noch um ⌜+F×Gα → ×G+F+α⌝.

Wie in Kap. III 2 ausgeführt, wird dann für Rel^{pl} eine “Axiomatik” für K_t mit S4-Axiom, Unendlichkeit und Dichte herleitbar, und zwar mit “F_k” = “+F+”, “G_k” = “×G×”, “P_k” = “+P+” und “H_k” = “×H×”, für SRel sogar eine entsprechende “Axiomatik” mit S4.2-Axiomen (“Prior-Fragment”).

2.2 Eine Erweiterung von LF×Rel: die Sprache 3N×Rel

2.2.1 Drei „Notwendigkeits“-Operatoren im relativistischen Kontext

Statt mit LF×S5 kann man Rel auch mit einer Erweiterung von LF×S5 verschmelzen, z.B. 3N. Das ist für die Anwendung von großer Bedeutung. Denn man mag Zweifel daran haben, ob man nicht, neben dem Bezugsystem-relativen „N“-Operator, einen weiteren „N“-Operator zur Verfügung haben sollte, der Bezugssystem-*invariant* ist: Wer die „wings“ mit einschließen will, wird gerne als relevante „Zugänglichkeitsfläche“ für Alternativen an einem event den Vergangenheitslichtkegel *und* die gesamten „wings“ dieses events haben wollen. Und wer den Ausschluss der “wings“ befürwortet, der wird gerne als relevante „Zugänglichkeitsfläche“ für Alternativen an einem event *nur* den Vergangenheitslichtkegel dieses events haben wollen. Vertreter beider Ansichten werden vielleicht daran zweifeln, ob man „N“ überhaupt vernünftig als Notwendigkeitsoperator deuten kann. Aber solange sie ihre bevorzugten Zeichen, „N_∇“ und „N_Δ“ zur Verfügung haben, müssen sie ihn ja nicht benutzen.

Definitionstechnisch ist der Ausbau von LF×Rel zu 3N×Rel leicht zu bewerkstelligen. Man fügt „N_Δ“ und „N_∇“ dem Alphabet hinzu, hält die üblichen Formregeln fest und definiert „N_Δ“ als „~ M_Δ ~“ und „M_∇“ als „~N_∇~“. Sodann definiert man zwei weitere Zugänglichkeitsrelationen $A^{N\Delta}$ und $A^{N\nabla}$ wie folgt über die Gleichbeschriftung des Vergangenheitslichtkegels bzw. über die Gleichbeschriftung des Komplements zum Zukunftslichtkegel:

h $A^{N\Delta}{}_e$ h’ gdw für jede atomare Formel α und jedes e’ aus Δ(e) gilt:
h(α,e’) = h’(α,e’).
h $A^{N\nabla}{}_e$ h’ gdw für jede atomare Formel α und jedes e’ aus W \ ∇^-(e) gilt:
h(α,e’) = h’(α,e’).

Schließlich ergänzt man die Wahrheitsbedingungen um:

(ix) $V(N_\Delta\alpha, \langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle h’ aus H mit h $A^{N\Delta}{}_e$ h‘gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h'\rangle)=1$.
(x) $V(N_\nabla\alpha, \langle t_b(e), s_b(e), h\rangle)=1$ gdw für alle h’ aus H mit h $A^{N\nabla}{}_e$ h‘gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e), s_b(e), h'\rangle)=1$.

Was lässt sich über die beiden neu eingeführten Operatoren und ihr Zusammenspiel mit den anderen Operatoren sagen? Man wird sofort vermuten, dass alles über „N_Δ“ und „N_∇“ in Kap. II 3.3.2 Festgestellte weiter gilt. In der Tat lässt sich das leicht zeigen **[B6]**. Auch die Gegenbeispiele in Kap. II 3.3.2 lassen sich ohne weiteres zu 3N×Rel-Modellen umdeuten, bei denen jeweils nur *ein* Bezugssystem dargestellt ist. Es lässt sich also sofort festhalten:

- „N_Δ“ und „N_∇“ sind S5-artige Operatoren.
- Die Box impliziert „N_Δ“, „N_Δ“ impliziert „N“, und „N“ impliziert „N_∇“.
- Zwischen allen Alternativen-Operatoren gelten (com)- und (chr)-Gesetze.
- Dagegen gelten keinerlei (com)- und (chr)-Gesetze zwischen „M_Δ“/„N_Δ“ und den Ortsoperatoren und zwischen „M_∇“/„N_∇“ und den Ortsoperatoren.
- Daraus folgt, dass auch (rom)-Formeln *nicht* gelten wie z.B. „$SM_\Delta Sp \rightarrow EM_\Delta Sp$“.
- Da auf einer normalen Lichtkegel-Struktur die maximale Vorwärts- und Rückerstreckung sowie die Kegelinklusion (vgl. Kap. II 3.3.2.1) immer gegeben ist, gelten aber die Historizitäts-Schemata $\ulcorner PN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta P\alpha\urcorner$ und $\ulcorner PN_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla P\alpha\urcorner$.

Außerdem lässt sich feststellen:

- Es gilt das typische Schema für die Verinselungsfreiheit, nur mit „M_Δ“ statt mit „M“, also $\ulcorner \Diamond\alpha \rightarrow PM_\Delta F\alpha\urcorner$.
- Es gelten *für Satzbuchstaben* charakteristische Mischformeln wie „$N_\Delta Pp \rightarrow \times NPSp$“, „$\times NPp \rightarrow N_\Delta Pp$“, „$+NPp \rightarrow N_\Delta PSp$“, „$\times p \equiv N_\Delta p$“, „$\times p \equiv N_3 p$“ **[B7]**.
- Da die Zugänglichkeitsrelationen für „N_Δ“ und „N_∇“ Bezugssystem-invariant sind, sollte es nun wirklich keinen Unterschied machen, ob man zuerst die Achsenneigung und dann die Alternative wechselt oder umgekehrt. Tatsächlich gelten die (com)- und (chr)-Gesetze zwischen „+“/“×“ und „M_Δ“/„N_Δ“ und

zwischen „+“/“×“ und „M_∇“/„N_∇“, während dies zwischen „+“/“×“ und „M“/“N“ ja nicht der Fall war **[B8]**.

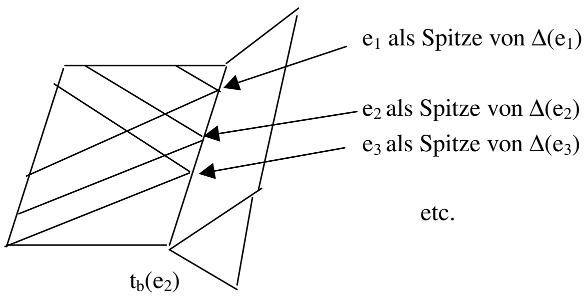
Die vorgeschlagene fragmentarische Axiomatik für LFxRel lässt sich somit, unter Hinzufügung von NEC-Regeln für „N_Δ“ und „N_∇“, zu einer leistungsfähigen und korrekten fragmentarischen Axiomatik für 3NxRel aufstocken um:

- S5-Axiome und NEC-Regel für „N_Δ“
- S5-Axiome und NEC-Regel für „N_∇“
- Hierarchie-Gesetze: $\ulcorner \Box\, \alpha \rightarrow N_\Delta\, \alpha \urcorner$ $\ulcorner N_\Delta\alpha \rightarrow N\, \alpha \urcorner$ $\ulcorner N\alpha \rightarrow N_\nabla\, \alpha \urcorner$
- Historizitäts-Gesetze: $\ulcorner PN_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta P\alpha \urcorner$ $\ulcorner PN_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla P\alpha \urcorner$
- Verinselungsfreiheit: $\ulcorner \Diamond\alpha \rightarrow PM\Delta F\alpha \urcorner$
- (com)- und (chr)-Gesetze: $\ulcorner +M_\Delta\alpha \equiv M_\Delta{+}\alpha \urcorner$ $\ulcorner +N_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta{+}\alpha \urcorner$
  $\ulcorner +M_\nabla\alpha \equiv M_\nabla{+}\alpha \urcorner$ $\ulcorner +N_\nabla\alpha \rightarrow N_\nabla{+}\alpha \urcorner$

2.2.2 Die Definierbarkeit der Bezugssystem-relativen Zugänglichkeit mittels der Zugänglichkeit über den Vergangenheitslichtkegel

Für volle Strukturen kommt man leicht zu folgender Vermutung: „N_Δ“ und „N_∇“ sind für volle Modelle, also für $3N{\times}Rel^{pl}$, *definierbar*, und zwar „N_∇“ als „+N“ und „N_Δ“ als „×N“. Diese Vermutung ist ziemlich verlockend, aber falsch. Man kann sich das mit Gegenbeispielen für beide Implikationsrichtungen klarmachen, die im Wesentlichen davon abhängen, dass sich mit dem Wechsel des Koordinatensystems auch die Ortskoordinaten ändern **[B9]**.

Es gilt aber: Die Bezugssystem-relative Zugänglichkeitsrelation A^N lässt sich mit Hilfe der Bezugssystem-unabhängigen Zugänglichkeitsrelation $A^{N\Delta}$ formulieren und muss dann nicht mehr als primitiv vorausgesetzt werden **[B10]**. Man macht sich leicht anschaulich klar, wieso:



Die Vergangenheitslichtkegel der events auf $t_b(e_2)$ in der Abbildung zusammen genommen ergeben nämlich gerade die Zugänglichkeitsfläche für A^N an e_2 mit $t_b(e_2)$ als Vorderkante.

2.2.3 Erste Überlegungen zur Deutung von „N_Δ“ in 3N×Rel

Am Ende von Teil II musste eine ontische Deutung von „N_Δ“ und „N_∇“ noch recht exzentrisch wirken. „N_Δ“ ließ sich als „es ist wissbar, dass“ lesen, und „N_∇“ als „es ist nicht (mehr) beeinflussbar, ob“. Einzig „N“ schien die ontische Deutung „Es steht faktisch fest, dass“ zu erlauben. Die Einschätzung dürfte sich unter dem Eindruck der Relativitätstheorie zunächst gerade umgekehrt haben: Während eine ontische Deutung des Bezugssystem-abhängigen „N“-Operators nur noch schwer vorstellbar scheint, entspricht diese Deutung für „N_Δ“ bzw. für „N_∇“ offenbar genau den Optionen „Nur der Vergangenheitslichtkegel ist determiniert“ und „Der Vergangenheitslichtkegel *und* die ‚wings‘ sind determiniert“.

Die zweite Option, der Einschluss der „wings“, wurde aber in Kap. IV 1 schon als wenig plausibel erwiesen. Auf den Operator „N_∇“ soll daher im Folgenden nicht weiter eingegangen werden.

Wie verhält es sich mit „N_Δ“? Deutet man „N_Δ“ als „es steht faktisch fest, dass“, so relativiert man das Feststehende konsequent auf das Bewertungs-event und eine bestimmte Art der „Füllung“ von dessen Vergangenheitslichtkegel. Als Konsequenz liegt nahe, dass der Bereich des Wissbaren und der Bereich des Feststehenden nunmehr zusammenfallen. Es gäbe demnach keinen Bereich des zwar ontisch Determinierten, aber epistemisch prinzipiell nicht Determinierten wie im klassischen Bild der LF×S5-Modelle. Die Grenze des ontisch Feststehenden - in der früheren Konzeption eine breite Vorderkante der Entwicklung -, scheint nun an zwei Seiten gleichsam zurückgeklappt bis zur Koinzidenz mit dem Bereich des Wissbaren. Bildlich gesprochen ist das als Standpunkt gegebene event nicht mehr Teil einer Phalanx von events, sondern eher einem Schiffsbug zu vergleichen, der durch die Wellen des Unbestimmten pflügt.[14]

Doch man sollte den Wechsel in der Deutung von „es ist wissbar, dass“ zu „es steht faktisch fest, dass“ nicht zu leicht nehmen. Vielmehr ist es ein recht dramatischer Wechsel. 3N×Rel hilft, dies deutlich zu machen: Da 3N×Rel eine konservative Erweiterung von 3N ist, gelten z.B. die folgende Formeln *nicht* allgemein:

$$SN_\Delta Sp \rightarrow EN_\Delta Sp$$
$$N_\Delta p \rightarrow EN_\Delta Sp.$$

Die Deutung der Formeln im Rahmen des klassischen Bildes von 3N war denn auch unplausibel genug:

Wenn es irgendwo wissbar ist, dass es irgendwo der Fall ist, dass p,
dann ist es *überall* wissbar, dass es irgendwo der Fall ist, dass p.

[14] Vertreter eines naiven gubernatio-Modells mögen hier an das Ende des ersten Teils von „Titanic“ und Leonardo di Caprios Ausruf „I’m the king of the world“ denken. Aber erstens ist „Titanic“ kein wirklich guter Film. Und zweitens hat das naive gubernatio-Modell seine Tücken, die in Kap. II 2 bereits eingehend behandelt wurden.

> Wenn es (hier) wissbar ist, dass p, dann ist es überall wissbar, dass es *irgendwo* der Fall ist, dass p.

Das kann bei begrenzter Höchstgeschwindigkeit der Signalübertragung schlecht sein. Denn was am Ort des Geschehens, sowie etwas geschieht, wissbar ist, ist dann eben an anderen Orten noch nicht sofort wissbar. In der ontischen Deutung liest man die Formel als:

> Wenn es irgendwo faktisch feststeht, dass es irgendwo der Fall ist, dass p,
> dann steht es überall faktisch fest, dass es irgendwo der Fall ist, dass p.

> Wenn es (hier) faktisch feststeht, dass es (hier) der Fall ist, dass p,
> dann steht es überall faktisch fest, dass es irgendwo der Fall ist, dass p.

Dass das *falsch* sein können soll, muss man erst einmal schlucken. Und doch scheint man zu dieser Konsequenz gezwungen zu sein, wenn weder „N_{∇}“ noch „N“ ernsthaft als Notwendigkeitsoperatoren taugen.

Kapitel 3

Wie die Seeschlacht: der (verhinderte) Weltraumkrieg

3.1 Wahrheitswerte in der verzweigten Raumzeit

3.1.1 Das „spacefight“-Szenario

Die Sprache $3N{\times}Rel^{(pl)}$ liefert die Ressourcen, um ein bestimmtes Modell tatsächlich als Erweiterung des alt-ehrwürdigen Seeschlacht-Szenarios auf die relativistische Raumzeit zu konstruieren und die verschiedenen Strategien zur Lösung des alten und des neuen Problems aufeinander abzubilden. In Anlehnung an Putnam[1] mag das untersuchte Szenario das **„spacefight“-Szenario** genannt werden. Für seine Beschreibung sind *faktisch* informative Aussagen einerseits und bloße Positionsangaben andererseits zu unterscheiden:

(a) Faktisch informative Aussagen: „p“, „q“ etc.
Ich hoffe, dass es nie zu einem Weltraumkrieg kommen wird und schlage deshalb vor, dass man sich der Anschaulichkeit halber den folgenden einigermaßen glimpflichen Ablauf vorstellt: „p“, „q“ und „r“ stehen für drei verschiedene eindeutige Punkte innerhalb der Konfrontation zwischen den As und den Bs (Putnams Beispiel). Z.B. steht „p“ für „Die As greifen (ohne Erfolg) an“, „q“ für „Die Bs schießen (ohne Erfolg) zurück“ und „r“ für „Die As und die Bs sehen ein, dass ein Weltraumkrieg sinnlos ist und schließen einen Waffenstillstand“. In sicherer Entfernung von einem halben Lichtjahr warten die Cs in ihrem Raumschiff den Verlauf der Konfrontation ab, wobei sie im Rahmen eines willkürlich gewählten Bezugssystems b Vermutungen anstellen. So stehe „p‘“ für „Die Cs vermuten, dass die As gerade angreifen“, „q‘“ für „Die Cs vermuten, dass die Bs gerade zurückschlagen“ und „r‘“ für „Die Cs vermuten, dass die As und die Bs gerade einen Waffenstillstand vereinbaren“. Jede andere Illustration (oder gar keine) ist im Prinzip natürlich genau so gut.

(b) Positionsangaben
„p“, „q“ etc. seien, sofern sie überhaupt in einer Alternative wahr sind, darin an nur je genau *einer* raumzeitlichen Position wahr. Auf die Positionen lässt sich im Prinzip jeweils auf die in Kap. III 3 beschriebene Art mit einer raumzeitlichen Positionsangabe Bezug nehmen. Die Punkt-Datierung von „p“ soll aus mnemotechnischen Gründen wieder als „*p*“ notiert werden etc. Eine Positionsangabe bezieht sich in *allen*

[1] Putnam, „Time and Physical Geometry“ (1967).

Alternativen auf dasselbe event. Die Posititionsangaben lassen sich demnach als „*p̣*“, „*q̣*“ etc. notieren. ⌜α̣⌝ ist jetzt, anders als in Kap. III 3, als Abkürzung für ⌜□×(HE~α ∧ α ∧ GE~α)⌝ zu verstehen. Wieder sind grundsätzlich volle Modelle vorausgesetzt (man mag also auch sagen, dass hier als verfeinertere Version von 3N×Rel die Sprache 3N×Rel^{pl} benutzt wird). „*p̣*“(kursiv mit Punkt) wird als Positionsangabe auch in den Alternativen wahr sein, in denen das faktisch informative „p“ (normal gesetzt) nie wahr wird. Es ist also festzuhalten, dass „*p̣* ∧ ~p“, anders als „p ∧ ~p“ *kein* Widerspruch ist.

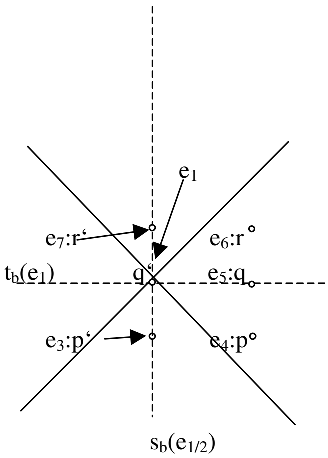
(c) Genaue Beschreibung des „spacefight“-Szenarios

Das „spacefight“-Szenario besteht in einem einzigen 3N×Rel-Modell, dessen relevante Züge allerdings nicht alle in einer einzigen Skizze dargestellt werden können. Als Koordinatensystem dargestellt ist (rechtwinklig) das von den Cs willkürlich gewählte Koordinatensystem b. Bewertet wird für die b-Orte und b-Zeiten zweier events, e_1 und e_2. e_1 liegt im Vergangenheitslichtkegel von e_2, und zwar, der Einfachheit halber, am selben b-Ort.

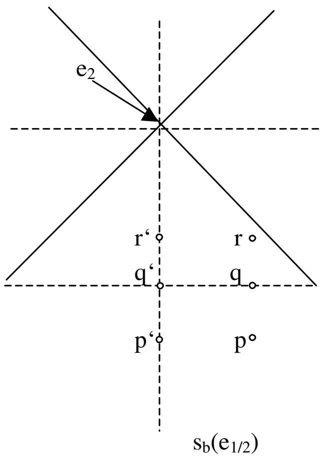
Insgesamt spielen nicht weniger als sieben Alternativen eine Rolle. Das liegt daran, dass für die drei „N“-Operatoren jeweils verschiedene Zugänglichkeitsflächen relevant sind. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll für jede Art der Zugänglichkeit von h_1 aus genau eine zweite Alternative dargestellt sein. Realistischerweise repräsentiert jede dieser Alternativen natürlich ein ganzes Alternativen*bündel*.

(A) Draufsicht auf h_1

(1) „früher“

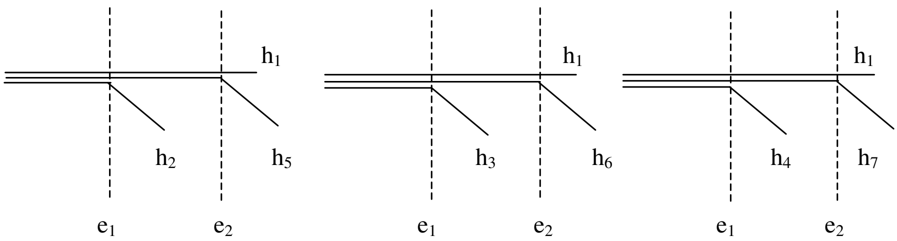


(2) „später“



Im Vergangenheitslichtkegel von e_1 liegen das event e_3 mit der Positionsangabe „ *p*‘ “, mit (u.a.) dem h_1-Inhalt, dass die Cs den Angriff der As vermuten und natürlich e_1 selbst. Zum h_1-Inhalt von e_1, das mit „ *q*‘ “ angesprochen wird, gehört die Vermutung der Cs, dass die Bs sich verteidigen. Der Angriff der As, die Verteidigung der Bs und die Einigung entsprechen den Positionsangaben „*p*" (für e_4), „*q*" (für e_5) und „*r*" (für e_6). Die entsprechenden events liegen alle im Raumartigen zu e_1. Das event e_7, an dem die Cs den Abschluss des Waffenstillstands vermuten („r'"), liegt in der kausalen Zukunft von e_1. Alle genannten events liegen im Vergangenheitslichtkegel von e_2. Wenn man sich das Modell mit einem wandernden Lichtkegel gleichsam verfilmt vorstellt, so sind sie also zu e_2 bereits in den „Vergangenheitslichtkegel der Cs" eingetreten.

(B) Längsschnitt durch $s_b(e_{1/2})$

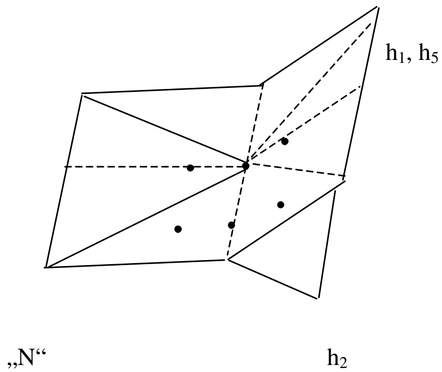


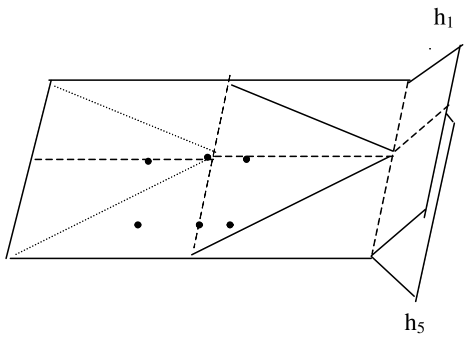
„N"-Zugänglichkeit „N_Δ"-Zugänglichkeit „N_∇"-Zugänglichkeit

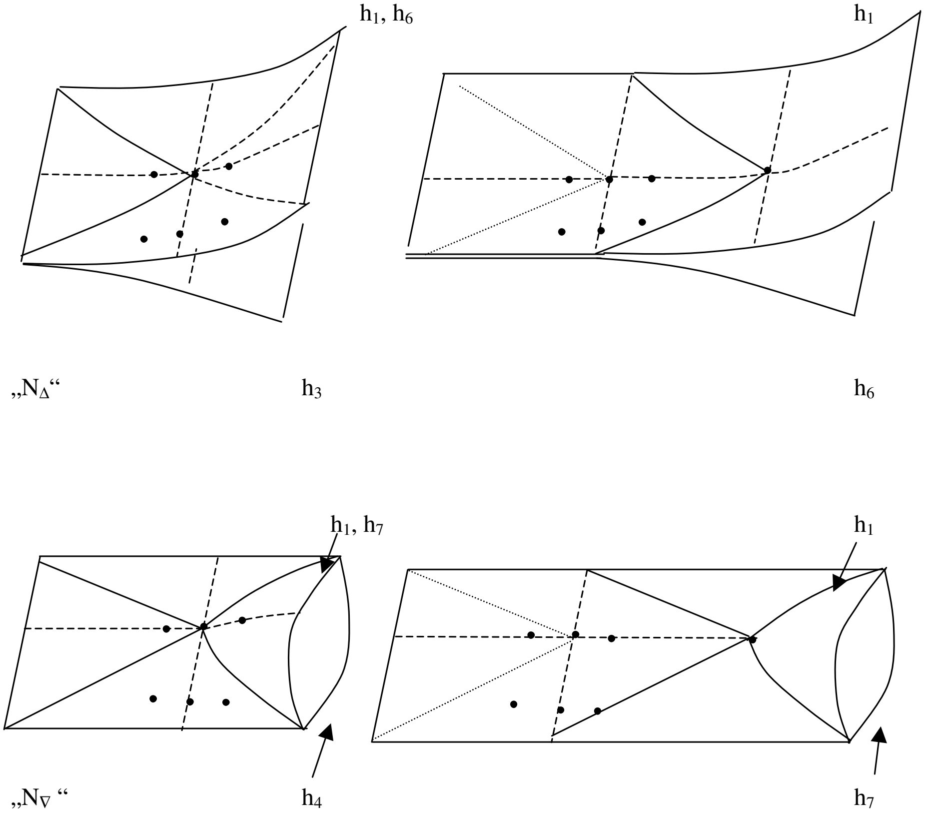
h_2 ist gerade bis einschließlich $t_b(e_1)$ h_1-artig. h_3 ist gerade auf dem Vergangenheitslichtkegel von e_1 h_1-artig. h_4 ist gerade bis auf den Zukunftslichtkegel von e_1 h_1-artig. h_5 ist bis einschließlich $t_b(e_2)$ h_1-artig. h_6 ist auf dem Vergangenheitslichtkegel von e_2 h_1-artig. h_7 ist bis auf den Zukunftslichtkegel von e_2 h_1-artig.

(C) Zugänglichkeit im Sinne der verschiedenen „N"-Operatoren

(1) „früher" (2) „später"







e_3:*p̣*‘ • e_1:*q*‘• e_7:*ṛ*‘ •

e_4:*p̣* • e_5:*q̣*’• e_6:*ṛ* •

Dort, wo Alternativen nicht h_1-artig sind, sollen sie immer auch für die im „spacefight“-Szenario relevanten atomaren Formeln von h_1 abweichen. Die Werte für Formeln lassen sich leicht aus der Darstellung ablesen.

3.1.2 Peirceanische und thomasonianische Position

In Kap. III 3 ließen sich drei verschiedene Gruppen von Zeichen untersuchen, die sich drei verschiedenen Hauptpositionen zuordnen ließen: der (dann schnell verabschiedeten) rietdijkianischen Position, der ockhamistischen Position und der peirceanischen Position für Bezugssysteme. Die Untersuchung beschränkte sich aber auf *ein* Weltblatt. Sie bedarf nun der Berücksichtigung von Alternativen zu ihrer Ergänzung. Dabei ist in zweierlei Hinsicht zu differenzieren:

- Mit der Berücksichtigung von Alternativen muss neben der peirceanischen auch die thomasonianische Position berücksichtigt werden. Denn in diese geht die ockhamistische Position für Bezugssysteme plausiblerweise über, wenn auch Alternativen berücksichtigt werden.[2]
- Es ist nicht nur der Operator „N“ zu untersuchen, sondern auch der Operator „N_Δ“.

In Entsprechung zur aus LF bekannten peirceanischen Abkürzung „**F**“ für „NF“ bietet es sich an, für das Folgende zusätzlich noch einige ähnliche Abkürzungen einzuführen:

„NF“ = „**F**“	„N_ΔF“ = „$\mathbf{F}_\Delta$“
„NS“ = „**S**“	„N_ΔS“ = „$\mathbf{S}_\Delta$“
„NP“ = „**P**“	„N_ΔP“ = „$\mathbf{P}_\Delta$“

3.1.3 Zwei Arten der Supervaluation

Die thomasonianische Position mit ihrer Supervaluationstechnik zu berücksichtigen, bedeutet zwei verschiedene Sorten von S-Werten zu definieren, die als S und S^Δ unterschieden werden sollen, nämlich analog zu jedem „N“-Operator eine. Technisch lässt sich das in direkter Analogie zu LF leicht bewerkstelligen **[B1]**. Doch intuitiv ist der Punkt von größter Bedeutung. Warum kann man sich auf einmal fragen: Mit *welcher* Art von Supervaluation wollen wir denn arbeiten? Warum gibt es hier auf einmal einen Spielraum, an den im Rahmen von LF gar nicht zu denken war? Wie die Zugänglichkeit für den „Notwendigkeits“-Operator, so hing ja auch die Menge der für die Ermittlung des S-Werts relevanten Alternativen von der Zugänglichkeitsrelation ab. In der Raumzeit gibt es zwei Optionen dafür, welche Zugänglichkeit relevant sein soll.

- Entweder werden für die Supervaluation an einem event e bei bis zu e h-artiger Weltentwicklung alle diejenigen Alternativen berücksichtigt, die bis zum Zeitpunkt von e im gerade verwendeten Bezugssystem mit h gleich beschriftet sind.
- Oder es werden für die Supervaluation an einem event e bei bis zu e h-artiger Weltentwicklung alle diejenigen Alternativen berücksichtigt, die auf dem Vergangenheitslichtkegel von e mit h gleich beschriftet sind.

Im ersten Fall werden weniger Alternativen berücksichtigt. Denn die erste Bedingung ist strenger. Ein Weltblatt ist leichter auf einem halben Lichtkegel mit einem anderen gleich beschriftet als bis zu einer Faltkante. Ferner ist im ersten Fall von Bezugssystem zu Bezugssystem die Menge der relevanten Alternativen verschieden, im zweiten Fall bleibt sie immer gleich. Die genauere Interpretation dieser Beobachtung soll dem nächsten Kapitel vorbehalten sein. Im ersten Fall soll von S-Werten, im zweiten Fall von S^Δ-Werten die Rede sein.

[2] Vgl. Kap. II 1.6.1.

3.1.4 Vorher (e_1)

3.1.4.1 Im Zukunftslichtkegel nichts Neues

Mit der in Teil III 2 definierten Sprache Rel ließen sich Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel noch nicht unterscheiden, da nur ein fertiggestelltes Weltblatt in den Blick kam. Im „spacefight“-Szenario für 3N×Rel sieht man dagegen schnell die Analogie zu LF: Der Zukunftslichtkegel ist im Gegensatz zum Vergangenheitskegel ein Bereich noch offener Alternativen. Man kann das an einer Reihe von Resultaten sehen. Alle Werte sind dabei für das frühere event e_1 ermittelt, beziehen sich also auf $\langle t_b(e_1), s_b(e_1), h_1\rangle$:

<u>V-Werte</u>		
$\mathbf{F}(\underset{.}{r}'\wedge r') = 0$	$\mathbf{F}(\underset{.}{r}'\wedge{\sim}r') = 0$	
$\mathbf{F}_\Delta(\underset{.}{r}'\wedge r') = 0$	$\mathbf{F}_\Delta(\underset{.}{r}'\wedge{\sim}r') = 0$	
		contingentia futura
<u>S-Werte und S^Δ-Werte</u>		im Zukunftslichtkegel
$\mathsf{F}(\underset{.}{r}'\wedge r') = \text{n.d.}$	$\mathsf{F}(\underset{.}{r}'\wedge{\sim}r') = \text{n.d.}$	von e_1
$\mathsf{NF}(\underset{.}{r}'\wedge r') = 0$	$\mathsf{NF}(\underset{.}{r}'\wedge{\sim}r') = 0$	
$\mathsf{N}_\Delta\mathsf{F}(\underset{.}{r}'\wedge r') = 0$	$\mathsf{N}_\Delta\mathsf{F}(\underset{.}{r}'\wedge{\sim}r') = 0$	

Dagegen erhält man für den Vergangenheitslichtkegel die folgenden Resultate:

<u>V-Werte</u>		
$\mathbf{P}(\underset{.}{p}'\wedge p') = 1$	$\mathbf{P}(\underset{.}{p}'\wedge{\sim}p') = 0$	
$\mathbf{P}_\Delta(\underset{.}{p}'\wedge p') = 1$	$\mathbf{P}_\Delta(\underset{.}{p}'\wedge{\sim}p') = 0$	
		necessaria praeterita
<u>S-Werte und S^Δ-Werte</u>		im Vergangenheits-
$\mathsf{P}(\underset{.}{p}'\wedge p') = 1$	$\mathsf{P}(\underset{.}{p}'\wedge{\sim}p') = 0$	lichtkegel von e_1
$\mathsf{NP}(\underset{.}{p}'\wedge p') = 1$	$\mathsf{NP}(\underset{.}{p}'\wedge{\sim}p') = 0$	
$\mathsf{N}_\Delta\mathsf{P}(\underset{.}{p}'\wedge p') = 1$	$\mathsf{N}_\Delta\mathsf{P}(\underset{.}{p}'\wedge{\sim}p') = 0$	

Außerdem ist die Situation an e_1 selbst ganz so, wie in Analogie zum Seeschlacht-Szenario zu erwarten:

<u>V-Werte, S-Werte und S^Δ-Werte</u>		
$(\underset{.}{q}'\wedge q') = 1$	$(\underset{.}{q}'\wedge{\sim}q') = 0$	necessaria praesentia
$\mathsf{N}(\underset{.}{q}'\wedge q') = 1$	$\mathsf{N}(\underset{.}{q}'\wedge{\sim}q') = 0$	an e_1
$\mathsf{N}_\Delta(\underset{.}{q}'\wedge q') = 1$	$\mathsf{N}_\Delta(\underset{.}{q}'\wedge{\sim}q') = 0$	

Doch die Übereinstimmung bleibt nicht so allgemein, wenn man über den Zukunftslichtkegel hinausschaut.

3.1.4.2 Im Raumartigen: *contingentia praesentia & praeterita*

Schaut man über den Zukunftslichtkegel hinaus, so lassen sich zwei Gruppen von Positionen unterscheiden.

- Nennen wir die Variante der peirceanischen Position, welche die Formeln mit „$\mathbf{P}_{\Delta}$“, „$\mathbf{S}_{\Delta}$“ und „$\mathbf{F}_{\Delta}$“ etc. als relevant ansieht, P^{Δ}.
- Nennen wir die Variante der peirceanischen Position, welche die Formeln mit „$\mathbf{P}$“, „$\mathbf{S}$“ und „$\mathbf{F}$“ etc. als relevant ansieht, P.
- Nennen wir die Variante der thomasonianischen Position, welche S-Werte für relevant hält, S.
- Nennen wir die Variante der thomasonianischen Position, welche S^{Δ}-Werte für relevant hält, S^{Δ}.

Es stellt sich heraus, dass sich P und S auf der einen Seite und P^{Δ} und S^{Δ} auf der anderen Seite dramatisch unterscheiden. P^{Δ} und S^{Δ} kennen nämlich *contingentia praesentia* und *contingentia praeterita*, P und S dagegen nicht.

Zwar bekommt man für das räumlich entfernte Ereignis in der Bezugssystem-relativen Zukunft an e_6 noch die folgenden Ergebnisse:

<u>V-Werte</u>		
$\mathbf{F}\mathsf{S}(\underset{.}{r}\wedge r) = 0$	$\mathbf{F}\mathsf{S}(\underset{.}{r}\wedge{\sim}r) = 0$	
$\mathbf{F}_{\Delta}\mathsf{S}(\underset{.}{r}\wedge r) = 0$	$\mathbf{F}_{\Delta}\mathsf{S}(\underset{.}{r}\wedge{\sim}r) = 0$	
		contingentia futura
<u>S-Werte und S^{Δ}-Werte</u>		in der raumartigen
$\mathsf{FS}(\underset{.}{r}\wedge r) = \text{n.d.}$	$\mathsf{FS}(\underset{.}{r}\wedge{\sim}r) = \text{n.d.}$	b-Zukunft von $t_b(e_1)$
$\mathsf{NFS}(\underset{.}{r}\wedge r) = 0$	$\mathsf{NFS}(\underset{.}{r}\wedge{\sim}r) = 0$	
$\mathsf{N}_{\Delta}\mathsf{FS}(\underset{.}{r}\wedge r) = 0$	$\mathsf{N}_{\Delta}\mathsf{FS}(\underset{.}{r}\wedge{\sim}r) = 0$	

Aber für den Teil des Raumartigen, der zur raumweiten Bezugssystem-relativen Gegenwart oder Vergangenheit gehört, weichen die Positionen voneinander ab. Für die räumlich enfernte Gegenwart ergibt sich nämlich:

<u>V-Werte für P</u>		
$\mathsf{S}(\underset{.}{q}\wedge q) = 1$	$\mathsf{S}(\underset{.}{q}\wedge{\sim}q) = 0$	
$\mathbf{S}(\underset{.}{q}\wedge q) = 1$	$\mathbf{S}(\underset{.}{q}\wedge{\sim}q) = 0$	P und S:
		necessaria praesentia
<u>S-Werte für S</u>		im Raumartigen zu e_1
$\mathsf{S}(\underset{.}{q}\wedge q) = 1$	$\mathsf{S}(\underset{.}{q}\wedge{\sim}q) = 0$	
$\mathsf{NS}(\underset{.}{q}\wedge q) = 1$	$\mathsf{NS}(\underset{.}{q}\wedge{\sim}q) = 0$	

<u>V-Werte für P^Δ</u>

$\mathbf{S}_\Delta(q \wedge q) = 0$ $\qquad$ $\mathbf{S}_\Delta(q \wedge \sim q) = 0$

<u>S^Δ-Werte für S^Δ</u>

$\mathsf{S}(q \wedge q) = \text{n.d.}$ $\qquad$ $\mathsf{S}(q \wedge \sim q) = \text{n.d.}$

$\mathsf{NS}(q \wedge q) = 0$ $\qquad$ $\mathsf{NS}(q \wedge \sim q) = 0$

P^Δ und S^Δ:
contingentia praesentia
im Raumartigen zu e_1

Und für die Vergangenheit im Raumartigen ergibt sich:

<u>V-Werte für P</u>

$\mathsf{PS}(p \wedge p) = 1$ $\qquad$ $\mathsf{PS}(p \wedge \sim p) = 0$

$\mathbf{P}\mathsf{S}(p \wedge p) = 1$ $\qquad$ $\mathbf{P}\mathsf{S}(p \wedge \sim p) = 0$

<u>S-Werte für S</u>

$\mathsf{PS}(p \wedge p) = 1$ $\qquad$ $\mathsf{PS}(p \wedge \sim p) = 0$

$\mathsf{NPS}(p \wedge p) = 1$ $\qquad$ $\mathsf{NPS}(p \wedge \sim p) = 0$

P und S:
necessaria praeterita
im Raumartigen zu e_1

<u>V-Werte für P^Δ</u>

$\mathbf{P}_\Delta\mathsf{S}(p \wedge p) = 0$ $\qquad$ $\mathbf{P}_\Delta\mathsf{S}(p \wedge \sim p) = 0$

<u>S^Δ-Werte für S^Δ</u>

$\mathsf{PS}(p \wedge p) = \text{n.d.}$ $\qquad$ $\mathsf{PS}(p \wedge \sim p) = \text{n.d.}$

$N_\Delta\mathsf{PS}(p \wedge p) = 0$ $\qquad$ $N_\Delta\mathsf{PS}(p \wedge \sim p) = 0$

P^Δ und S^Δ:
contingentia praeterita
im Raumartigen zu e_1

$\mathsf{NPS}(p \wedge p) = 1$ $\qquad$ $\mathsf{NPS}(p \wedge \sim p) = 0$[3]

Man sieht daran unter anderem: Wenn „N_Δ“ ein plausibler Notwendigkeitsoperator ist, dann muss man behaupten, es gebe in gewissem Sinne Nicht-Feststehendes in der Gegenwart oder der Vergangenheit. Zur Systematisierung der Ansätze bietet sich somit die folgende Kreuzklassifikation an:

contingentia praesentia & praeterita ?

Wahrheitswertlücken?		ja	nein
	ja	S^Δ	S
	nein	P^Δ	P

[3] Man beachte, dass die S^Δ-Supervaluation über einer umfassenderen Menge von Alternativen erfolgt, als für die „N“-Zugänglichkeit relevant sind. Das „N“ schränkt die Alternativenmenge weiter ein, nämlich auf die sogar bis zu $t_b(e)$ gleich beschrifteten Alternativen und macht damit den Wert 1 leichter erreichbar.

Ob *contingentia praeterita* auftreten oder nicht, ist sicher die wichtigste Frage bei der Einordnung der Ansätze. S^{Δ} und P^{Δ} mögen deshalb zusammenfassend die *contingentia praeterita*-Gruppe genannt werden. Sie unterscheiden sich insofern anschaulich von den anderen Ansätzen, als die für sie relevante Verzweigung der Alternativen dem Vergangenheitslichtkegel entlang erfolgt, die für die anderen Ansätze relevante Verzweigung der Alternativen aber entlang einer Bezugssystem-relativen zeitlichen Vorderkante.

3.1.5 Nachher (e_2)

Betrachten wir nun die weiter fortgeschrittene Entwicklung an e_2. Bewerten wir also die Formeln für $\langle t_b(e_2), s_b(e_2), h_1\rangle$. Die Wahrheitswerte für die verschiedenen Ansätze lassen sich leicht ermitteln und ordnen, ihre Interpretation verlangt jedoch einige Erläuterungen.

(1) Bei den peirceanischen Ansätzen ergeben sich sich bei ehemaligen *contingentia futura* und (für P^{Δ}) *contingentia praeterita & praesentia*-Aussagen keine Wert-Veränderungen von einer der für e_1 bewerteten Formeln zu ihren für e_2 bewerteten Vergangenheitsformen. Im Rückblick ändert sich fast nichts. Das lässt sich damit erklären, dass peirceanische Ansätze grundsätzlich auf die Äußerungs-Kompetenz abzielen. Und wenn für e_1 die Äußerungs-Kompetenz nicht vorliegt, so kann man von e_2 aus gesehen nur sagen, dass sie an e_1 eben nicht vor*lag*. Man kann übersichtlich festhalten:

früher $(=\langle t_b(e_1), s_b(e_1), h_1\rangle)$	später$(=\langle t_b(e_2), s_b(e_2), h_1\rangle)$	
[P], V-Werte		
$\mathbf{F}\mathrm{S}(\underset{.}{r}`\wedge \mathrm{r}`) = 0$	$\mathbf{PF}\mathrm{S}(\underset{.}{r}`\wedge \mathrm{r}`)= 0$	ex-cont. futurum im ZLK
$\mathbf{P}\mathrm{S}(\underset{.}{p}\wedge \mathrm{p}) = 1$	$\mathbf{PP}\mathrm{S}(\underset{.}{p}\wedge \mathrm{p}) = 1$	ex-nec. praeteritum
$\mathbf{S}(q\wedge \mathrm{q}) = 1$	$\mathbf{PS}(q\wedge \mathrm{q}) = 1$	ex-nec. praesens
$\mathbf{F}\mathrm{S}(\underset{.}{r}\wedge \mathrm{r}) = 0$	$\mathbf{PF}\mathrm{S}(\underset{.}{r}\wedge \mathrm{r}) = 0$	ex-cont. futurum im RAn
$[P^{\Delta}]$, V-Werte		
$\mathbf{F}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{r}`\wedge \mathrm{r}`) = 0$	$\mathbf{P}_{\Delta}\mathbf{F}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{r}`\wedge \mathrm{r}`) = 0$	ex-cont.futurum im ZLK
$\mathbf{P}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{p}\wedge \mathrm{p}) = 0$	$\mathbf{P}_{\Delta}\mathbf{P}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{p}\wedge \mathrm{p}) = 1$	ex-cont. praeteritum[4]
$\mathbf{S}_{\Delta}\ (q\wedge \mathrm{q}) = 0$	$\mathbf{P}_{\Delta}\mathbf{S}_{\Delta}\ (q\wedge \mathrm{q}) = 0$	ex-cont. praesens
$\mathbf{F}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{r}\wedge \mathrm{r}) = 0$	$\mathbf{P}_{\Delta}\mathbf{F}_{\Delta}\mathrm{S}(\underset{.}{r}\wedge \mathrm{r}) = 0$	ex-cont. futurum im RAn

Man beachte, dass die erste Position (P) zu den Vorderkanten-Ansätzen gehört und nur die zweite Position (P^{Δ}) zu den *contingentia praeterita*-Ansätzen gehören.

[4] Dies ist zunächst überraschend, aber gut begründbar: **[B2].**

Bei den Supervaluations-Ansätzen kommt es dagegen in jedem Fall zu Wert-Veränderungen von einer der für e_1 bewerteten Formeln ohne $S^{(\Delta)}$-Wert zu ihren für e_2 bewerteten Vergangenheitsformen mit $S^{\Delta)}$-Wert: Im Rückblick wird vereindeutigt. *contingens praeteritum* und *contingens praesens* werden gleichsam nachträglich zurückgenommen. Man erhält:

früher $(=\langle t_b(e_1), s_b(e_1), h_1\rangle)$	später$(=\langle t_b(e_2), s_b(e_2), h_1\rangle)$	
[S-Werte]		
FS(*ṛ*‘∧r‘)= n.d.	PFS(*ṛ*‘∧r‘)= 1	ex-cont. fut. im ZLK
FS(*ṛ*‘∧~r‘)= n.d.	PFS(*ṛ*‘∧~r‘)= 0	
PS(*p̣*∧p) = 1	PPS(*p̣*∧p) = 1	ex- nec. praet. im RAn
S(*q*∧q) = 1	PS(*q*∧q) = 1	ex-nec. praes. im RAn
FS(*ṛ*∧r) = n.d.	PFS(*ṛ*∧r) = 1	ex-cont. fut. im RAn
FS(*ṛ*∧~r) = n.d.	PFS(*ṛ*∧~r) = 0	
[S^{Δ}-Werte]		
FS(*ṛ*‘∧r‘)= n.d.	PFS(*ṛ*‘∧r‘)= 1	ex-cont. fut. im ZLK
FS(*ṛ*‘∧~r‘) = n.d.	PFS(*ṛ*‘∧~r‘)= 0	
PS(*p̣*∧p) = n.d.	PPS(*p̣*∧p) = 1	ex-cont. praet.
PS(*p̣*∧~p) = n.d.	PPS(*p̣*∧~p) = 0	
S(*q*∧q) = n.d.	PS(*q*∧q) = 1	ex-cont. praes.
S(*q*∧~q) = n.d.	PS(*q*∧~q) = 0	
FS (*ṛ*∧r) = n.d.	PFS(*ṛ*∧r) = 1	ex-cont. fut. im RAn
FS(*ṛ*∧~r) = n.d.	PFS(*ṛ*∧~r) = 0	

Man beachte, dass wieder nur die Position S^{Δ} zu den *contingentia praeterita*-Ansätzen gehört, nicht aber die Position S, bei der die Verzweigung entlang der Bezugssystem-relativen Vorderkante konzipiert ist.

3.1.6 Zwischenergebnis

Mit dem Beispiel des verhinderten Weltraumkriegs ist, noch ohne größere inhaltliche Interpretation, der Nachweis dafür erbracht,

- dass das Problem der „wings“ tatsächlich eine Erweiterung des Seeschlacht-Problems auf das Raumartige ist;
- dass sich die verschiedenen für das Seeschlacht-Problem vorgeschlagenen Lösungen zumindest technisch gesehen völlig natürlich auf das Problem der „wings“ übertragen lassen;
- dass sich das Problem unter Berücksichtigung des Raumartigen in verschärfter Form stellt, da nunmehr nicht bloß *contingentia futura*, sondern auch *contingentia praesentia & praeterita* zu diskutieren sind.

Die Interpretation dieser Ergebnisse ist Gegenstand des folgenden Kapitels. Es bleibt übrig, die mögliche philosophische Motivation für die folgenden Positionen zu untersuchen:
1. Supervaluation mit der „N“-Zugänglichkeit (S),
2. Supervaluation mit der „N_Δ“-Zugänglichkeit (S^Δ),
3. Peirceanischer Ansatz mit „N“ (P),
4. Peirceanischer Ansatz mit „N_Δ“ (P^Δ).

Zunächst stehen die Vorderkanten-Ansätze (S und P) als wenig attraktiv da: Warum sollte die Determiniertheit von der Willkür der Wahl des Bezugssystems abhängen? Zwischen S^Δ und P^Δ haben sich zudem bereits wenigstens zwei eng verbundene und interessante Unterschiede herausgestellt:
(a) P^Δ geht gut zusammen mit der Behauptung: Es steht fest, dass etwas stattfand, *obwohl* es nie der Fall war, dass es im Stattfinden begriffen war.[5] S^Δ dagegen geht – zumindest auf den ersten Blick – nicht gut zusammen mit dieser Behauptung.
(b) Im Sinne von S^Δ wird das *contingens praesens* gleichsam rückwirkend zurückgenommen, im Sinne von P^Δ nicht.

Damit ist freilich noch nicht geklärt, ob überhaupt einer der Ansätze unter S^Δ oder P^Δ eine sinnvolle ontische Interpretation zulässt (und falls keine, welche sonst). Immerhin ist noch nicht klar, ob und, falls ja, in welchem Sinne man überhaupt *contingentia praesentia & praeterita* befürworten kann. Und es ist noch nicht geklärt, inwiefern als Ergänzung von S^Δ die Position S doch sinnvoll sein könnte, und inwiefern dies vielleicht auch auf P als Ergänzung zu P^Δ zutrifft. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

3.2 *Rebus sic stantibus*

3.2.1 Was heißt „*rebus sic stantibus*“?

Im vorangehenden Abschnitt wurden verschiedene Arten von Werten von Formeln in 3N×Rel-Modellen ermittelt, noch ohne diese inhaltlich stark zu interpretieren. Diese Vorgehensweise hatte sich schon in Kap. II 1 bewährt.

Erinnern wir uns, dass es bei der Deutung von LF einen gewissen Stolperstein gab: Was sollte in der kombinierten Zeit- und Modallogik der schematisch-metasprachliche Ausdruck „$V(\alpha,\langle t,h\rangle)$“ (bzw. „$H(\alpha,\langle t,h\rangle)$“, „$S(\alpha,\langle t,h\rangle)$“) bedeuten? Hier ergab sich eine Doppeldeutigkeit:

---

[5] Dies ist eine überraschende Analogie zum Augenblick des Wechsels von einem Zustand in sein kontradiktorisches Gegenteil, wenn man ihn als Ereignis konzipiert, das zu jedem Zeitpunkt entweder bevorsteht oder schon stattgefunden hat. Die Rahmenbedingungen sind natürlich völlig andere. Vgl. zu Details mein „The Moment of Change“.

(1) Der Peirceaner und der Thomasonianer deuteten das „⟨t,h⟩“ darin als tempo-modale Koordinatenangabe, also als: „zu Zeit t bei bis zu einschließlich t h-artiger Weltentwicklung“.
(2) Der Ockhamist dagegen deutete den Ausdruck „⟨t,h⟩“ darin als „zu Zeit t bei bis zu einschließlich t h-artiger Weltentwicklung und unter der Annahme, dass h *komplett* verwirklicht wird“. Denn er versteht das „h“ doppelt, einerseits als Teil einer tempo-modalen Koordinatenangabe, andererseits als Annahme über den weiteren Verlauf. Natürlich kann er seine Deutung auch weniger redundant formulieren als: „zu Zeit t, angenommen, dass h *komplett* verwirklicht wird“. Denn wenn h komplett verwirklicht wird, so *a fortiori* auch bis zu t.[6]

Der Grundgedanke beider Lager lässt sich auch so beschreiben, dass Formeln durch den t-Parameter zu einer *Zeit* bewertet werden und durch den Alternativen-Parameter h relativ darauf bewertet werden, *wie die Dinge zu dieser Zeit stehen*. Will man in der Deutung der Operatoren den Alternativen-Parameter aufscheinen lassen und somit den Unterschied zur reinen Zeitlogik betonen, so ist es deshalb angemessen, darauf mit dem Zusatz „*rebus sic stantibus*“ hinzuweisen. Während z.B. „P“ in der reinen Zeitlogik als „Es war der Fall, dass“ gedeutet wird, so wird dasselbe Zeichen in der kombinierten Zeit- und Modallogik nach dieser Auffassung eigentlich als „Es war *rebus sic stantibus* der Fall, dass“ gedeutet. Für einen anderen möglichen Weltverlauf, der weit früher „abzweigt“, mag es ja gerade nicht der Fall gewesen sein. Auch der Ockhamist ist mit dem „*rebus sic stantibus*“ einverstanden, denn auch er vertritt einen hemiaktualistischen Ansatz; nur ist er der Meinung, dass man „*rebus sic stantibus*“ *allein* noch keine Wahrheitswerte vergeben kann, sondern es dafür immer noch zusätzlich einer Annahme über den weiteren Weltverlauf bedarf. Das wiederum hatte sich als letztendlich unplausibel herausgestellt.

Bei der Deutung des Ausdrucks „V(α,⟨t,s,h⟩)“ (bzw. „H(α,⟨t,s,h⟩)“, „S(α,⟨t,s,h⟩)“) für die klassische Raumzeitlogik LF×S5 stellte sich in Kap. II 3 im Prinzip dasselbe Problem der Mehrdeutigkeit. Dort war nur *ein* Bezugssystem im Blick, und es gab deshalb noch keinen Grund, den Gedanken einer raumweiten Vorderkante der Weltentwicklung anzuzweifeln. Deshalb war es natürlich, die hemiaktualistische Lösung einfach zu übernehmen: „⟨t,s,h⟩“ hieß demnach „zur Zeit t am Ort s, *rebus stantibus* im Sinne von h“. Und das wiederum hieß: „zur Zeit t am Ort s, angenommen, dass die Wirklichkeit bis zu einschließlich t h-artig ist“. Dabei war t als raumweite Vorderkante gedacht.

Wie verhält es sich nun mit der Deutung des Ausdrucks „V(α,⟨t_b(e),s_b(e),h⟩)“ (bzw. „S...“, „S^Δ...“) in der relativistischen Raumzeitlogik mit Alternativen? Zunächst kann man wieder die folgenden möglichen Lesarten für den Teilausdruck „⟨t_b(e),s_b(e),h⟩“ unterscheiden, wobei es auf die Deutung des „h“ ankommt:

---

[6] Ein Aktualist, der ja anders als der Ockhamist ein verkappter Vertreter des Determinismus ist, müsste „⟨t,h⟩“ (bei der Bewertung einer Gesamtformel) gar als „zu t, *wobei* h komplett verwirklicht wird“ deuten.

Alternativen-Ockhamist: „zur Zeit $t_b(e)$ am Ort $s_b(e)$ von Bezugssystem b, (und zwar *rebus stantibus* im Sinne von h *und* angenommen, dass h komplett verwirklicht wird)".

Andere hemiaktualistische Ansätze: „zur Zeit $t_b(e)$ am Ort $s_b(e)$ von Bezugssystem b, und zwar *rebus stantibus* im Sinne von h".

Doch nun ist die Sache erheblich komplizierter. Der Ausdruck „*rebus stantibus* im Sinne von h" ist nämlich nicht nur einfach doppeldeutig. Vielmehr ist er auf dreifache Weise mehrdeutig. Die Mehrdeutigkeit besteht darin, dass „*rebus stantibus* im Sinne von h" dreierlei heißen kann:

a) bei bis zu einschließlich $t_b(e)$ h-artiger Wirklichkeit
b) bei h-artiger Wirklichkeit auf $W \setminus \nabla(e)$
(d.h. bei h-artiger Wirklichkeit im Vergangenheitslichtkegel von e *und* den gesamten ‚wings')
c) bei h-artiger Wirklichkeit auf $\Delta(e)$
(d.h. bei h-artiger Wirklichkeit im Vergangenheitslichtkegel von e).

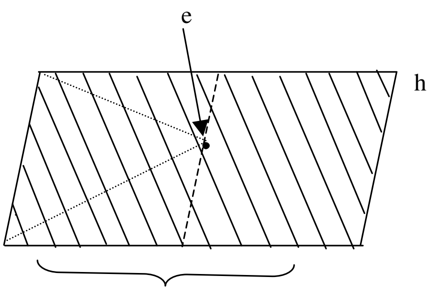
Dass das bisher unbemerkt blieb, kann man so erklären: Die Mehrdeutigkeit kann nicht entlang einem einzigen Ort ins Auge fallen; ein LF-Modell stellt man sich aber am besten als Längsschnitt durch ein 3N×Rel-Modell entlang *einem* Ort vor. Die Mehrdeutigkeit kann auch für LF×S5 nicht ins Auge fallen, wo man „N_Δ" nicht zur Verfügung hat. Und schließlich wird man sie, wenn sie einem als theoretische Möglichkeit für 3N in den Kopf kommen sollte, ontologisch zunächst schlicht nicht ernst nehmen.

Insgesamt ergeben sich damit vier verschiedene Möglichkeiten, wie der Ausdruck „$\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle$" sich im Rahmen eines indeterministischen Ansatzes deuten lässt. Es ist zu bemerken, dass alle vier Ansätze mit dem *Bezugssystem*-Ockhamismus (vgl. Kap. III 3) kompatibel sind. Der Alternativen-Ockhamismus soll dagegen im Folgenden, wie schon in Teil II für das tempo-modale Kontinuum, auch für die Raumzeit abgelehnt werden. Man mag sich zunächst darüber wundern und es als störend empfinden, wenn in einer technisch so verwickelten Angelegenheit keine Entscheidung für eine technisch einheitliche Linie zustande kommt. Doch es gilt grundsätzlich: Inhalt sticht Technik. Und es gibt inhaltlich gute Gründe, den Bezugssystem-Ockhamismus zu befürworten und dennoch den Alternativen-Ockhamismus abzulehnen. Dies wird im Folgenden noch deutlicher werden. Kurz gesagt: Ein raumzeitliches Bezugssystem *müssen* wir uns aussuchen, um die Welt überhaupt beschreiben zu können, wir *dürfen* es uns dabei aber auch frei aussuchen. Welche Alternative verwirklicht wird, *können* wir uns aber nicht aussuchen; und bloß hypothetische Wahrheit, wenn wir die Verwirklichung einer bestimmten Alternative *annehmen*, interessiert nicht.

3.2.2 Erste Möglichkeit: „bei kompletter Verwirklichung von h“

Es genügt fast der Verweis auf Teil II, um die erste Möglichkeit *ad absurdum* zu führen. Der Alternativen-Ockhamist beantwortet einfach nicht die gestellte Frage. Es geht nicht darum, welchen Wahrheitswert eine Aussage *rebus stantibus* im Sinne von h zu t an s in b hat, *wenn* man annimmt, dass h komplett verwirklicht wird. Es geht einfach darum, welchen Wahrheitswert eine Aussage *rebus stantibus* im Sinne von h zu t an s in b hat. Gefragt ist nach einem aktuellen Wahrheitswert, nicht nach einem hypothetischen.

Noch absurder wäre die Behauptung, mit „*rebus stantibus* im Sinne von h“ sei einfach h komplett als Wirklichkeit gemeint. Das lässt sich zwar anschaulich illustrieren:

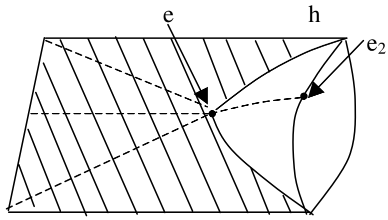


Schraffiert: *res stantes* im Sinne von h an e

Aber die Illustration macht auch klar, dass diese Behauptung überhaupt keine indeterministische Position mehr abgibt, sondern vielmehr eine deterministische Position: den Aktualismus bezüglich h. Ließe sich aus der Klausel „$\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle$“ kein anderer Sinn machen als dieser, so müsste das Projekt einer *in*deterministischen relativistischen Raumzeitlogik als gescheitert gelten. Doch es gibt ja andere Möglichkeiten der Deutung.

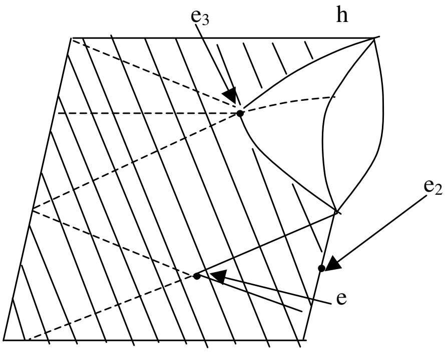
3.2.3 Zweite Möglichkeit: „bei h-artiger Wirklichkeit auf W \ ∇(e)“

Diese Möglichkeit lässt sich anschaulich darstellen wie folgt:



Schraffiert sind die *res stantes* im Sinne von h an e. Hier sind die „wings“ eingeschlossen. Dagegen lässt sich alles sagen, was schon in Kap. IV 1 gegen den Einschluss der „wings“ vorgebracht wurde.

Einer der wichtigen Punkte war dort das Gleichberechtigungs-Argument, das sich nun formulieren lässt wie folgt: Der Zustand an einem event e_2 im Zukunftslichtkegel von e gehört nicht zu den *res stantes* von e aus. Aber es gibt events in den „wings“ von e (deren Zustand zu den *res stantes* im Sinne von h an e gehört), z.B. e_3, von denen aus der Zustand an e_2 bereits zu den *res stantes* gehört.

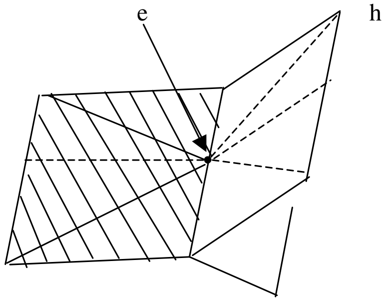


Schraffiert: *res stantes* im Sinne von h an e_3

Welche Festlegung der *res stantes* zählt nun? Die von e aus oder die von einem der events in den „wings“ aus, z.B. e_3? Offenbar sind doch alle events gleichberechtigt. Oder ist das Feststehen nun *solcherart* an die Perspektive eines events gebunden, dass von anderswo beurteilt schon feststehen kann, was jetzt und hier noch offen steht? Das ist keinesfalls akzeptabel. Zudem war einfach nicht einzusehen, warum von e aus gesehen *nur* noch das von e aus Beeinflussbare *nicht* schon im Sinne von h festgelegt sein sollte (das „Reissack“-Argument). Offenbar bleiben als ernst zu nehmende Möglichkeiten nur noch die Vorderkanten-Option und die Option des Ausschlusses der „wings“.

3.2.4 Dritte Möglichkeit: „bei h-Artigkeit bis zu einschließlich $t_b(e)$“

Diese Möglichkeit lässt sich anschaulich darstellen wie folgt:



Schraffiert: *res stantes* im Sinne von h an e

Offensichtlich ist diese Variante maßgeschneidert für die ontische Deutung des „N“-Operators. Sie wird also unter den an dieser Stelle noch diskutierten Ansätzen den Peirceanischen Ansatz mit „N“ (P) und die S-Supervaluation (S) gegenüber dem Peirceanischen Ansatz mit „N_Δ“ (P^Δ) und der S^Δ-Supervaluation (S^Δ) für die ontische Deutung bevorzugen. „N“ wird, wie in 3N, gedeutet als: „Es steht jetzt$_b$ hier$_b$ *rebus sic stantibus* fest, *dass*“.

Sehen wir uns zunächst an, wie man im Sinne von P und S die Lage deuten müsste. P und S unterscheiden sich nun wie die entsprechenden Ansätze für LF und 3N: Beide sind zwar nicht epistemisch, sondern ontisch zu deuten. Aber sie geben eine jeweils unterschiedliche Konzeption davon wieder, von welcher Gestalt der Wahrmacher für Aussagen in einer bestimmten Situation ist: Wer S befürwortet, der geht – auch bei Vergangenheitsaussagen – vom *inzwischen* erreichten Zustand als Wahrmacher aus; wer P befürwortet, betont die Behauptungskompetenz und geht deshalb bei Vergangenheitsaussagen vom *damals* erreichten Zustand als Wahrmacher aus.

Sind die *res stantes* wie in der Abbildung angegeben, so ist klar:

- Über die Zukunft$_b$, ganz gleich ob kausal oder raumartig, rät man ins Leere. Es steht noch nicht einmal fest, *ob* die As und die Bs Frieden schließen werden. Und somit steht noch nicht fest, *dass* sie Frieden schließen werden. Die Wirklichkeit ist einfach noch nicht so weit, als dass man sie hier, so oder so, mit einer Rate-Aussage oder Wette treffen könnte. Gerade deshalb wird nach S einer solchen Aussage über die Zukunft$_b$ noch gar kein Wahrheitswert zugewiesen, nach P die Behauptungskompetenz verneint und daher der Wahrheitswert „falsch“ zugewiesen.
- Über die Gegenwart$_b$ und Vergangenheit$_b$ dagegen, wieder ganz gleich ob kausal oder raumartig, kann man zwar, wegen der endlichen Höchstgeschwindigkeit der Signalübertragung, bei Kontingentem auch nur raten. Aber man rät nun nicht ins Leere hinein. Vielmehr gibt es etwas an der Wirklichkeit zu treffen oder falsch zu repräsentieren. Dem entspricht das Ergebnis, dass Aussagen über die Gegenwart

oder Vergangenheit nicht nur nach P, sondern auch nach S Wahrheitswerte zugewiesen werden, etwa der Behauptung, die As hätten angegriffen oder die Bs schlügen gerade zurück, der Wert „wahr". Ontische *contingentia praesentia* und *contingentia praeterita* treten nicht auf.

- Der Schluss vom Wahrsein aufs Feststehen ist bei einer ontischen Interpretation von „N" unproblematisch **[B3]**.

Wie ist es mit den Positionen S^{Δ} und P^{Δ}? Kann man überhaupt etwas damit anfangen, wenn die *res stantes* so sind, wie in der Abbildung angegeben? Oder sind diese Ansätze unter dieser Annahme uninterpretierbar, so dass man sie einfach links liegen lässt?

Nahe liegt eine epistemische, nicht aber eine ontische Interpretation. Dass „$\mathsf{S}(\underset{.}{q} \wedge \mathrm{q})$" in Bezug auf die raumartige b-Gegenwart und „$\mathsf{PS}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p})$" in Bezug auf die raumartige b-Vergangenheit nicht den S^{Δ}-Wert „wahr" erhalten, sondern *gar* keinen S^{Δ}-Wert, wird man dann als Ausdruck dafür deuten, dass man eben noch nicht *wissen* kann, dass die As angegriffen haben oder dass die Bs gerade zurückschlagen. S^{Δ}-Werte sind dabei geradezu Wissbarkeits-Werte im Gegensatz zu den S-Werten, die auf Korrespondenz mit der Wirklichkeit abheben. Ganz entsprechend wird man auch die V-Werte von „$\mathbf{S}_{\Delta}(\underset{.}{q} \wedge \mathrm{q})$" und „$\mathbf{P}_{\Delta}\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p})$" im Sinne von P^{Δ} deuten.

Auch in dieser Interpretation *unterscheiden* sich der Peirceanische Ansatz und der Supervaluations-Ansatz, nämlich darin, dass P auch beim Rückblick die frühere epistemische Einschränkung berücksichtigt, während S beim Rückblick auf das später mögliche Wissen abhebt.

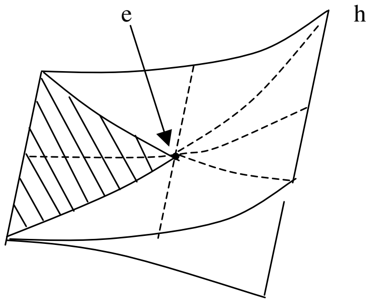
Schließlich ist mit einer epistemischen Deutung von S^{Δ} das folgende, zunächst etwas überraschende Ergebnis bestens erklärbar: „$N_{\Delta}\mathsf{S}(\underset{.}{q} \wedge \mathrm{q})$" bekommt für das frühere event e_1 im „spacefight"-Szenario den S^{Δ}-Wert „falsch"; trotzdem erhält „$\mathrm{N}\mathsf{S}(\underset{.}{q} \wedge \mathrm{q})$" den S^{Δ}-Wert „wahr". Entsprechendes gilt für die Vergangenheits-Aussagen. Die Deutung ist: Diese Dinge sind zwar wahr (und das steht auch fest, was „N" anzeigt), aber man kann es eben noch nicht wissen.

Die epistemische Interpretation der P^{Δ}- und S^{Δ}-Werte und des Operators „N_{Δ}" bringt einen erheblichen Vorteil mit sich, wenn man an hergebrachten Intuitionen festhalten möchte: Es treten zwar Formeln auf, die man *formal* gesehen mit dem Etikett „*contingens praesens*" oder „*contingens praeteritum*" versehen mag. Aber es wird nicht *ernsthaft* behauptet, dass es derlei gibt. Da die entsprechenden Formeln gar nicht ontisch interpretiert werden, kann man sagen: Die Annahme der Verzweigung entlang einer Vorderkante vermeidet echte *contingentia praesentia* und *contingentia praeterita*. Im Grunde bleibt alles beim klassischen Bild, wie es am Ende von Teil II ausgeführt wurde.

Soll man angesichts dieser Vorteile nun tatsächlich annehmen, dass die *res stantes* im Sinne von h für e tatsächlich eine bis zu einschließlich $t_b(e)$ h-artige Wirklichkeit sind? Dagegen spricht die Relativierung der Zeitpunkte aufs Bezugssystem: Warum gerade $t_b(e)$? Warum nicht $t_{b2}(e)$? Je nachdem, welches Bezugssystem man wählt, erhält man offenbar andere *res stantes*, wenn nicht ein Bezugssystem ontisch vorrangig ist.

3.2.5 Vierte Möglichkeit: „bei h-Artigkeit auf dem Vergangenheitslichtkegel“

Diese Möglichkeit lässt sich anschaulich darstellen wie folgt:



Schraffiert: *res stantes* im Sinne von h an e

Diese Variante ist maßgeschneidert für die ontische Deutung des „N_Δ“-Operators. In ihrem Zentrum stehen P^Δ und S^Δ. Nun wird „N_Δ“ gelesen als „Es steht jetzt-hier *rebus sic stantibus* fest, *dass*“.

Nun sind die *contingentia praesentia*- und *contingentia praeterita*-Aussagen nicht bloß epistemisch, sondern ontisch ernst zu nehmen: Die Wirklichkeit ist einfach an e_1 nicht so weit, dass sie an e_1 zu der Behauptung berechtigt, die Bs schlügen gerade zurück.

Zufällig kann man es auch nicht *wissen*, dass/ob sie das tun. Und zufällig ist die Wirklichkeit auf der Weltlinie der Cs gerade dann so weit, dass sie zur Äußerung berechtigt, die Bs hätten zurückgeschlagen, wenn man dies auch wissen kann. Beim Ausschluss der „wings“ aus dem Feststehenden fallen ontische und epistemische Determiniertheit *extensional* zusammen. Beides ist aber *begrifflich* unabhängig voneinander.

Das ist ziemlich gewöhnungsbedürftig. Alle anderen Möglichkeiten haben sich aber inzwischen als unvertretbar herausgestellt. Die Frage ist deshalb nicht mehr, was angesichts traditioneller Intuitionen *dafür* spricht, die vierte Variante zu befürworten. Vielmehr wird man die gewöhnungsbedürftigen Züge dieser Variante als Preis ansehen müssen, den man zahlen muss, wenn man überhaupt eine vertretbare Lösung haben möchte. Ist dieser Preis absurd hoch, so ist man in der misslichen Situation, dass keine der möglichen Lesarten vertretbar ist. Es lässt sich jedoch dafür plädieren, dass der Preis nicht absurd hoch ist:

1. Die *res stantes* sind nun nicht Bezugssystem-abhängig konzipiert wie bei der „Vorderkanten“-Variante. Das ist plausibel, denn die *res stantes* sind nun nicht mehr von der willkürlichen Wahl des Bezugssystems abhängig.
2. Angesichts der *modernen* Geschichte der Modallogik erscheint die Einbeziehung der räumlichen Komponente der raumzeitlichen Position in die Beurteilung des Feststehenden als natürlicher weiterer Schritt.

Der zweite Punkt ist von ziemlich großer Reichweite. Es ist angebracht, ihn sich etwas deutlicher vor Augen zu führen.

3.2.6 Eventisierte Notwendigkeit als Spezialfall der positionalen Notwendigkeit

Bei der Unterscheidung zwischen notwendigerweise und kontingenterweise wahren Aussagen hat man zunächst gar nicht an eine zeitliche Relativierung gedacht. Man hat – sehr grob gesagt - die Grenze gezogen zwischen solchen Aussagen, die aus empirischen Gründen wahr sind, und solchen Aussagen, die aus anderen Gründen wahr sind. Notwendigerweise wahr waren dabei die aus nicht-empirischen Gründen wahren Aussagen. Auf dieser Stufe ist die Deutung einer einfachen Modallogik wie S5 im Sinne alethischer Modalitäten anzusiedeln.

In einem zweiten Schritt hat man wiederentdeckt, was im Anschluss an Aristoteles in Antike und Mittelalter schon *state of the art* gewesen war: Es gibt eine **positionale Notwendigkeit**, und zwar als zeitgebundene, „historische" Notwendigkeit („historical necessity"). Man sollte von vielen Aussagen nicht als *simpliciter* notwendig oder nicht notwendig sprechen, sondern relativ auf die zeitliche Position des sie Äußernden und den dann erreichten Stand der Dinge. Solange man dabei räumliche Entfernungen vernachlässigt, kann man dabei historische Notwendigkeit wahlweise als Unabänderlichkeit, Wissbarkeit oder ontisches Feststehen erläutern. Es ist von den Entdeckungen Arthur Priors vielleicht die größte, dass das alte Konzept der *positionalen Notwendigkeit* ernst zu nehmen ist und mit den Mitteln der modernen Logik in aller Strenge modelliert werden kann. Es hat eine Weile gedauert, bis sich diese Entdeckung verbreitet hat, und die bis heute andauernde Erforschung der kombinierten Zeit- und Modallogik einschließlich der Diskussion der Sprache LF am Beginn von Teil II dieser Studie ist noch der Phase der Beschäftigung mit der historischen Notwendigkeit zuzurechnen.[7]

Bezieht man *räumliche* Abstände und die Endlichkeit der maximalen Geschwindigkeit der Signalübertragung mit ein, so wird man die historische Notwendigkeit als ontisches Feststehen erläutern und von den Begriffen der Unabänderlichkeit und Wissbarkeit trennen. Die – noch absolut vom Bezugssystem imaginierte – räumliche Position spielt aber dafür, *was* gerade feststeht, keine Rolle. Dies ist der am Ende von Teil II dieser Studie erreichte Stand. Der „N"-Operator wird ontisch gedeutet, und „Sp $\rightarrow$ ENSp" sowie „Np $\rightarrow$ ENSp" sind LF$\times$S5-allgemeingültig.

Als ein dritter Schritt ließe sich nun die folgende Entdeckung werten, *wenn* es denn eine Entdeckung ist: Neben der temporalen ist noch eine weitere Art der positionalen Notwendigkeit denkbar, die man ***eventisierte*** **Notwendigkeit** nennen kann; *diese* Art der positionalen Notwendigkeit ist es eigentlich, die man angesichts der Relativitätstheorie als wirklich gegeben annehmen sollte. Die historische Notwendigkeit ist nur als konzeptuelle Vorstufe zur eventisierten Notwendigkeit anzusehen. Die historische Notwendigkeit ist im Begriff der eventisierten Notwendigkeit aufgehoben,[8] nämlich als eventisierte Notwendigkeit *entlang einer*

---

[7] Dies gilt, neben den Arbeiten Kutscheras und Wölfls, auch für die große Darstellung von Belnap, Perloff und Xu, die bewusst auf die Einbeziehung der räumlichen Dimension verzichtet (vgl. S.178).

[8] Dies kann durchaus wieder im Hegelschen Sinn von *negatio*, *conservatio* und *elevatio* verstanden werden.

einzigen Weltlinie: Jede Weltlinie kann ja im Sinne der AR als ein Ort aufgefasst werden; und LF-Modelle lassen sich als Längsschnitte durch LF×Rel-Modelle entlang einem bestimmten Ort eines Bezugssystems deuten. Der spatiale Charakterzug eines events (als Ort eines Koordinatensystems konkretisiert) stellt sich jetzt als tatsächlich relevant heraus. Es wird ja nunmehr „N_Δ" als der *ontisch* relevante Operator interpretiert. Und „$N_\Delta p \rightarrow \mathsf{E}N_\Delta\mathsf{S}p$" ist nicht 3N×Rel-allgemeingültig: Was an einem Ort ontisch feststeht, davon muss nicht überall der Fall sein, dass es irgendwo ontisch feststeht. Dies ist einfach eine Folge einer konsequenten *zweiten Relativierung*, die nicht bloß die erreichte zeitliche Position, sondern auch die eingenommene spatiale Position berücksichtigt – wobei beides in einem *event* unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie vereinigt ist. Die Nicht-Allgemeingültigkeit der genannten Formeln ist nicht unplausibel, sondern bloß gewöhnungsbedürftig, ebenso wie es im Zuge der Wiederentdeckung der historischen Notwendigkeit vielleicht gewöhnungsbedürftig war, dass „$Np \rightarrow \mathsf{H}N\mathsf{F}p$" nicht LF-allgemeingültig ist.

Ich halte die so beschriebene Position für attraktiv und bin tatsächlich der Auffassung, dass sie im Wesentlichen zutrifft. Aus diesem Grund erscheint mir, angefangen mit Belnaps „Branching Space-Time", fortgesetzt durch die Arbeiten von Müller und schließlich durch die Definition der Sprache 3N×Rel im vorangegangenen Kapitel eine neue Phase der Diskussion und ein echter Fortschritt gegenüber den bloß temporalisierten Modallogiken erreicht zu sein.

Aber die Rede von einer Entdeckung setzt voraus, dass es nicht nur *wahrscheinlich* ist, etwas entdeckt zu haben, sondern dass das Entdeckte *tatsächlich* vorliegt. Daran mögen nach wie vor Zweifel bestehen. Denn es erheben sich eine Reihe von ernst zu nehmenden Einwänden gegen den Ausschluss der kompletten „wings" aus den *res stantes*. Die letzten drei dieser Einwände zeigen meiner Meinung nach, dass die eventisierte Notwendigkeit zwar wirklich angenommen werden sollte, dass ihre Annahme aber nur die halbe Wahrheit ist: Sie ist Ausdruck einer deiktischen, nicht aber einer narrativen Determiniertheit. Diese Begriffe werden im nächsten Kapitel endgültig zu klären sein.

3.3 Sieben Einwände gegen den Ausschluss der „wings"

3.3.1 Steht überhaupt fest, was wahr ist?

Man könnte zunächst meinen, dass der intuitiv sehr plausible Schluss vom Wahrsein aufs Feststehen nun dadurch bedroht ist, dass man z.B. im „spacefight"-Szenario für e_1 (und h_1) bezüglich der b-Gegenwart im Raumartigen für „$\mathsf{S}(q\wedge \mathrm{q})$" den V-Wert 1 erhält, für „$N_\Delta\mathsf{S}(q\wedge \mathrm{q})$" aber den V-Wert 0.

Doch bei der Interpretation dieses Ergebnisses ist zu beachten, dass weder den Vertreter von P noch den Vertreter von S^Δ der V-Wert von "$\mathsf{S}(q\wedge \mathrm{q})$" inhaltlich interessiert:

a) Der Vertreter des Peirceanischen Ansatzes mit “N_Δ” misst dem Zeichen “S” isoliert hier gar keine Bedeutung bei, sondern bloß der Zeichen-Kombination “N_ΔS”, die er als “$\mathbf{S}_\Delta$” abkürzt.
b) Der Vertreter des Supervaluations-Ansatzes mit S^Δ betrachtet V-Werte ohnehin als reine Verrechnungseinheiten, nicht als Wahrheitswerte.
Auf die Anfrage, wie er es denn mit dem Schluss vom Wahrsein aufs Feststehen hält, könnte der Peirceaner antworten: „Wo nichts wahr ist, da gibt es auch nichts aufs Feststehen zu schließen. Und ‚$\mathbf{S}_\Delta(q\wedge q)$' ist nun einmal falsch und nicht wahr.“ Der Vertreter von S^Δ wird ähnlich antworten: „Wo nichts wahr ist, da gibt es auch nichts aufs Feststehen zu schließen. Und ‚$S(q\wedge q)$' hat ja gar keinen Wahrheitswert.“

Auch im Fall des Seeschlacht-Szenarios würde ja der Peirceaner auf den Hinweis “Fp” habe zu t bezüglich h den V-Wert 1 antworten, *ihn* interessiere bloß der V-Wert von “**F**p” bei h-artigen Entwicklung bis zu t, und der sei 0. Und der Thomasonianer würde antworten, V-Werte interessierten ihn ohnehin nicht; für die Supervaluation sei aber der Wert von “Fp” nicht definiert.

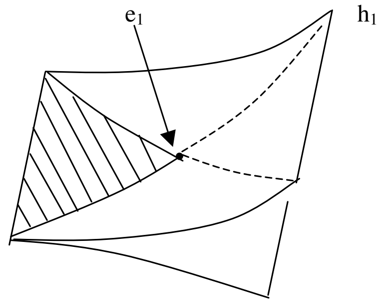
3.3.2 Ist überhaupt wahr, was feststeht?

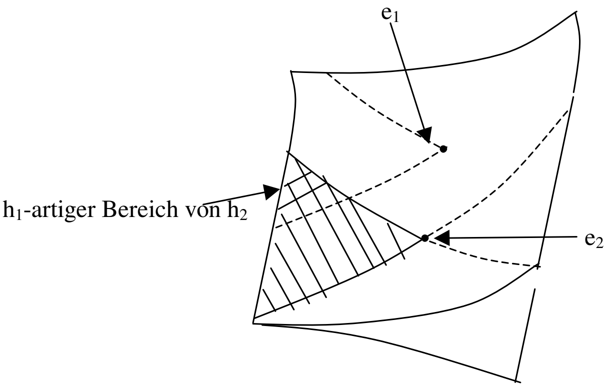
Man kann – zumindest gegenüber dem Verteter des S^Δ-Ansatzes – dem Zweifel Ausdruck verleihen, ob denn eigentlich der ebenfalls sehr plausible umgekehrte Schluss vom Feststehen aufs Wahrsein noch gilt, wenn man nur den Vergangenheitslichtkegel als *res stantes* anerkennt. Man wird ihn dabei nochmals auf den seltsamen Umstand hinweisen, dass der S^Δ-Wert von „$NS(q\wedge q)$“ tatsächlich 1 ist. Das ließ sich für eine *epistemische* Interpretation des S^Δ-Wertes gut erklären. Aber wie soll man das für eine *ontische* Interpretation des S^Δ-Wertes interpretieren? Soll “N” irgendwie das Feststehen ausdrücken, so scheint hier absurderweise gesagt zu sein, dass als wahr feststehen kann, was noch nicht wahr ist.

Eine *vorläufige* Antwort wäre: Das Zeichen “N” interessiert nicht, wenn es sich nicht vernünftig interpretieren lässt. Man *muss* es nicht benutzen. Aber das ist nur eine vorläufige Antwort. In der Tat scheint sich folgende Asymmetrie zu ergeben: Während die Vertreter des S- und des P-Ansatzes das Zeichen “N_Δ” sowie den S^Δ- und des P^Δ-Ansatz ganz zwanglos epistemisch interpretieren und so integrieren konnten, liegt eine Deutung von “N” und eine Integration des S- und des P-Ansatzes für die Vertreter von S^Δ und P^Δ nicht auf der Hand. Erst im nächsten Kapitels wird sich zeigen, wie eine solche Deutung aussehen kann und dass sie in Wirklichkeit ein zunächst noch verbliebenes großes Problem für S^Δ und P^Δ lösen hilft: das Problem des Erzählens raumweiter Geschichten.

3.3.3 Ein Gleichberechtigungs-Argument gegen den *Ausschluss* der „wings“?

Es ließ sich zeigen, dass man gegen den Einschluss der „wings“ ein plausibles Gleichberechtigungs-Argument vorbringen kann. Auch gegen den *Ausschluss* der „wings“ lässt sich ein Gleichberechtigungs-Argument vorbringen:[9]





Angenommen, wir haben e_1 erreicht und zwar bei h_1-artiger Entwicklung im Vergangenheitslichtkegel von e_1. So gehört eine h_2-artige Entwicklung an e_2 nicht zu unseren *res stantes*. Ebensowenig gehört eine h_1-artige Entwicklung an e_1 zu den *res stantes* im Sinne von h_2 an e_2. h_1 und h_2 sollen insofern kompatibel sein, als h_2 dort, wo sich die Vergangenheitslichtkegel von e_1 und e_2 überschneiden, h_1-artig ist (bzw., was dasselbe sagt: h_1 h_2-artig). Es spricht nun nichts dagegen, dass eine andere Gruppe von Weltbewohnern e_2 erreicht und zwar bei h_2-artigem Vergangenheitslichtkegel von e_2. Diese erreichten Positionen sind etwas ganz Handfestes. Ebenso, wie wir wirklich e_1 mit h_1-artigem Vergangenheitslichtkegel erreicht haben, erreichen die anderen wirklich e_2 mit h_2-artigem Vergangenheitslichtkegel. Dafür ist freilich die beschriebene Art der Kompatibilität von h_1 und h_2 unabdingbare Voraussetzung. Denn daran, dass wir e_1 erreicht haben und zwar bei h_1-artiger Entwicklung im Vergangenheitslichtkegel von e_1, gibt es nichts zu rütteln. Es ist einfach so, und man

[9] Vgl. zu diesem – entscheidenden – Punkt die Äußerungen von Putnam und Rietdijk (in seiner Replik auf Landsberg von 1976) und die entgegengesetzte Meinung Steins Anhang 1.

merkt es einfach so - ebenso wie man es einfach merkt, ob der Zahnarztbesuch schon gewesen ist oder noch bevorsteht, und zwar weil er entweder schon gewesen ist oder noch bevorsteht. Alles, was dem für uns Gewesenen widerspricht, kann also nicht wirklich sein, und so setzt die Annahme der *Verwirklichung* eines h_2-artigen Vergangenheitslichtkegels von e_2 die Kompatibilität von h_1 und h_2 voraus. Unser ganz handfester Zustand an e_1 gehört aber nicht zu den *res stantes* an e_2: Was wir tun, steht bei ihnen ontisch noch nicht fest. Und was sie tun, steht bei uns nicht fest.
Man scheint nun, ganz analog zum Gleichberechtigungs-Argument gegen den *Ein*schluss der „wings“, gegen ihren *Aus*schluss einwenden zu können:

> „Welche Festlegung der *res stantes* zählt denn nun? Die von e_1 aus oder die von e_2 aus? Offenbar sind doch alle events gleichberechtigt. Oder ist das Feststehen nun *solcherart* an die Perspektive eines events gebunden, dass von anderswo beurteilt noch offen stehen kann, was jetzt und hier schon feststeht? Das ist keinesfalls akzeptabel.“

Die angemessene Antwort auf diesen Einwand scheint mir: „Warum soll denn das nicht akzeptabel sein?“. Es ist nämlich eine kuriose Asymmetrie zwischen Einschluss und Ausschluss der „wings“ zu beachten. In der Tat war Folgendes *nicht* akzeptabel:

> Das Feststehen ist *solcherart* an die Perspektive eines events gebunden, dass von anderswo beurteilt schon feststehen kann, was jetzt und hier noch offen steht.

Das ließ sich zu Recht gegen den Einschluss der „wings“ vorbringen. Denn wenn von anderswo beurteilt meine kausale Zukunft schon in bestimmter Weise feststeht, *so engt mich das ein.*[10] Wie verhält es sich aber, wenn das Folgende wahr ist?

> Das Feststehen ist *solcherart* an die Perspektive eines events gebunden, dass von anderswo gesehen noch offen stehen kann, was jetzt und hier schon feststeht.

Dies bringt keine Einengung mit sich. Es mag ruhig sein, dass, was ich gerade getan habe oder tue, von einem raumartig von meiner Position getrennten event aus beurteilt ontisch nicht feststeht. *Ich* merke schon, dass es an meiner erreichten Position feststeht, und auch, was feststeht! Was kümmert mich die Beurteilung von woanders? Man antwortet so ganz analog zum zeitlichen Fall, in dem sagen kann: „Gestern stand es auf meiner Weltlinie auch noch nicht fest, was ich heute tun würde. Nun, da ich es tue, merke ich es schon! Was kümmert mich die Beurteilung von gestern aus?“ Kurz gesagt ist die entscheidende Asymmetrie diese: Das ontische Offenstehen von einer Position aus lässt für das ontische Feststehen an einer anderen Raum; das ontische

[10] Könnte ich es noch anders machen, als es, von anderswo beurteilt, feststeht, so würde dies ja das anderswo gefällte Urteil widerlegen, es würde also gar nicht *wirklich* dort feststehen. Es würde damit dort feststehen und nicht feststehen. Also kann ich es nicht anders machen. Das Argument ist übrigens kurioserweise völlig analog zum in Kap. II 2 (vgl. B1) ausgeführten Argument, warum ein allwissendes Wesen mit dem Indeterminismus inkompatibel wäre.

Feststehen von einer Position aus aber lässt keinen Raum für das Offenstehen an einer anderen.

3.3.4 Soll man wirklich *contingentia praesentia & praeterita* annehmen?

Die ontische Deutung von „N_Δ“ zwingt dazu, die *contingentia praesentia & praeterita*-Formeln ontisch ernst zu nehmen. Soll man aber wirklich einen Ansatz befürworten können, in dem so etwas vorkommt?

Man sollte. Nach dem in IV 3.2.6 Vorgebrachten ist dies bloß ein konsequentes Ausbuchstabieren der These, dass die ontische Position, die jeweils erreicht ist, nicht eine Bezugssystem-unabhängige, raumweite Zeitkante, sondern ein event mit bestimmtem Vergangenheitslichtkegel ist. Es ist lediglich klarzustellen, dass *contingentia praesentia & praeterita* weit weniger beunruhigend sind, als sie jemandem erscheinen mögen, der sie als Anlass zum Einwand nimmt.

Kein event mit *contingens praesens* oder *praeteritum* kann sich auf irgend einer möglichen Weltlinie durch meine erreichte Position befinden. Diese events sind immer im Raumartigen, nie im Vergangenheitslichtkegel angesiedelt. Es wird also nicht etwa behauptet, dass durch „backward causation“ erst nachträglich Dinge festgelegt werden, die mich schon beeinflusst haben o.ä. Sowie ich etwas wissen oder es mich beeinflussen kann, gibt es keinen Zweifel an seinem Feststehen. Übrigens tritt dies zur selben Gelegenheit ein, egal, welches Bezugssystem ich wähle. Denn wann ein event in meinen Vergangenheitslichtkegel eintritt, ist von der Wahl des Bezugssystems unabhängig. Womit auch immer etwas gleichzeitig gewesen sein mag, und wie auch immer Beobachter bei der Beurteilung von Vorgängen im Raumartigen uneins sein mögen, ob etwas schon war oder noch bevorsteht – nach dem Eintritt in den Lichtkegel sind sich alle Beobachter einig: Es *war*, und es liegt fest.

Außerdem sind die *contingentia praesentia & praeterita* ja *im Rückblick* halb so schlimm. Besonders der Vertreter von Position S^Δ kann sich dazu differenziert äußern. Er bekommt ja für das spätere event e_2 im „spacefight“ als S^Δ-Werte:

$$\mathsf{P}N_\Delta\mathsf{S}(q\wedge \mathrm{q}) = 0 \quad \text{aber } \mathsf{PS}\,(q\wedge \mathrm{q}) = 1 \quad \text{und } N_\Delta\mathsf{PS}\,(q\wedge \mathrm{q}) = 1.$$

Er kann also *für e_2* bei h_1-artigem Vergangenheitslichtkegel sagen:

1. Es war zwar niemals **[B4]** der Fall, dass es *feststand*, dass die Bs gerade zurückschlugen;
2. aber es war doch der Fall, dass die Bs damals zurückschlugen;
3. und jetzt *steht es auch fest*, dass es der Fall war, dass die Bs damals zurückschlugen.

Die zweite und dritte Aussage sollten lieber wahr sein, wenn das Zurückschlagen der Bs inzwischen in der kausalen Vergangenheit liegt. Dass man das Erste behaupten kann, mag als Pluspunkt für diese Position gedeutet werden, *wenn* man der Meinung ist, dass dies gerade einen besonderen Zug der relativistischen Anschauung repräsentiert. Man mag es als Minuspunkt sehen, wenn man der Ansicht ist: Es ist einfach unbegreiflich, wie feststehen soll, dass etwas stattfand, *obwohl* nie feststand, dass es im Stattfinden begriffen war.[11]

3.3.5 Ist der Unterschied zwischen kausaler Zukunft und Raumartigem eingeebnet?

Der Ausschluss der „wings“ eines events aus dem Bereich des Feststehenden macht diese offensichtlich der kausalen Zukunft dieses events viel ähnlicher, als man es aus dem klassischen Bild gewohnt ist. Intuitiv gibt es aber einen deutlichen Unterschied zwischen beidem: Die kausale Zukunft lässt sich beeinflussen, das Raumartige nicht. Es könnte zunächst so aussehen, als ob sich dieser Unterschied durch die zur Diskussion stehenden Ansätze gar nicht mehr einfangen ließe.

Nun gibt es zwar mehrere Möglichkeiten, die kausale Zukunft und das Raumartige formal voneinander zu unterscheiden **[B5]**. Es ist aber unwahrscheinlich, dass es jemandem, der diesen Einwand macht, eigentlich auf einen *formalen* Unterschied ankommt. Er fragt sich vielmehr, ob denn nun das Raumartige ganz denselben *ontologischen* Status habe wie die kausale Zukunft.

Man mag sagen, dass der Unterschied darin besteht, dass man eben die kausale Zukunft noch beeinflussen kann, das Raumartige aber nicht, und dass das der einzige ontologische Unterschied sei. Doch auch das wird einen hartnäckigen Gesprächspartner wohl nicht zufrieden stellen. Denn er könnte wieder sagen, darauf komme es ihm nicht an. Vielmehr sei sein Problem dieses:

> In die kausale Zukunft hinein *rät man ins Leere*. Alle Versuche der Beeinflussung der kausalen Zukunft in eine bestimmte Richtung mit noch so genauem Vorsatz und scheinbar noch so sicheren Mitteln zur Hand können ja fehlschlagen.[12] Rät man nun tatsächlich ganz auf dieselbe Art für das gesamte Raumartige ins Leere? Raten die Cs auf dieselbe Art *ins Leere*, wenn sie an e_7 vermuten, dass gerade in gewisser räumlicher Entfernung, an e_6 die Bs gerade zurückschlagen oder dass die As zuvor angegriffen haben?

Das scheint seltsam. Denn später stellt sich doch heraus, dass gerade das Vermutete geschehen ist. *Zunächst* mag man entgegnen, das sei mit der kausalen Zukunft nicht anders. Man rät, dass die Seeschlacht stattfinden wird, und wenn sie stattfindet, so

---

[11] Vgl. z.B. Putnams Verwunderung in „Time and Physical Geometry“ (1967), S.246: „Things could come to *have been*, without its ever having been true that they are!“.

[12] Man mache sich klar, was einem an *sicherem* Handlungserfolg übrigbleibt, wenn man die Möglichkeiten plötzlicher Lähmung, herabfallender Dachziegel u.ä. mit einbezieht. Dies sind nicht etwa Ohnmachtsfantasien, sondern diese Möglichkeiten sind ja tatsächlich immer gegeben. Zum Glück sind wir rational genug, sie aufgrund ihrer geringen Wahrscheinlichkeit beim Leben zu vernachlässigen – oder ist es irrational, und die wegen übergroßer Sorge der Hilfe Bedürftigen sind die eigentlich Rationalen? Aber wer möchte dann noch rational sein!

stellt sich später, nämlich mit ihrem Stattfinden heraus, dass man richtig geraten hat. Der letzte Einwand wird jedoch zeigen, dass diese Antwort zu kurz gegriffen ist.

3.3.6 Ist die Gegenwart jetzt wieder auf ein einziges event geschrumpft?

In Kap. III 3 hatte es sich als großer Vorteil des Bezugssystem-Ockhamismus herausgestellt, dass man mit ihm die Behauptung vermeiden kann, die Gegenwart bestehe nur aus einem einzigen event, sei also räumlich nicht ausgedehnt. Nun basiert zwar P^{Δ} ebenso wie die Supervaluation mit S^{Δ} *formal gesehen* auf dem Bezugssystem-Ockhamismus. Aber es fragt sich, ob durch den Ausschluss der „wings" nicht *inhaltlich gesehen* doch wieder die Gegenwart auf ein einziges event zusammenschrumpft. Doch dies ist nicht der Fall. Zwar gehört nur der Zustand eines einzigen events der b-Gegenwart zu den *res stantes* an e_1: e_1 selbst. Doch immerhin: Man *spricht*, schon wenn man es so formuliert, auch von anderen, räumlich entfernten events in der b-Gegenwart, und man kann sagen:

> „Die b-Gegenwart ist in dem Sinne *räumlich* ausgedehnt, in dem die kausale Zukunft an $s_b(e_1)$ *zeitlich* ausgedehnt ist. In beides hinein rät man zwar ins Leere; aber man rät wenigstens *hinein*."

Das ist ein deutlicher Unterschied zur Konzeption der Schrumpfgegenwart. Was bleibt, ist die Frage, ob man sich damit zufrieden geben kann, dass man für das gesamte Raumartige ins Leere rät.

3.3.7 Aber wir erfahren doch später, was bereits geschehen ist!

Man kann das „spacefight"-Szenario rückblickend von e_2 mit h_1-artigem Vergangenheitslichtkegel aus so beschreiben: „Nach einer Weile Abwarten auf ihrer Weltlinie erfahren die Cs, dass sie richtig geraten haben, dass nämlich die As angegriffen *haben*; wieder etwas später erfahren sie, dass sie noch einmal richtig geraten haben, dass nämlich die Bs sich gewehrt *haben*; und noch etwas später erfahren sie, dass sie auch beim dritten Mal richtig geraten haben, dass nämlich die Konfrontation ein Ende gefunden *hat*."

Diese Beschreibung macht einen entscheidenden Unterschied zum Seeschlacht-Szenario deutlich, wenn man dieses auf einen einzigen Ort einschränkt. Denn hier muss man sagen: „Wenn die Seeschlacht stattfindet, so erfährt man *mit ihrem Stattfinden*, dass man richtig geraten hat, dass sie stattfinden werde. Man erfährt, dass man richtig geraten hat, dass nämlich die Seeschlacht *stattfindet*. Sowie sie stattfindet, aber nicht vorher, ist die Wirklichkeit so weit, die zuvor gemachte Vermutung zu bestätigen."

Geht man im *klassischen* Bild von einer *räumlich entfernten* Seeschlacht aus (vgl. Kap. II 3), so wird man sagen: „Wenn die Seeschlacht stattfindet, so erfährt man später, dass man richtig geraten hat, dass sie stattfinden werde. Man erfährt, dass man richtig geraten hat, dass nämlich die Seeschlacht *stattgefunden hat*. Sowie sie *stattfand*, war die Wirklichkeit so weit, die zuvor gemachte Vermutung zu bestätigen. Später erfährt man davon, dass das so *war*."

Welcher Beschreibung ist eine angemessene Beschreibung des „spacefight"-Szenarios näher? Ganz sicher der zweiten. Schon in Kap. III 3 ließ sich gegen den Peirceanischen Ansatz für Bezugssysteme als wahrer Kern von Rakićs Argument gegen den Ausschluss der *gesamten* „wings" aus dem „Realisierten" anführen:[13] Wir erfahren später, dass zuvor etwas geschehen *ist*. Der „spacefight" wird nicht rückwirkend von uns in den Weltlauf eingesetzt, wenn wir davon erfahren. Und es *geschieht* auch nicht erst, wenn wir davon erfahren (nur dann wäre aber eine Beschreibung des „spacefight"-Szenarios der ersten Beschreibung ähnlich).

Wer das so sieht, mag die Wahrheitswertlücken der S^{Δ}-Supervaluation so kommentieren: Es ist einfach unbegreiflich, wie man sagen soll, dass etwas stattfand und auch feststeht, dass es stattfand, obwohl es nie eine Position gab, aus der heraus man wahrheitsgemäß sagen konnte „Nun ist es im Stattfinden begriffen".

Etwas sträubt sich hartnäckig dagegen, dass man ins gesamte Raumartige auf ganz dieselbe Art ins Leere rät wie in die kausale Zukunft. Und man kann so präzise beschreiben, was da Unbehagen auslöst, dass sich dies nicht einfach als anachronistisches Vorurteil vom Tisch wischen lässt. Jede zufrieden stellende Lösung wird dennoch davon ausgehen müssen, dass zumindest in *einem* Sinn allein der Vergangenheitslichtkegel als Stand der Dinge zählen kann.

Das letzte Kapitel soll diese Spannung auflösen, indem sie eine Interpretation für den Bezugssystem-relativen „N"-Operator vorschlägt. Ohne diese Ergänzung müsste auch der vierte mögliche Versuch, das Problem der „wings" zu lösen, als gescheitert gelten, weil sich zu viele Einwände dagegen ergeben haben. *Mit* ihr wird sich jedoch ein Bild ergeben, dass als vollständige Lösung des Problems gelten darf.

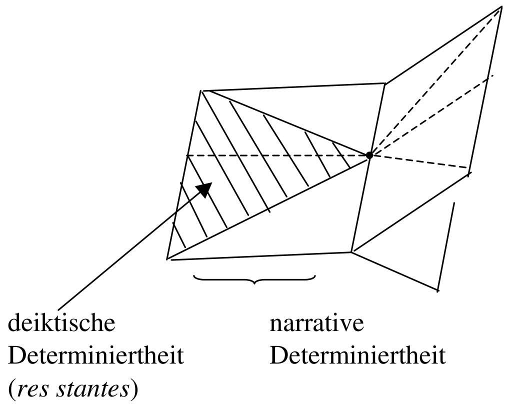
[13] Vgl. Kap. III 3.4.3 und Kap. III 1.2.3.2.

KAPITEL 4

Deiktische und narrative Determiniertheit

4.1 Statt einer Einleitung ein Bild

Im diesem Kapitel soll der Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit als Lösung der Probleme eingeführt werden, die sich im vorangehenden Kapitel ergeben haben. Es ist vielleicht nützlich, zunächst der Lösung, die im Folgenden entwickelt werden soll, eine bildliche Darstellung voranzustellen.



Die Darstellung erfolgt aus der Perspektive eines bestimmten Bezugssystems. Für ein anderes Bezugssystem müsste die Faltkante anders geneigt sein, was evtl. Einfluss darauf hat, wie das untere Weltblatt beschriftet sein kann. An dieser Stelle geht es jedoch nicht um Einzelheiten, sondern nur um den ersten Eindruck, dass dies eine Möglichkeit ist, den Ausschluss der „wings“ *nach der Wahl eines bestimmten Bezugssystems* darzustellen. Soviel lässt sich an der Faltkante schon erkennen: Deiktische Determiniertheit ist Bezugssystem-unabhängig, narrative Determiniertheit ist Bezugssystem-abhängig.

4.2 Deiktische Determiniertheit

In *einem* Sinn handelt es sich *nur* beim verwirklichten Vergangenheitslichtkegel eines erreichten events um den Stand der Dinge für das erreichte event: seine *res stantes*. In diesem Sinn sind die *res stantes* Bezugssystem-unabhängig. Man muss deshalb kein Bezugssystem spezifizieren, um sich auf sie zu beziehen; ja man muss überhaupt nicht konzeptuell tätig werden, um auf sie einzugehen. Man kann einfach, mit dem erreichten event als Standpunkt, darauf zeigen. Das tut man etwa, indem man das Wort „so“ als Zeigewort verwendet und sagt: „So ist es“.

Dass „ich“, „hier“ und „jetzt“ Zeigewörter sind, ist wohlbekannt. Dass es sich bei „so“ („*this* way“) auch um ein Zeigewort handelt, ist meines Wissens noch wenig aufgefallen.[1] Man könnte meinen, „so“ sei einfach eine Abkürzung für eine Zustands*beschreibung*. Aber tatsächlich *beschreibt* man mit der Äußerung des Wörtchen „so“ ebensowenig einen Zustand, wie man mit „ich“ sich selbst, mit „hier“ einen Ort oder mit „jetzt“ einen Zeitpunkt in seinen Eigenschaften *beschreibt*. Man *zeigt* darauf, und das ist etwas ganz anderes. Der Unterschied zwischen „beschreiben“ und „zeigen“ ist wohl einer der bedeutsamsten Unterschiede in der Metaphysik. Ihn zu beachten, scheint mir nicht nur für das in dieser Studie behandelte Problem wichtig. Meine Sympathie gilt dabei der These vom Vorrang des Zeigens vor dem Beschreiben, dies aber nicht im Sinne des Mystizismus von Wittgensteins „Tractatus“, sondern im Sinne einer *realistischen* Grundüberzeugung. Man kann gut an Kripkes „Naming and Necessity“ erläutern, was das Zeigen und eine realistische Grundhaltung miteinander zu tun haben: Um auf etwas als „*this* thing“ oder „*this* kind of thing“ draufzeigen zu können, muss es vorher selbständig strukturiert da sein. Ein Idealist wird dagegen den Vorrang des Beschreibens (im weiten Sinne von „Konzeptualisieren“) behaupten müssen. Denn seine Hauptthese ist ja, dass er erst durch seine Konzeptualisierung etwas Strukturiertes oder Abgegrenztes hervorbringt, worüber man reden kann.[2]

Sagt man, bezogen auf ein erreichtes event, „So ist es“, so sagt man zugleich über dessen Vergangenheitslichtkegel: „So ist es gewesen“. Die Art, in der ein bestimmter Inhalt des Vergangenheitslichtkegels für ein erreichtes event feststeht, mag man aus diesem Grund ***deiktische* Determiniertheit** nennen. Demnach handelt es sich beim Vergangenheitslichtkegel eines erreichten events um dessen *res stantes* im Sinne der *deiktischen* Determiniertheit.

Dass man sich mit einer deiktischen Aussage wie „So ist es gewesen“ nur auf den Vergangenheitslichtkegel bezieht, ist ein dramatischer Unterschied zum klassischen Bild. Schon im klassischen Bild ist es zwar sinnvoll, von einem Vergangenheitslichtkegel zu sprechen, wenn man die Endlichkeit der maximalen Geschwindigkeit der Signalübertragung anerkennt. Doch wird man ihm dann lediglich epistemische Bedeutung zubilligen. Auf die Frage, worauf er denn an einem event e mit der Aussage „So ist es gewesen“ zeige, wird jeder, der vom klassischen Bild ausgeht, antworten: „Selbstverständlich auf t(e) und alles davor“, also bildlich gesprochen auf t(e) als raumweite Vorderkante der Weltentwicklung und auf die

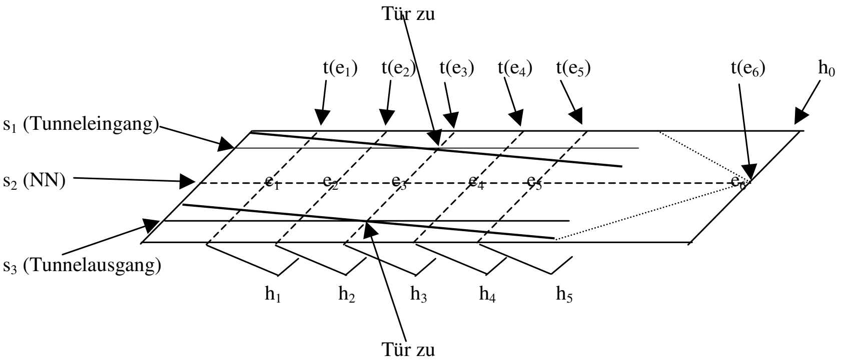
[1] Dass „wirklich“ ähnlich funktioniert wie „ich“, „hier“ und „jetzt“, ist eine These von Lewis in „Counterfactuals“ (1973). Ich lasse hier offen, was „wirklich“ und „so“ miteinander zu tun haben. Vielleicht ist „so“ eine Art Abkürzung für „jetzt – hier – wirklich“ oder aber „wirklich“ eine Art Abkürzung für „jetzt – hier – so“.

[2] Ausgerechnet der Idealist Hegel ist aber vielleicht der Autor, der dem Charakter des Wörtchens „so“ als Zeigewort schon früh nahe gekommen ist. Jedenfalls habe ich den Eindruck, dass man – bei aller verbleibenden Undurchdringlichkeit des Textes – das Kapitel „Die sinnliche Gewißheit oder das Diese[s] und das Meinen“ in der „Phänomenologie des Geistes“ mit Gewinn in diesem Sinne lesen kann.

gesamte dahinter liegende Fläche. Die ganze Fläche sind für ihn die *res stantes* im Sinne deiktischer Determiniertheit. Dagegen wird jemand, der vom relativistischen Bild ausgeht und das Bezugssystem b gewählt hat, wohl kaum auf dieselbe Frage antworten: „*Selbstverständlich* auf $t_b(e)$ und alles davor".

4.3 Narrative Determiniertheit im klassischen Bild

Verweilen wir einen Moment im klassischen Bild und vergessen vorübergehend die ganze Relativitätstheorie! Angenommen, NN erzählt im Rückblick, zu $t(e_6)$, die beliebte Geschichte, wie ein Zug durch einen Tunnel fährt. NN befindet sich in der Mitte des Tunnels (wenn man will: auf dem Tunneldach). Geschichten erzählen sich ja am leichtesten im Rückblick, und ein Historiker hat es einfacher als ein in der Situation stehender Reporter, weil er mehr überblicken kann. In der Tunnelmitte blinkt in regelmäßigen Abständen eine Warnleuchte (e_1 bis e_5). Es hat sich inzwischen herausgestellt, dass die Wirklichkeit auf dem gesamten Vergangenheitslichtkegel von e_6 h_0-artig ist.



NN kann die Geschichte auf einfache Art erzählen (vgl. Kap. III 1):

> „Zu $t(e_1)$ war die Lok im Tunnel, das Zugende ragte aus dem Tunnel heraus. Der Zug ist ständig weitergefahren, aber zu $t(e_2)$ war es immer noch so. Zu $t(e_3)$ war der Zug gerade ganz im Tunnel, als für einen Augenblick eine Tür am Tunneleingang und eine Tür am Tunnelausgang zufielen und sich sogleich wieder öffneten. Zu $t(e_4)$ war die Lok schon wieder etwas aus dem Tunnel heraus und das Zugende noch drin. Der Zug ist weitergefahren, und zu $t(e_5)$ war die Lok schon wieder etwas weiter aus dem Tunnel heraus, aber das Zugende noch drin."

So könnte auch ein Determinist die Geschichte erzählen. Es gibt aber noch eine zweite Art, die Geschichte zu erzählen, die typisch indeterministisch ist. Der Grundgedanke ist dabei: So gut wie alles, was geschieht, könnte auch ausbleiben, und es entscheidet sich erst, ob es geschieht.[3]

Belnap referiert dankenswerterweise, dass Whitehead in seinem wenig gelesenen Monumentalwerk „Process and Reality" auf die ursprüngliche Wortbedeutung von „decision" als „Abtrennung" hingewiesen hat.[4] In diesem Sinne genommen soll im Folgenden das Kunstwort „Dezision" verstanden sein. Es ist ein wertvoller Hinweis Belnaps, dass man sich verzweigte Modelle als Geschichten von **Dezisionen** vorstellen kann. Das ist nicht dasselbe wie das mysteriöse „branching", von dem sonst – auch bei Belnap – die Rede ist, sondern ein viel besseres Bild. Zumindest unter klassischen Voraussetzungen kann man sagen: Im Laufe der Zeit werden immer mehr Möglichkeiten, die zunächst noch als Kandidaten für die Verwirklichung zur Verfügung stehen, abgeschnitten; die Zeit vergeht, indem die Möglichkeiten der Weltentwicklung durch ständig stattfindende Dezisionen immer weniger werden.[5]

Auch die Geschichte der Durchfahrt des Zugs durch den Tunnel lässt sich als Geschichte von Dezisionen erzählen. Dafür ist es wichtig, zunächst festzuhalten, was es mit den auf der Abbildung nach unten abgeknickten Weltblättern auf sich haben soll:[6]

1. Das Weltblatt h_1 sei für alle events e mit $t(e) < t(e_1)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t(e_1)$. Auf h_1 ist nämlich verzeichnet, dass zu $t(e_1)$ die Lok plötzlich entgleist, und dass (aus anderem Grund) zu $t(e_1)$ das Zugende plötzlich entgleist.
2. Das Weltblatt h_2 sei für alle events e mit $t(e) < t(e_2)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t(e_2)$. Auf h_2 ist nämlich verzeichnet, dass zu $t(e_2)$ eine Achse der Lok bricht, und dass (aus anderem Grund) zu $t(e_2)$ eine Achse am Zugende bricht.
3. Das Weltblatt h_3 sei für alle events e mit $t(e) < t(e_3)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t(e_3)$. Auf h_3 ist nämlich verzeichnet, dass zu $t(e_3)$ die Tür am Tunnelausgang klemmt, und dass (aus anderem Grund) zu $t(e_3)$ auch die Tür am Tunneleingang klemmt.
4. Das Weltblatt h_4 sei für alle events e mit $t(e) < t(e_4)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t(e_4)$. Auf h_4 ist nämlich verzeichnet, dass zu $t(e_4)$ die Lok plötzlich explodiert, und dass (aus anderem Grund) zu $t(e_4)$ das Zugende plötzlich explodiert.

---

[3] Ein Pessisimist könnte dies als modale Fassung von „Murphy's law" („Alles, was schief gehen kann, geht schief") ansehen. Doch das wäre keine gute Benennung. Denn manchmal entscheiden sich die Dinge ja auch zum Guten.

[4] Whitehead, „Process and Reality" (1929), S.68, zitiert in BST, S.407.

[5] Die Rede von „weniger" ist hier i.S. von „weniger umfassend". Die Mächtigkeit kann jeweils dieselbe bleiben. Dies ist sogar für realistische Modelle der wahrscheinlichste Fall, da - trotz des Ausscheidens von Möglichkeiten - an *jedem* Punkt unendlich viele Alternativen offen stehen dürften.

[6] Es ist in den Beispielen im Folgenden immer vorausgesetzt, dass es einen ersten Punkt der Determiniertheit und keinen letzten Punkt der Indeterminiertheit gibt. In Kap. II 2 wurde dafür argumentiert, dass das eine attraktive Option ist. Die Voraussetzung ist aber nicht wesentlich, sondern erleichtert bloß die Darstellung. Man könnte für alle inhaltlichen Punkte im Folgenden auch argumentieren, wenn man von letzten gemeinsamen events zweier Alternativen ausgeht. Nur wird die Formulierung z.T. komplizierter. Wer letzte gemeinsame events befürwortet, kann das Folgende *cum grano salis* lesen und dabei ohne weiteres Fall den wesentlichen Punkten folgen.

5. Das Weltblatt h_5 sei für alle events e mit $t(e) < t(e_5)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e‘ auf $t(e_5)$. Auf h_5 ist nämlich verzeichnet, dass zu $t(e_5)$ die Lok plötzlich stehen bleibt, und dass (aus anderem Grund) zu $t(e_5)$ das Zugende plötzlich stehen bleibt.

Schrecklich, was alles passieren kann; gut, dass man zu $t(e_6)$ sagen kann: Nichts davon ist passiert. Jedenfalls zeigen diese Möglichkeiten, dass NN seine Geschichte auch so erzählen kann, nämlich als Geschichte von Dezisionen:

> „Zu $t(e_1)$ war die Lok im Tunnel, das Zugende ragte aus dem Tunnel heraus. Mit $t(e_1)$ *entschied es sich*, dass die Lok nicht entgleiste und auch das Zugende nicht entgleiste, sondern dass sowohl Lok als auch Zugende weiterfuhren.
> Zu $t(e_2)$ war die Lok noch immer im Tunnel und das Zugende ragte immer noch ein kleines Stückchen aus dem Tunnel heraus. Mit $t(e_2)$ entschied es sich, dass keine Achse der Lok brach und auch keine Achse am Zugende brach, sondern dass sowohl Lok als auch Zugende weiterfuhren.
> Zu $t(e_3)$ war der Zug gerade ganz im Tunnel, als für einen Augenblick eine Tür am Tunneleingang und eine Tür am Tunnelausgang zufielen und sich sogleich wieder öffneten. Mit $t(e_3)$ entschied es sich, dass weder die Tür am Tunneleingang noch die Tür am Tunnelausgang klemmte.
> Zu $t(e_4)$ war die Lok schon wieder etwas aus dem Tunnel heraus und das Zugende noch drin. Mit $t(e_4)$ entschied es sich, dass weder die Lok noch das Zugende explodierte, sondern dass sowohl Lok als auch Zugende weiterfuhren.
> Zu $t(e_5)$ war die Lok aus dem Tunnel heraus und das Zugende noch etwas drin. Mit $t(e_5)$ entschied es sich, dass weder die Lok noch das Zugende plötzlich stehen blieben, sondern dass sowohl Lok als auch Zugende weiterfuhren.“

Man kann die Überlegung in zwei Richtungen fortsetzen:

(1) Wie könnte NN erläutern, was hier „sich entscheiden“ heißt? NN könnte z.B. sagen, dass es vor $t(e_1)$ noch *offen stand*, ob die Lok entgleisen würde, zu $t(e_1)$ aber nicht mehr; und, dass es vor $t(e_1)$ noch *offen stand*, ob das Zugende entgleisen würde, zu $t(e_1)$ aber nicht mehr. Das wiederum könnte er wie folgt erläutern:

> „Zu $t(e_1)$ war es *an der Lok* nicht mehr möglich, diese um $t(e_1)$ zum Entgleisen zu bringen; es war, dort wo sie war, zu $t(e_1)$ nichts mehr daran zu ändern, dass sie weiterfuhr. Und zu $t(e_1)$ war es *am Zugende* nicht mehr möglich, dieses um $t(e_1)$ zum Entgleisen zu bringen; es war, dort wo es war, zu $t(e_1)$ nichts mehr daran zu ändern, dass es weiterfuhr.“

Sollte jemand NN wirklich ernsthaft fragen, was er denn eigentlich damit meine, dass etwas zu einem Zeitpunkt feststeht, so könnte er *dieselbe* Erläuterung zur Antwort geben. Es fällt auf, wie „theoretisch“, wie wenig handfest dieses Kriterium ist: NN spricht z.B. nicht über sich selbst, sondern *darüber, was man (auch nicht mehr) hätte machen können, wenn man woanders gewesen wäre, als er es war*. Vermutlich wird

NN, der im klassischen Bild denkt, deshalb eher im Sinne der deiktischen Determiniertheit antworten: „*So* weit war eben dann die Weltgeschichte realisiert“.

(2) Angenommen, NN nehme die Position des Reporters ein und berichte, während die Dinge geschehen:

$t(e_1)$: „Die Lok ist jetzt im Tunnel, das Zugende ragt aus dem Tunnel heraus. Soeben *entscheidet es sich*, *dass* weder Lok noch Zugende entgleisen, sondern *dass* sowohl Lok als auch Zugende weiterfahren.“[7]
$t(e_2)$: „Die Lok ist immer noch im Tunnel und das Zugende ragt immer noch ein kleines Stückchen aus dem Tunnel heraus. Gerade eben entscheidet es sich, *dass* keine Achse der Lok bricht, auch keine Achse am Zugende, sondern *dass* sowohl Lok als auch Zugende weiterfahren.“
$t(e_3)$: „Der Zug ist jetzt in seiner ganzen Länge im Tunnel. In diesem Moment fällt eine Tür am Tunnelausgang zu, und am Tunneleingang auch. Es entscheidet sich damit, *dass* keine der beiden Türen klemmt.“
etc. etc.

In *einer* Hinsicht ist das eine seltsame Reportage: NN kann das alles nicht in Echtzeit *erfahren*, sondern immer nur *vermuten*, denn die Lichtgeschwindigkeit ist ja endlich. Doch darauf soll es nicht ankommen. Vielleicht berichtet NN, was jeden Tag einmal geschieht und kann deshalb, abgesehen vom Induktionsproblem, bei seinen Vermutungen ziemlich sicher sein. Vielmehr soll es auf die Frage ankommen, ob die Reportage aus wahren Aussagen besteht. Im klassischen Bild lautet die Antwort zweifellos „ja“.

Und – wie das Ende der Geschichte mit h_0-artiger Weltentwicklung bis zu incl. t_6 unwiderleglich bestätigt – es lag zu $t(e_1)$ eine bis zu incl. $t(e_1)$ h_0-artige Weltentwicklung vor, zu $t(e_2)$ eine bis zu incl. $t(e_2)$ h_0-artige Weltentwicklung etc.

Die Art von Determiniertheit, auf die sich NN bezieht, wenn er die Geschichte des Zuges als raumweite Geschichte von Dezisionen erzählt, soll als ***narrative* Determiniertheit** bezeichnet werden. Freilich ist das an dieser Stelle mehr ein Etikett als ein klar abgegrenzter Begriff. Die Abgrenzung ist auch im klassischen Bild nicht ganz einfach. Denn man sieht an der Begründung für die Bewertungen der Vergangenheitsaussagen und an der Austauschbarkeit der Erläuterungen des Wortes „feststehen“: Im klassischen Bild fallen deiktische und narrative Determiniertheit zumindest extensional zusammen, und *beide* werden durch den „N“-Operator wiedergegeben.

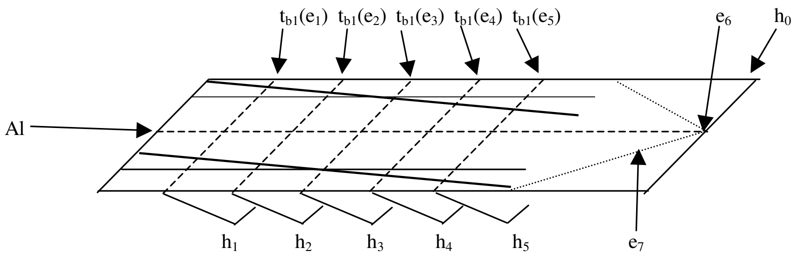
[7] Der Formulierung „entscheidet es sich“ wäre die Formulierung „ist es entschieden“ noch vorzuziehen, wenn man sich darauf verlassen könnte, dass sie nicht als Vergangenheitstempus missverstanden wird. Andere Sprachen (evtl. das Griechische mit seinem Aorist) mögen bessere aspektuale Ressourcen haben, um diesen Punkt auszudrücken.

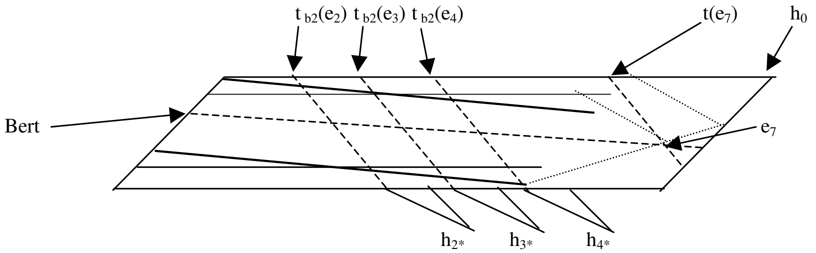
4.4 Narrative Determiniertheit im relativistischen Bild

4.4.1 Die Perspektive der Historiker: statt „massive coincidence" der Raum als Erzählform

Erinnern wir uns nun wieder an die Relativitätstheorie! Die Perspektive von Al (auf dem Tunneldach) entspricht gerade der Perspektive von NN. Abgesehen von der Reportage, zu der gleich noch mehr zu sagen sein wird, übernimmt Al alles, was NN sagt. Nur sind für die Beschreibung seiner Position die Zeitpunkte und die „Früher als"-Relation < jeweils mit dem Bezugssystem-Index „b_1" versehen. Dies gilt besonders auch für die Beschreibungen der Weltblätter h_1 bis h_5.

Bert, in der Mitte des Zuges, erzählt eine ziemlich andere Geschichte, wenn er von e_7 aus auf das Geschehen zurückblickt. Da sich e_7 so gerade eben im Vergangenheitslichtkegel von e_6 befinden soll und die Wirklichkeit sich an e_6 als auf dem Vergangenheitslichtkegel von e_6 h_0-artig herausgestellt haben sollte, muss sie sich auch an e_7 als auf dem Vergangenheitslichtkegel von e_7 h_0-artig erwiesen haben.





Berts Geschichte in der einfachen Version ist:

„Zu $t_{b2}(e_2)$ war die Lok am Tunnelausgang, und die Tür am Tunnelausgang fiel ihr für einen Moment „vor der Nase" zu; das Zugende ragte zu $t_{b2}(e_2)$ aus dem Tunnel heraus. Zu $t_{b2}(e_3)$ ragte der Zug sowohl mit der Lok als auch mit dem Zugende etwas aus dem Tunnel heraus (er ist ja länger als der Tunnel). Zu $t_{b2}(e_4)$ war die Lok schon wieder weiter aus dem Tunnel heraus, während das Zugende soeben im Tunnel war, als die Tür am Tunneleingang hinter ihm zufiel."

Mit den Weltblättern h_{2*}, h_{3*} und h_{4*} verhalte es sich folgendermaßen:
1. Das Weltblatt h_{2*} ist für alle events e mit $t_{b2}(e) <_{b2} t_{b2}(e_2)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t_{b2}(e_2)$. Auf h_{2*} ist nämlich verzeichnet, dass zu $t_{b2}(e_2)$ die Tür am Tunnelausgang klemmt, und dass zu $t_{b2}(e_2)$ das Zugende plötzlich entgleist.
2. Das Weltblatt h_{3*} ist für alle events e mit $t_{b2}(e) <_{b2} t_{b2}(e_3)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t_{b2}(e_3)$. Auf h_{3*} ist nämlich verzeichnet, dass zu $t_{b2}(e_3)$ die Lok explodiert, und dass zu $t_{b2}(e_3)$ am Zugende eine Achse bricht.
3. Das Weltblatt h_{4*} ist für alle events e mit $t_{b2}(e) <_{b2} t_{b2}(e_4)$ h_0-artig, aber nicht mehr für alle e' auf $t_{b2}(e_4)$. Auf h_{4*} ist nämlich verzeichnet, dass zu $t_{b2}(e_4)$ die Lok plötzlich stehenbleibt, und dass zu $t_{b2}(e_4)$ das Zugende explodiert.

Können beide, Al und Bert, die Geschichte der Tunneldurchfahrt als Geschichte von Dezisionen erzählen? *Wenn* das geht, so ist klar, wie diese Geschichten aussehen müssen. Die Geschichte von Al wäre dann ganz analog zu NNs Geschichte und müsste lauten:

> „Mit $t_{b1}(e_1)$ entschied es sich, dass die Lok nicht entgleiste, sondern weiterfuhr. Mit $t_{b1}(e_1)$ entschied es sich außerdem, dass das Zugende nicht entgleiste, sondern auch das Zugende weiterfuhr. Mit $t_{b1}(e_2)$ entschied es sich, dass keine Achse der Lok brach, sondern die Lok weiterfuhr. Mit $t_{b1}(e_2)$ entschied es sich außerdem, dass keine Achse am Zugende brach, sondern auch das Zugende weiterfuhr. Mit $t_{b1}(e_3)$ entschied es sich, dass die Tür am Tunnelausgang nicht klemmte, sondern kurz zufiel. Und mit $t_{b1}(e_3)$ entschied es sich, dass auch die Tür am Tunneleingang nicht klemmte, sondern kurz zufiel. Mit $t_{b1}(e_4)$ entschied es sich, dass die Lok nicht explodierte, sondern weiterfuhr. Und mit $t_{b1}(e_4)$ entschied es sich, dass das Zugende nicht explodierte, sondern weiterfuhr. Mit $t_{b1}(e_5)$ entschied es sich, dass die Lok nicht plötzlich stehenblieb, sondern weiterfuhr. Und mit $t_{b1}(e_5)$ entschied es sich, dass das Zugende nicht plötzlich stehenblieb, sondern weiterfuhr."

Berts Geschichte dagegen wäre:

> „Mit $t_{b2}(e_2)$ entschied es sich, dass die Tür am Tunnelausgang nicht klemmte, sondern kurz der Lok ‚vor der Nase' zufiel. Mit $t_{b2}(e_2)$ entschied es sich außerdem, dass das Zugende nicht entgleiste, sondern weiterfuhr. Mit $t_{b2}(e_3)$ entschied es sich, dass die Lok nicht explodierte, sondern weiterfuhr. Mit $t_{b2}(e_3)$ entschied es sich außerdem, dass keine Achse am Zugende brach, sondern das Zugende weiterfuhr. Mit $t_{b2}(e_4)$ entschied es sich, dass die Lok nicht plötzlich stehenblieb, sondern weiterfuhr. Und mit $t_{b1}(e_4)$ entschied es sich, dass die Tür am Zugende nicht klemmte, sondern zufiel."

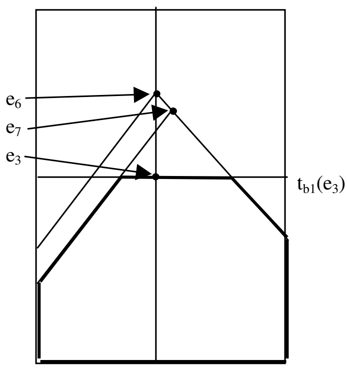
Sollen die beiden diese Geschichten erzählen können? Ja. Es spricht überhaupt nichts dagegen, dass sie das *im Rückblick* so tun. Es ist klar, dass sich die beiden nicht ganz einig sind.

So sagt Al: „Als es sich entschied, dass die Tür am Tunnelausgang nicht klemmen, sondern zufallen würde, da hatte es sich noch nicht entschieden, dass die Lok nicht explodieren würde, sonders dies stand noch offen; aber es entschied sich gerade, dass auch die Tür am Tunneleingang wirklich zufallen würde."

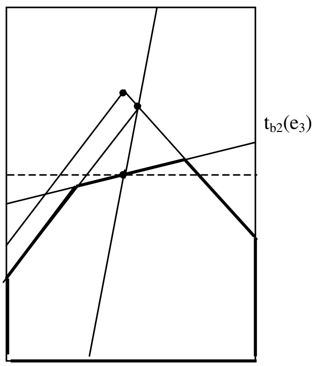
Bert dagegen meint: „Als es sich entschied, dass die Tür am Tunnelausgang nicht klemmen, sondern zufallen würde, da hatte es sich noch längst nicht entschieden, dass auch die Tür am Tunneleingang wirklich zufallen würde, sondern das stand noch offen; aber es entschied sich gerade, dass die Lok nicht explodieren würde."

Da die beiden wissen, dass sie jeweils unterschiedliche Bezugssysteme mit unterschiedlicher Gleichzeitigkeit verwenden, ist aber anzunehmen, dass sie das *im Rückblick* gar nicht als Widerspruch ansehen, sondern einfach als unterschiedliche Arten, die Geschichte der Tunneldurchfahrt zu erzählen. „Als es sich entschied, dass die Tür am Tunnelausgang zufallen würde..." heißt ja für Al soviel wie „zu $t_{b1}(e_3)$" bzw. b_1-gleichzeitig mit e_3 und für Bert soviel „zu $t_{b2}(e_2)$" bzw. b_2-gleichzeitig mit e_2. Und das ist jeweils etwas ganz anderes.

Beide haben eine interessante Möglichkeit, ihre Positionen für e_3 zusammenzufassen. Dazu sollte man sich klar machen, dass man die Spitze eines Vergangenheitslichtkegels an einer Bezugssystem-relativen Zeitkante *kappen* kann und der Lichtkegel ohne Spitze eine eindeutig beschreibbare Teilfläche eines Weltblatts ist, nämlich als event-Menge einfach die Schnittmenge des Lichtkegels mit der Fläche „hinter" der Kante. Relevant ist das im vorliegenden Beispiel für den Vergangenheitslichtkegel von e_7, und zwar einerseits, wenn man ihn an $t_{b1}(e_3)$ kappt, und andererseits, wenn man ihn an $t_{b2}(e_3)$ kappt.



dick umrandet (A):
$\Delta(e_7) \cap \{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\}$



dick umrandet (B):
$\Delta(e_7) \cap \{e \mid t_{b2}(e) \leq_{b2} t_{b2}(e_3)\}$

Al und Bert können nun ihre Positionen bezüglich e_3 im Rückblick beschreiben wie folgt:

> Al: „Mit *meinem* Zeitpunkt von e_3 entschied es sich, dass die Wirklichkeit im an *meinem* Zeitpunkt von e_3 gekappten Vergangenheitslichtkegel von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_3-artig.“[8]
> Bert: Mit *meinem* Zeitpunkt von e_3 entschied es sich, dass die Wirklichkeit im an *meinem* Zeitpunkt von e_3 gekappten Vergangenheitslichtkegel von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_{4*}-artig.“

Es ist wichtig, zu bemerken, dass z.B. Bert nicht hätte sagen können: „Mit $t_{b1}(e_3)$ entschied es sich, dass die Wirklichkeit auf dem ganzen Weltblatt bis zu meinem Zeitpunkt von e, h_0-artig sein würde und nicht etwa h_{3*}-artig.“ Denn über mehr als den Vergangenheitslichtkegel von e_7 kann er noch nichts sagen. Man *kann* das „kann er noch nichts sagen“ epistemisch verstehen. Auch damit es mit den folgenden Überlegungen zur Reporter-Perspektive zusammen passt, halte ich es jedoch für plausibler, dies im Sinne eines konsequent eventisierten Hemiaktualismus ontisch zu verstehen.

Man beachte außerdem, dass weder die A-Fläche Teil der B-Fläche ist noch umgekehrt. Um ihre kompletten Geschichten sehr kurz zu erzählen, können beide sagen:

> Al: „Mit $t_{b1}(e_1)$ entschied es sich, dass die Wirklichkeit auf dem an $t_{b1}(e_1)$ gekappten VLK von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_1-artig. [...] Mit $t_{b1}(e_5)$ entschied es sich, dass die Wirklichkeit auf dem an $t_{b1}(e_5)$ gekappten VLK von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_5-artig.“
>
> Bert: „Mit $t_{b2}(e_2)$ entschied es sich, dass die Wirklichkeit auf dem an $t_{b2}(e_2)$ gekappten VLK von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_{2*}-artig. [...] Mit $t_{b2}(e_4)$ entschied es sich, dass die Wirklichkeit auf dem an $t_{b2}(e)$ gekappten VLK von e_7 h_0-artig sein würde und nicht etwa h_{3*}-artig.“

Ist es nun sehr erstaunlich, dass beide das im Rückblick behaupten können, ohne sich in die Quere zu kommen? Muss eine erstaunliche Koordination von möglichen Weltverläufen angenommen werden, eine unwahrscheinliche „**massive coincidence**“,[9]

---

[8] Der Standpunkt von Al als Historiker ist zwar e_6. Aber da e_7 zum Vergangenheitslichtkegel von e_6 gehört, kann er zur besseren Verständigung mit Bert ebenfalls von e_7 ausgehen.

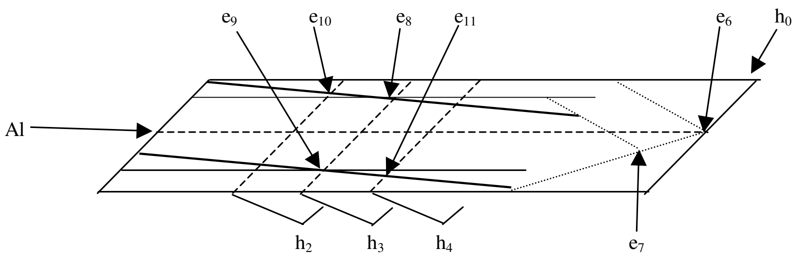
[9] BST Abschnitt 10. Vgl. S.414: „Could there really be such an uncanny synchronization of indeterministic events in the absence of causal order? Consider in particular that some of the correlation is between point events [...] that are galaxies of galaxies apart.“ S.416: „One may conjecture [...] that such a massive ‚coincidence‘ never occurs in Our World“. Aber sicher doch! Nur ist daran nichts Verwunderliches. Alternativen sind ja keine schwer zu entdeckenden seltenen Naturwesen. Es gibt sie einfach dadurch in Hülle und Fülle, dass kaum etwas irgendwo sicher ist und man die möglichen Dezisionen an events je nach gewähltem Bezugssystem so oder so zusammensetzen kann.

ja geradezu eine modale prästabilierte Harmonie, damit die Alternativen so schön zusammenstimmen? Keineswegs.

Die events sprechen sich natürlich weder untereinander ab, um in ihrer Realisierung koordiniert vorzurücken, noch müsste ihr koordiniertes Vorrücken von irgendeiner Stelle veranlasst werden. Al und Bert koordinieren sie selbst, indem sich jeder von beiden für ein Bezugssystem entscheidet, für das er seine Geschichte erzählt. Die Wahl für das Bezugssystem b_1 muss Al nicht einmal vor e_6 treffen, wenn er dann seine Geschichte erzählen will; ebenso muss Bert sein Bezugssystem b_2 nicht vor e_7 wählen. Mit der Wahl des Bezugssystems nehmen nun beide ihre jeweilige Koordination der events selbst vor. Und genau davon hängt auch das raumweite modale „branching“ ab, wenn man von so etwas überhaupt sprechen will.

Dabei kann nichts fehlgehen. Die Alternative wird nämlich nicht etwa so erzählt, wie sie zusammengesetzt ist (so dass man staunen müsste, dass eine passende Alternative gerade zur Hand ist); sondern wir setzen die Alternative selbst zusammen, indem wir erzählen – freilich nicht etwa phantasiert, sondern aus realen Elementen synthetisiert. Kant hat behauptet, dass die „transzendentale Idealität“ des Raumes die „empirische Realität“ garantiere.[10] Es zeigt sich: Ein wenig so ist es tatsächlich (wobei es, wenn man dies sagt, freilich weder auf Feinheiten von Kants Theorie noch Feinheiten seiner Terminologie ankommen darf). Und man mag einem moderaten Kantianer die Relativitätstheorie dadurch nahe bringen, dass man sagt: Der Raum ist zwar keine Anschauungsform im Sinne eines Rasters, das man der angeschauten Jetzt-Szene überstülpt (koordiniert werden ja nicht Sinnesdaten). Aber ein Koordinatensystem für die Raumzeit ist tatsächlich so etwas wie eine *Erzähl*form.

Wie geht die Synthesis einer Alternative im Rückblick konkret vor sich? An e_7 sollte sich die Wirklichkeit als auf dem gesamten Vergangenheitslichtkegel von e_7 h_0-artig herausgestellt haben. Betrachten wir, was das für die folgenden events bedeutet:
e_8: dasjenige event, an dem in h_0 die Tür am Tunneleingang zufällt;
e_9: dasjenige event, an dem in h_0 die Tür am Tunnelausgang zufällt;
e_{10}: dasjenige event, an dem in h_2 bzw. h_{2^*} die Achse am Zugende bricht;
e_{11}: dasjenige event, an dem in h_4 bzw. h_{4^*} die Lok explodiert.

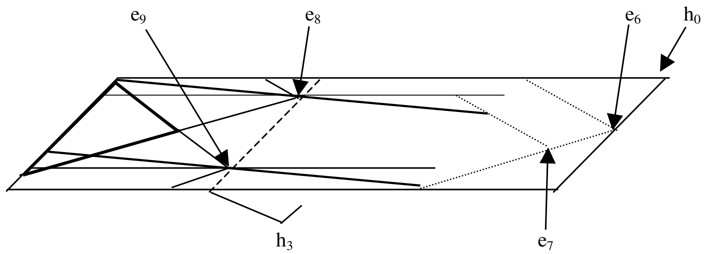


[10] KrV B44: „Wir behaupten also die empirische Realität des Raumes [...], ob zwar die transzendentale Idealität desselben.“

Was auch immer sich sonst irgendwo wann entschied – was kann man über e_8 und e_9 und ihre Vergangenheitslichtkegel aus der Perspektive von Al sagen?

Mit $t_{b1}(e_3)$ entschied es sich, und zwar an $s_{b1}(e_8)$, dass der Vergangenheitslichtkegel von e_8 *einschließlich e_8 selbst* h_0-artig sein würde. An jedem e mit $t_{b1}(e) <_{b1} t_{b1}(e_3)$ dagegen stand es noch nicht fest, dass der Vergangenheitslichtkegel von e_8 sich als h_3-artig herausstellen würde. Doch da sich der Vergangenheitslichtkegel von e_7 als h_0-artig herausgestellt hat, *muss* es damals anders gekommen sein. Denn $\Delta(e_8)$ ist ja in $\Delta(e_7)$ enthalten. Analog kann man erklären, wieso man sagen kann: Mit $t_{b1}(e_3)$ entschied es sich, und zwar an $s_{b1}(e_9)$, dass der Vergangenheitslichtkegel von e_9 einschließlich e_9 selbst h_0-artig sein würde. Daraus folgt *a fortiori*, dass man *im Rückblick* sagen kann, dass zu $t_{b1}(e_3)$ der gemeinsame Bereich der Vergangenheitslichtkegel von e_8 und e_9, also $\Delta(e_8) \cap \Delta(e_9)$, h_0-artig war.

dick umrahmt: $\Delta(e_8) \cap \Delta(e_9)$



e_8 und e_9 sind zwar besonders anschauliche events auf $t_{b1}(e_3)$. Aber man könnte genau so für zwei *beliebige* events auf $t_{b1}(e_3)$ innerhalb von $\Delta(e_7)$ argumentieren. Zu sagen, dass für *beliebige* e und e' aus $t_{b1}(e_3) \cap \Delta(e_7)$ der Schnitt $\Delta(e) \cap \Delta(e')$ zu $t_{b1}(e_3)$ h_0-artig war, heißt aber nichts anderes, als sagen: Der an $t_{b1}(e_3)$ gekappte Vergangenheitslichtkegel von e_7 war zu $t_{b1}(e_3)$ h_0-artig **[B1]**. Insofern ist es *cum grano salis* ganz richtig, im Rückblick aus der Perspektive von Al von einem „branching" zu $t_{b1}(e_3)$ entlang $t_{b1}(e_3)$ als Vorderkante zu sprechen, wenn man überhaupt von „branching" sprechen will. Die Kante wird nur an den Seiten durch den Rand von $\Delta(e_7)$ begrenzt.[11]

Man kann das Argument auch völlig analog für e_{10}, e_{11} und die Perspektive von Bert führen: Mit $t_{b2}(e_3)$ entschied es sich, und zwar an $s_{b2}(e_{10})$, dass $\Delta(e_{10})$ einschließlich e_{10} selbst h_0-artig sein würde; und, an $s_{b2}(e_{11})$, dass $\Delta(e_{11})$ einschließlich e_{11} selbst h_0-artig sein würde. Schon eins von beidem hätte genügt, um h_{2*} aus der Menge der realisierbaren Alternativen hinauszuwerfen. Im Rückblick kann man sagen, dass zu $t_{b2}(e_3)$ der gemeinsame Bereich der Vergangenheitslichtkegel von e_{10} und e_{11}, also $\Delta(e_{10}) \cap \Delta(e_{11})$, h_0-artig war. Verallgemeinert ergibt sich, dass man im Rückblick aus

[11] Je weiter zurück die Dezisionen liegen, von denen man erzählt, umso breiter wird die Kante. Hier ist für die Darstellung am Kapitelbeginn ein weit entfernter Erzählpunkt gewählt. Denn die Darstellung eines in gewissem Winkel gekappten Vergangenheitslichtkegels hätte dort nur Verwirrung gestiftet und damit das Gegenteil eines anschaulichen Einstiegs erreicht.

Berts Perspektive sagen kann: Der an $t_{b2}(e_3)$ gekappte Vergangenheitslichtkegel von e_7 war zu $t_{b2}(e_3)$ h_0-artig.

In Kap. IV 2 konnte die Definierbarkeit der Bezugssystem-relativen Zugänglichkeitsrelation A^N durch die Lichtkegel-relative und Bezugssystem-unabhängige Zugänglichkeitsrelation $A^{N\Delta}$ durch Überblendung von Lichtkegeln entlang einem Bezugssystem-relativen Zeitpunkt nur als technisches Resultat bemerkt werden. Dieses Resultat ist nun interpretierbar: Das so genannte „branching" an raumweiten Zeitpunkten ist eine Konstruktion aus Lichtkegeln.

Zwar kann man an e_7 für b_1 nicht sagen, dass die Wahrheit von „p" im Sinne der *deiktischen* Determiniertheit feststand, wohl aber, dass sie im Sinne der *narrativen* Determiniertheit feststand. Die narrative Determiniertheit wird durch den „N"-Operator ausgedrückt. Der ist Bezugssystem-relativ.[12] Das Bezugssystem-sensitive Verhalten von „N" zeigt, dass mit dem Begriff der narrativen Determiniertheit keinesfalls doch noch ein Einschluss der „wings" eingeschmuggelt wird. Es wäre ganz falsch, zu sagen:

> „(1) Für jedes event in den ‚wings' gibt es ein Bezugssystem, so dass der Zustand an ihm im Sinne der narrativen Determiniertheit relativ auf dieses Bezugssystem feststeht.
> (2) Deshalb müssen die gesamten „wings" im Sinne der narrativen Determinierheit als determiniert gelten."

Erstens stimmt die Behauptung (1) streng genommen nicht. Im Beispiel gilt dies nämlich nicht für events außerhalb von $\Delta(e_7)$. Zweitens, und wichtiger, ist der Schritt von (1) auf (2) nicht nachvollziehbar. Narrative Determiniertheit gibt es nur relativ auf ein bestimmtes Bezugssystem. Es wäre gar nicht einzusehen, wieso die Bezugssystem-*unabhängige* Wahrheit von „+PNSp" irgendeine Art von Determiniertheit widerspiegeln sollte. Wenn ich eine Geschichte erzählen will, so sollte ich zuvor ein Bezugssystem auswählen, für das ich sie erzähle; und für dieses bekomme ich die narrative Determiniertheit, indem ich die Dezisionen im Sinne *dieses* Bezugssystems koordiniere.

Inwiefern trägt die narrative Determiniertheit aus der Historiker-Perspektive dazu bei, das verbliebene Problem zu lösen, das lautete: Man kann doch nicht im Rückblick sagen, dass es festeht, dass etwas geschehen sei, wenn es nie feststand, dass es geschah. Das Problem wird in erheblichem Maß abgemildert, und zwar dadurch, dass man nun sagen kann:

> Wenn feststeht, dass etwas in räumlicher Entfernung geschehen ist („N_ΔPSp"), so stand es zwar nie im Sinne der *deiktischen* Determiniertheit fest („~PN_ΔSp"); aber es stand im Sinne der *narrativen* Determiniertheit fest („PNSp"). Das plausibiliert und erklärt auch, inwiefern man im Rückblick für den S^Δ-Ansatz sagt, dass es

[12] Das sieht man z.B. deutlich daran, dass in Bezug auf e_7 und h_0 das Folgende sowohl im Sinne von V- als auch im Sinne von S^Δ–Werten gilt, wenn man „q" stehen lässt für „Die Tür an der Tunnelausfahrt fällt zu": Für b_1: $PN(Sp \wedge Sq) = 1$, aber für b_2: $PN(Sp \wedge Sq) = 0$ **[B2]**.

> geschah („PSp"): Es *hat* sich entschieden, und zwar als Dezision an einer Lichtkegel-Spitze in der Vergangenheit. Das Geschehen wird nicht nachträglich in den Weltlauf eingesetzt oder ist erst mit seinem Bekanntwerden vonstatten gegangen. Nur wird die Dezision an der Lichtkegel-Spitze für verschiedene Bezugssysteme mit *verschiedenen* Mengen von events (und damit verschiedenen Mengen von Dezisionen an Lichtkegel-Spitzen) als gleichzeitig koordiniert. Die Einschätzung, *wann* es geschah, variiert mit dem Bezugssystem; denn „wann" heißt „gleichzeitig womit", und die Gleichzeitigkeit ist relativ aufs Bezugssystem. Dass es im Sinne einer Dezision *geschah*, *bevor* man davon erfährt, darüber sind sich dann, wenn man es erfährt, die Benutzer aller Bezugssysteme einig.

Auf einer möglichen Weltlinie durch ein 3N×Rel-Modell kann der Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit übrigens ebensowenig ins Auge fallen wie in einem klassischen LF×S5-Modell. Auf *derselben* Weltlinie ist, sowie etwas („p") geschehen ist, mit „Pp", „N_ΔPp" und „PNp" auch „PN_Δp" wahr. Sowie es geschieht, ist ja nicht nur „p", sondern auch „Np" und „N_Δp" wahr.

Das ist ein guter Teil der Lösung. Aber noch ist nicht erklärt, welchen Sinn es macht, dass man für b_1 und e_3 (und h_0) die folgenden S^Δ-Werte erhält: N_ΔSp = 0, aber NSp = 1. In welchem Sinn kann der „N"-Operator angesichts dieser Ergebnisse gemeint sein? Ist überhaupt eine konkrete Deutung für ihn in diesen Ergebnissen möglich? Diese Frage betrifft nicht mehr die Perspektive eines Historikers an e_7, sondern die eines Reporters an e_3. Mit ihr beschäftigt sich der Rest der Lösung.

4.4.2 Die Perspektive der Reporter

Könnte Al als Reporter einfach dieselbe Geschichte, die er an e_7 in der Vergangenheit erzählt hat, im *tempus praesens* als wahre Reportage vorbringen? Könnte Bert dasselbe mit seiner Geschichte tun? Dass sie *raten* müssen, ist wieder egal; nur auf die Wahrheit kommt es an.

Die für $t_{b1}(e_3)$ bzw. $t_{b2}(e_3)$ *an* e_3 geäußerten Ausschnitte aus den Reportagen müssten dann lauten:

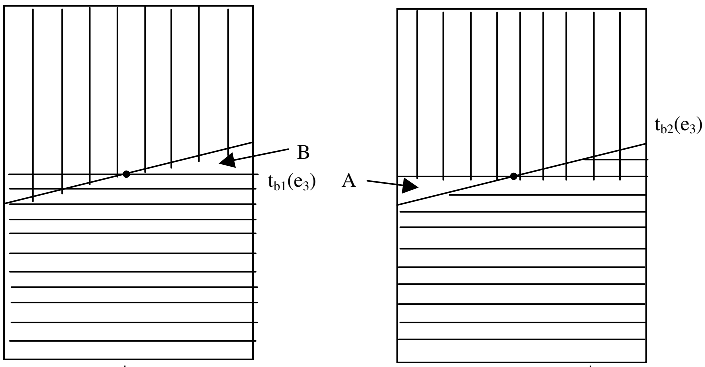
> Al: „Mit diesem Moment entscheid*et* es sich, dass die Tür am Tunnelausgang nicht klemmt, sondern kurz zufällt. Und mit ihm entscheidet es sich, dass auch die Tür am Tunneleingang nicht klemmt, sondern kurz zufällt. Aber wird auch die Explosion der Lok ausbleiben? Das steht noch offen..."

> Bert: „Mit diesem Moment entscheid*et* es sich, dass die Lok nicht explodiert, sondern weiterfährt. Und mit ihm entscheidet es sich, dass keine Achse am Zugende bricht, sondern auch das Zugende weiterfährt. Aber wird auch die Tür am Tunneleingang zufallen, oder wird sie klemmen? Das steht noch offen...".

Etwas umfassender gesagt, stellt sich die Frage, ob Al und Bert für $t_{b1}(e_3)$ bzw. $t_{b2}(e_3)$ an e_3 Folgendes behaupten können:

> Al: „Jetzt, mit diesem Moment, entscheidet es sich, dass die Wirklichkeit auf der ganzen unteren Hälfte des Weltblatts bis zu $t_{b1}(e_3)$[13] h_0-artig ist. Es steht aber noch nicht fest, dass sie auch für diejenigen events h_0-artig ist, die zwar b_1-vor $t_{b1}(e_3)$, aber b_2-nach $t_{b2}(e_3)$ liegen.[14]"

> Bert: „Jetzt, mit diesem Moment, entscheidet es sich, dass die Wirklichkeit auf der ganzen unteren Hälfte des Weltblatts bis zu $t_{b2}(e_3)$ h_0-artig ist. Es steht aber noch nicht fest, dass sie auch für diejenigen events h_0-artig ist, die zwar b_2-vor $t_{b2}(e_3)$, aber b_1-nach $t_{b1}(e_3)$ liegen.



vertikal schraffiert: $\{e \mid t_{b2}(e_3) <_{b2} t_{b2}(e)\}$
horizontal schraffiert: $\{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\}$
frei:$W-(\{e \mid t_{b2}(e_3) <_{b2} t_{b2}(e)\} \cup \{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\})$

vertikal schraffiert: $\{e \mid t_{b1}(e_3) <_{b1} t_{b1}(e)\}$
horizontal schraffiert: $\{e \mid t_{b2}(e) \leq_{b2} t_{b2}(e_3)\}$
frei:$W-(\{e \mid t_{b1}(e_3) <_{b1} t_{b1}(e)\} \cup \{e \mid t_{b2}(e) \leq_{b2} t_{b2}(e_3)\})$

Die Antwort ist „nein". Denn das entscheidende Problem verbirgt sich in den jeweils zweiten Behauptungen.[15] Es leuchtet nämlich aus den Skizzen sofort Folgendes ein:

(1) Die Behauptung von Al, dass das ganze Weltblatt bis zu $t_{b1}(e_3)$ h_0-artig ist, impliziert die Behauptung, dass es auch für diejenigen events h_0-artig ist, die b_1-vor $t_{b1}(e_3)$ *und* b_2-nach $t_{b2}(e_3)$ liegen (=Fläche A). Bert behauptet aber, dass an e_3 die h_0-Artigkeit von A nicht feststeht.

(2) Die Behauptung von Bert, dass das ganze Weltblatt bis zu $t_{b2}(e_3)$ h_0-artig ist, impliziert die Behauptung, dass es auch für diejenigen events h_0-artig ist, die b_2-vor

[13] D.h. $\{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\}$.
[14] D.h. $W - (\{e \mid t_{b2}(e_3) \leq_{b2} t_{b2}(e)\}) \cup \{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\}$
[15] Man könnte auch noch einwenden, dass schon mit dem jeweils ersten Satz etwas zu viel behauptet wird, *wenn* sich *selbst an e_7* noch nicht mehr herausgestellt hat, als dass die Wirklichkeit auf $\Delta(e_7)$ h_0-artig ist. Denn $\{e \mid t_{b1}(e) \leq_{b1} t_{b1}(e_3)\}$ und $\{e \mid t_{b2}(e) \leq_{b2} t_{b2}(e_3)\}$umfassen auch events außerhalb des Rands von $\Delta(e_7)$. Doch diesen Punkt kann man hier beiseite lassen.

$t_{b2}(e_3)$ *und* b_1-nach $t_{b1}(e_3)$ liegen (=Fläche B). Al behauptet aber, dass an e_3 die h_0-Artigkeit von B nicht feststeht.

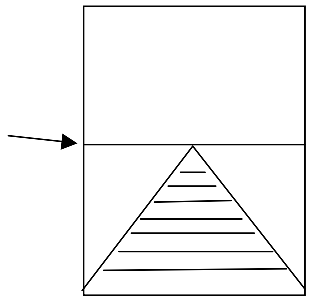
Dass dies sich widersprechende Behauptungen sind, lässt sich durch keine Relativierung auf Bezugssysteme hinwegdiskutieren. Zwar raten beide. Aber wenn Al hier richtig rät, so rät Bert falsch und umgekehrt.

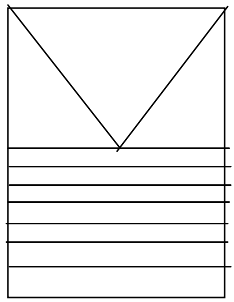
Die Deutung „Es steht fest, *dass*" für den „N"-Operator aus der Reporter-Perspektive scheidet also aus. Dabei ist es egal, ob man in der Deutung noch ein „im Sinne der narrativen, nicht der deiktischen Determiniertheit" hinzufügt oder nicht. Es wäre auch schlicht unerklärlich, wie es passieren kann, dass aus „Es steht fest, dass" *nicht* folgt „Es ist der Fall, dass". Und doch erhält man ja für e_3 und b_1 den S^{Δ}-Wert 1 für „NSp", während der von „Sp" nicht definiert ist. Die Deutung des Operators „N" aus der Reporter-Perspektive bereitet also erhebliche Schwierigkeiten. Man kann daher zu folgendem Ergebnis kommen: Man versucht lieber gar nicht weiter, „N" zu deuten und zu benutzen. Es ist nicht anzunehmen, dass es überhaupt narrative Determiniertheit aus der Reporter-Perspektive gibt. *Nur* der Historiker kann Geschichten erzählen.

Es gibt jedoch meiner Ansicht noch eine andere Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu beheben. Man deutet den „N"-Operator *ungefähr* als „Es steht jetzt fest, *ob*". Im Zuge der Erklärung dieser Deutung unternimmt man es auch, zu erklären, inwiefern es narrative Determiniertheit aus der Reporter-Perspektive gibt. Denn bei dieser Deutung ist es klar, dass „Es steht fest" im Sinne der *narrativen* Determiniertheit gemeint ist: „N" ist ja Bezugssystem-sensitiv, und auch das „jetzt" ist Bezugssystem-relativ zu verstehen. Glückt die Erklärung, so ist also auch geklärt, inwiefern es überhaupt Bezugssystem-relative Determiniertheit aus der Reporter-Perspektive geben kann. Die Lösung besteht in einer Art lakonischen Deutung des „N"-Operators.

Warum bereitet die Deutung des „N"-Operator aus der Reporter-Perspektive solche Schwierigkeiten? Wenn man sich klarmacht, warum man ihn nicht mit der Konjunktion „dass" vorlesen darf, bekommt man schnell den Eindruck, dass bei dieser Deutung das „h_0" in der formal-metasprachlichen Notation des Bewertungstupels auf gewisse Weise missverstanden wird. Zwar wird im Prinzip bei Ausschluss der „wings" der Ausdruck „$\langle t_b(e), s_b(e), h\rangle$" lediglich verstanden als „zu $t_b(e)$ an $s_b(e)$ mit h-artigen *res stantes* auf dem Vergangenheitslichtkegel von e" und *nicht* als „zu $t_b(e)$ an $s_b(e)$ mit h-artigen *res stantes* auf dem ganzen Weltblatt bis zu $t_b(e)$". Doch bei einer Formel mit „N" wird sofort das ganze Weltblatt bis zu $t_b(e)$ als Zugänglichkeitsfläche relevant und damit sozusagen zuviel h-Artigkeit verlangt.

Die Situation ähnelt in auffälliger Weise derjenigen im klassischen Bild am Ende von Kap. II 3. Dort hatte die Deutung der Operatoren „N_{∇}" und „M_{∇}" erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Sie mit „dass" vorzulesen, erwies sich als unmöglich. Und auch hier war das Problem die gewissermaßen *zu* große Zugänglichkeitsfläche. Denn dort war zwar die Standard-Fläche das Weltblatt bis zu t(e), die für „N_{∇}" relevante Fläche aber sogar das gesamte Komplement zum Zukunftslichtkegel von e.





schraffiert: die „Standard-Fläche“

3N×Rel 3N (Kap. II 3)

In einigen Fällen ließ sich die Schwierigkeit dadurch beheben, dass man Formeln nun statt mit „dass“ mit „ob“ vorlas. Das funktionierte nicht immer sehr gut, aber es milderte doch das Problem ab: Mit einem „ob“-Satz behauptet man weniger als mit einem „dass“-Satz. Ein „dass“-Satz impliziert den entsprechenden „ob“-Satz, aber nicht umgekehrt. Die Semantik von „ob“ ist jedoch alles andere als durchsichtig: Impliziert „Es steht fest, ob...“ immer „Es steht fest, dass ... oder, dass nicht...“? Falls ja, in welchem Sinn? Viel wichtiger als das „ob“ als Notbehelf zum Vorlesen war daher die folgende Einsicht: Bei Formeln mit „N_∇“ als erstem Zeichen ließ sich der Alternativen-Parameter „h“ in „$\langle t_e, s_e, h\rangle$“ für 3N am besten *im Sinne einer Annahme* lesen. So kam es vor, dass „$V(N_\nabla \mathsf{SF}p, \langle t_e, s_e, h\rangle) = 1$“ zu verstehen war als „Unter der Annahme, dass das gesamte Komplement zum ZLK h-artig wird, ist es unvermeidlich, dass“.

Verhält es sich mit dem „N“-Operator in 3N×Rel in der Reporter-Perspektive ähnlich? Ja. Und genau das erklärt auch, wie weit Al und Bert als Reporter mit ihren Behauptungen gehen können, ohne einander in die Quere zu kommen. Völlig analog zu 3N kann man nämlich sagen:

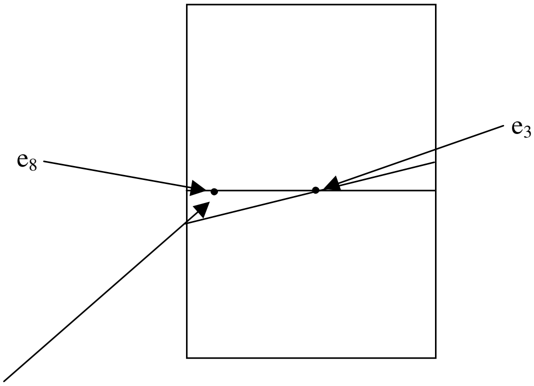
„S^Δ ($N\mathsf{S}(p \wedge$ p), $\langle t_{b1}(e_3),s_{b1}(e_3),h_0\rangle)=1$“

ist zu verstehen als:

> „Wenn sich die Welt je als auf dem ganzen Weltblatt bis zu $t_{b1}(e_3)$ h_0-artig realisiert, dann ist es zu $t_{b1}(e_3)$ an $s_{b1}(e_3)$, also unter Benutzung von b_1, wahr, zu sagen:
> ‚Es steht hier und jetzt (im Sinne der narrativen Determiniertheit) fest, dass irgendwo, nämlich an $s_{b1}(e_8)$, gerade die Tür an der Tunneleinfahrt zufällt‘ “.

Dass sich die Welt als dem ganzen Weltblatt bis zu $t_{b1}(e_3)$ h_0-artig realisiert, impliziert, dass sich die Welt als auf der oben mit „A“ bezeichneten Fläche h_0-artig realisiert. Dass das so ist, kann Bert für e_3 nicht zugeben. Das Problem ist: Ist er dennoch *gezwungen*, dies aufgrund einer Fallunterscheidung zuzugeben? Und die Antwort ist „nein“.

Der Punkt lässt sich am einfachsten darstellen, wenn man nicht mehr die ganze problematische Fläche in den Blick nimmt, sondern allein e_8 (die Rede über die h_0-Artigkeit der Fläche lässt sich letztlich als Rede über Dezisionen für einzelne events analysieren).



A (e_8 sei Element davon)

Al kann vorbringen (mit „*p*“ als eindeutiger Positionsangabe für e_8):

„Wenn die Welt sich überhaupt je als ‚*p* ∧ p‘-Welt realisiert, dann jetzt.
Wenn die Welt sich überhaupt je als ‚*p* ∧ ~p‘-Welt realisiert, dann jetzt.“

Dass er so reden kann, ist selbst ein entscheidendes Ergebnis für die Frage, ob Al ins Leere rät. Denn dies ist eine recht gute Charakterisierung dessen, was man meinen kann, wenn man sagt: Al *konzipiert* an e_3 im Sinne der narrativen Determiniertheit die Wirklichkeit als gerade bis zu seiner Vorderkante $t_{b1}(e_3)$ realisiert oder fertiggestellt. In *diesem*, recht schwachen Sinn geht die Rate-Aussage von Al auf nach seiner Konzeption Bestehendes und nicht ins Leere. Und in diesem Sinn rät er in eine raumweite Gegenwart hinein. Dass er die Welt aus der Reporter-Perspektive und für sein Bezugssystem auf die beschriebene Weise als bis zu seiner Vorderkante $t_{b1}(e_3)$ fertiggestellt konzipiert, ist dabei ganz legitim: „You can’t describe the world without describing it“.[16] Und zum Beschreiben braucht man ein Koordinatensystem.

Bert konzipiert an e_3 im Sinne der narrativen Determiniertheit die Wirklichkeit als gerade bis zu *seiner* Vorderkante $t_{b2}(e_3)$ realisiert oder fertiggestellt. Implizieren die Aussagen von Al ein Problem für Bert (oder umgekehrt)? Al könnte ja seine Ausführungen so fortsetzen:

„Angenommen, die Welt realisiert sich jetzt als ‚*p* ∧ p‘-Welt.
Dann steht es jetzt fest, dass sie eine ‚*p* ∧ p‘-Welt ist.

[16] Putnam, „Renewing Philosophy“ (1992), S.123.

> Angenommen, die Welt realisiert sich jetzt als ‚*p̣* ∧ ~p'-Welt.
> Dann steht es jetzt fest, dass sie eine ‚*p̣* ∧ ~p'-Welt ist."

Bert wird die Ausführungen von Al im Stillen für sich wie folgt in b_2-Kooordinaten übersetzen:

> „Wenn die Welt sich überhaupt je als ‚*p̣* ∧ p'-Welt realisiert, dann demnächst.
> Wenn die Welt sich überhaupt je als ‚*p̣* ∧ ~p'-Welt realisiert, dann demnächst.
> Angenommen, die Welt realisiert sich demnächst als ‚*p̣* ∧ p'-Welt.
> Dann steht es jetzt fest, dass sie demnächst eine ‚*p̣* ∧ p'-Welt sein wird.
> Angenommen, die Welt realisiert sich demnächst als ‚*p̣* ∧ ~p'-Welt.
> Dann steht es jetzt fest, dass sie demnächst eine ‚*p̣* ∧ ~p'-Welt sein wird."

Diese Übersetzung ist auf den ersten Blick vielleicht etwas unerwartet. Warum übersetzt Bert in der Fallunterscheidung „jetzt" nicht mit „demnächst", sondern wieder als „jetzt"? Beide meinen doch mit „jetzt" etwas anderes! Das tun sie zwar, und Bert ist sich völlig darüber im Klaren, dass er „jetzt" in *seinem* Sinne meint. Er will aber gar nicht versuchen, sich mit der Mehrdeutigkeit von „jetzt" herauszureden. Ihm kommt es auf etwas ganz anderes an. Denn er ist sich auch darüber im Klaren, was es bedeutet, *anzunehmen*, dass sich die Welt demnächst als „*p̣* ∧ p"-Welt realisiert. Es heißt: *voraussetzen*, dass nur „*p̣* ∧ p"-Alternativen gegeben sind und keine „*p̣* ∧ ~p"-Alternativen. Diese Annahme erfolgt ja auch aus einer Position heraus, nämlich e_3. Und dann steht es nicht erst demnächst fest, dass die Welt dann eine „*p̣* ∧ p"-Welt sein wird, sondern es steht schon jetzt (zu $t_{b2}(e_3)$) fest, dass sie es sein wird. Entsprechendes gilt für den zweiten Fall.

Wie kann Bert reagieren? Auf lakonische Art. Die lakonische Ausdrucksweise als typische Ausdrucksweise der Spartaner (eben der Lakedaimonier) wird legendärerweise durch die folgende hübsche Geschichte charakterisiert: Eine Stadt mit einer Spartanischen Besatzung wurde von einem feindlichen Heer belagert. Der Anführer des feindlichen Heeres stellte sich vor die Stadtmauer und schilderte in einer langen Rede, die er mit den Worten „Wenn ich die Stadt erobere, dann werde ich..." einleitete, was er den Leuten in der Stadt alles Fürchterliches antun wolle. Der spartanische General begnügte sich, nachdem er von der Stadtmauer aus die Rede angehört hatte, mit der Antwort „Tja, *wenn*".

Ebendies dürfte auch Bert vernünftigerweise antworten. Denn die scheinbar vollständige Fallunterscheidung ist bei genauerem Hinsehen völlig unplausibel. Wenn man sie ausbuchstabiert, lautet sie ja: „Es sind nur zwei Fälle denkbar: Entweder es stehen jetzt nur ‚*p̣* ∧ p'-Alternativen offen. Oder es stehen jetzt nur ‚*p̣* ∧ ~p'-Alternativen offen." Wenn man das zugibt, wird man wohl schwerlich dem Determinismus entkommen. Aber warum sollte man eine Prämisse zugeben, die nichts anderes ist, als bloß die These des Determinismus in leicht durchschaubarer Verkleidung?

4.4.3 Das Seeschlacht-Problem und seine Raumzeit-Version

Die Verbindung zum klassischen Seeschlacht-Szenario wird noch einmal besonders deutlich, wenn man sich das folgende Deterministen-Argument vor Augen hält:

> „Wenn sich die Welt überhaupt je als Morgen-Seeschlacht-Welt realisiert, dann morgen. Wenn sich die Welt überhaupt je als Morgen-keine-Seeschlacht-Welt realisiert, dann ebenfalls morgen. Angenommen (für jetzt), sie realisiert sich als Morgen-Seeschlacht-Welt. Dann steht jetzt fest, dass sie eine Morgen-Seeschlacht-Welt sein wird. Angenommen (für jetzt), sie realisiert sich als Morgen-keine-Seeschlacht-Welt. Dann steht jetzt fest, dass sie eine Morgen-keine-Seeschlacht-Welt sein wird.“

Für dieses Argument empfiehlt sich jedenfalls, ganz wie im etwas unübersichtlicheren Fall fürs Raumartige, ebenfalls die lakonische Reaktion. Das bestätigt indirekt noch einmal, dass man es beim Problem der „wings“ wirklich mit einer Ausweitung des Seeschlacht-Problems zu tun hat.

Es gibt allerdings auch eine wichtige Abweichung der Situation in der Raumzeit vom Seeschlacht-Szenario festzuhalten. Im Seeschlacht-Beispiel gibt der Indeterminist zu, dass (mit „*p̣*“ als Datumsangabe) *vor* der Gelegenheit zur Seeschlacht „F((*p̣*∧p) ∇ (*p̣*∧ ~p))“ oder die entsprechende Formel mit „**F**“ wahr ist, weil „F*p̣*“ bzw. „**F***p̣*“ dann wahr ist: Morgen kommt auf jeden Fall, ob es morgen eine Seeschlacht gibt oder nicht. Also wird es (bestimmt) der Fall sein, dass entweder morgen ist und eine Seeschlacht stattfindet oder morgen ist und keine Seeschlacht stattfindet. Unfair wird das Argument erst in einem weiteren Schritt, so z.B. im eben referierten, nicht sehr raffinierten Argument mit der vermeintlich vollständigen, in Wahrheit aber petitiösen Fallunterscheidung mit ihren Annahmen.

Im Raumzeit-Fall aber wird Bert *noch nicht einmal die entsprechende Disjunktion* akzeptieren und sich daher sehr sicher sein, die Fallunterscheidung abzulehnen. Zwar gilt allgemein und unabhängig vom Bezugssystem „S(p ∨ ~p)“, „NS(p ∨ ~p)“ und „$\mathbf{S}_\Delta$(p ∨ ~p)“. Aber *nur* Al akzeptiert für e_3 „S((*p̣*∧p) ∇ (*p̣*∧ ~p)“ bzw. „$\mathbf{S}_\Delta$ ((*p̣*∧p) ∇ (*p̣*∧ ~p)“. Denn nur Al ist für e_3 einverstanden mit „S*p̣*“ bzw. „$\mathbf{S}_\Delta$ *p̣*“.

Denn Bert ist als b_2-Benutzer an e_3 zu Recht der Ansicht, es sei überhaupt nicht *gerade eben irgendwo* die Positionsangabe „*p̣*“ wahr. Vielmehr ist er zu Recht der Ansicht, das komme erst noch. Wenn aber die Positionsangabe „*p̣*“ gar nicht gerade eben irgendwo wahr ist, dann gibt es eben gerade auch keinen Ort, an dem „(*p̣*∧ p) ∇ (*p̣* ∧ ~p)“ wahr ist, weil nämlich gerade eben an *jedem* Ort *weder* „(*p̣*∧ p)“ *noch* „(*p̣*∧ ~p)“ wahr ist. Nur unter der Voraussetzung, dass *gerade eben irgendwo* die Positionsangabe „*p̣*“ wahr ist, wird man ja sagen, dass gerade eben irgendwo entweder „(*p̣*∧ p)“ oder „(*p̣*∧ ~p)“ wahr sein muss.

Zuguterletzt zeigt sich, dass sich Al *auch b_1-intern nicht* auf eines der folgenden Argumente stützen kann, um (fälschlich) zu behaupten, es stehe an e_3 fest, dass die Wirklichkeit im Sinne der deiktischen Determiniertheit für e_8 bereits bestimmt sei. Denn man kann für e_3 und h_0 notieren:

Argument für den Peirceaner (V-Werte)		Diagnose
1. $\mathbf{S}_\Delta ((\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla (\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$	Annahme	ok (für b_1!)
2. $\mathbf{S}_\Delta (\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla \mathbf{S}_\Delta (\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$	aus 1.	*non sequitur*[17]
3. (a) $\mathbf{S}_\Delta (\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$ oder	aus 2.	na und?
(b) $\mathbf{S}_\Delta (\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$.		
4. Falls (a), so $\mathbf{S}_\Delta(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$	aus 3.	
Falls (b), so $\mathbf{S}_\Delta(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$		na und?

Argument mit Supervaluationen (S^Δ-Werte)		Diagnose
1. $\mathsf{S}((\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla (\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p})) = 1$	Annahme	ok (intern für b_1!)
2. $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla \mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$	aus 1.	ok[18]
3. (a) $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$ oder	aus 2.	*non sequitur*[19]
(b) $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$.		
4. Falls (a), so $N_\Delta\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$	aus 3.	na und?
Falls (b), so $N_\Delta\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$		

Argument für den Ockhamisten (V-Werte)		Diagnose
1. $\mathsf{S}((\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla (\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p})) = 1$	Annahme	ok (intern für b_1!)
2. $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) \nabla \mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$	aus 1.	ok[20]
3. (a) $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$ oder	aus 2.	ok[21]
(b) $\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$.		
4. Falls (a), so $N_\Delta\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}) = 1$	aus 3.	*non sequitur*[22]
Falls (b), so $N_\Delta\mathsf{S}(\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}) = 1$		

Diese Argumente sehen zwar auf den ersten Blick gar nicht so schlecht aus. Aber sie entsprechen genau den besten in Teil II 1 untersuchten Seeschlacht-Argumenten und scheitern aus völlig parallelen Gründen.

[17] Man beachte, dass nicht für alle auf $\Delta(e_3)$ h_0-artigen Alternativen gilt, dass gerade$_{b1}$ irgendwo $_{b1}$ „$\underset{.}{p} \wedge \mathrm{p}$“ wahr ist, aber auch nicht, dass für alle auf $\Delta(e_3)$ h_0-artigen Alternativen gilt, dass gerade$_{b1}$ irgendwo$_{b1}$ „$\underset{.}{p} \wedge \sim\mathrm{p}$“ ist.

[18] In allen über $\Delta(e_3)$ zugänglichen Alternativen trifft gerade irgendwo (im Sinne von b_1) „$\underset{.}{p}$“ zu und zwar entweder zusammen mit „p“ oder zusammen mit „~p“,...

[19] ...aber weder trifft in allen über $\Delta(e_3)$ zugänglichen Alternativen gerade irgendwo (im Sinne von b_1) „$\underset{.}{p}$“ zusammen mit „p“ zu; noch trifft in allen über $\Delta(e_3)$ zugänglichen Alternativen gerade irgendwo (im Sinne von b_1) „$\underset{.}{p}$“ zusammen mit „~ p“ zu.

[20] Auch für h_0 gilt natürlich: Es trifft gerade irgendwo (im Sinne von b_1) „$\underset{.}{p}$“ zu, und zwar entweder zusammen mit „p“ oder zusammen mit „~p“

[21] Mit der auf h_0 eingeschränkten Sichtweise des Ockhamisten ist da kein Problem.

[22] Das wäre zwar für S^Δ-Werte so, nicht aber für V-Werte.

4.5 Eine kleine Phänomenologie der Erleichterung

4.5.1 Prior als methodisches Vorbild

Arthur Prior hatte einen guten philosophischen Grund dafür, einmal einen Aufsatz mit dem Titel „Thank goodness that‘s over!“ zu schreiben. Er wollte damit darauf hinweisen, dass die sogenannte zeitliche A-Ordnung nicht in der B-Ordnung aufgeht,[23] sondern ihren selbständigen Charakter bewahrt, was wiederum zeigt, dass Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft etwas Reales sind und nicht bloß Beschreibungsperspektiven. Was hat der Ausruf „Thank goodness that’s over!“ mit dem Unterschied zwischen A- und B-Ordnung zu tun? Die Antwort ist: Dass der Dienstag nach einem Zahnarztbesuch am Montag *später* ist als der Montag mit dem Zahnarztbesuch (B-Ordnung), ist kein möglicher Anlass zur Erleichterung; dass, wenn es Dienstag ist, der Montag mit dem Zahnarztbesuch in der *Vergangenheit* liegt (A-Ordnung), aber schon.

Offenbar ist die Sorge um den Verlust einer ontologisch bedeutsamen A-Ordnung auch der tiefere Grund für Priors beispiellose Sturheit gegenüber der Relativitätstheorie, wie sie etwa in „Some Free Thinking about Time“ zum Ausdruck kommt (das allerdings zeitlebens unveröffentlicht blieb). Priors Verweigerung ist methodisch vorbildlich. Existenziell relevante Intuitionen mit Zähigkeit zu verteidigen und davon so wenige wie möglich aufzugeben, kommt dem Metaphysiker zu, wenn er bei der Interpretation naturwissenschaftlicher Theorien mit dem konfrontiert ist, was das 18. Jahrhundert Schwärmerei nannte. Prior lässt sich nicht einschüchtern von der so häufigen herablassenden Belehrung gegenüber dem vermeintlich ahnungslosen Philosophen, die Relativitätstheorie impliziere nun einmal eine „zeitlose Sicht der Existenz“ oder ein „Blockuniversum“ und beweise, dass „die Zeit nichts anderes als eine weitere Dimension des Raums ist“. Er nimmt es sich heraus, die mainstream-Deutung einer physikalischen Theorie abzulehnen, weil diese keinen Platz für ein existenzielles *factum brutum* hat: die Erleichterung. Priors Vorbild zeigt: Es ist ausgerechnet der Metaphysiker, der zu Recht die Lebensnähe der Deutung einer Theorie einfordert.

Leider lassen seine Äußerungen aber auch einige fundamentale Missverständnisse seinerseits vermuten. Diese Studie hat ihr Ziel erreicht, wenn sie einen Vorschlag machen kann, von dem sich behaupten lässt: Dieser Vorschlag hätte auch Priors Unbehagen behoben und ihn mit der Relativitätstheorie versöhnt. Dafür entscheidend sind die Konsequenzen des bisher Gesagten zu den Themen „A-Ordnung“ und Erleichterung.

[23] Vgl. Kap. I 1.3.

4.5.2 A-Ordnung und B-Ordnung

Zur A-Ordnung lässt sich sagen, dass sie innerhalb der in Teil IV untersuchten Ansätze in bester Verfassung ist: Die vertretbaren Ansätze sind alle konsequent hemiaktualistisch. In einem Argument konnte als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt werden, dass die erreichte Position eines events mit bestimmtem Vergangenheitslichtkegel etwas ganz Handfestes ist (vgl. in diesem Kapitel IV 3.3.3), von dem man einfach merkt, ob es schon gewesen, gegenwärtig oder zukünftig ist. Der Alternativen-Parameter im Bewertungstupel wurde entsprechend handfest gedeutet: Am Bewertungs-event zeigt er an, wie dessen Vergangenheitslichtkegel beschaffen ist, und darauf kann man zeigen. Das ist etwas ganz anderes als rein theoretisch (und unklar genug) zu sagen, „in" Alternative h verhalte es sich so und so. Die A-Ordnung entlang einer Weltlinie (und also zwischen beliebigen events innerhalb des Lichtkegels) macht somit überhaupt keine Schwierigkeiten. Damit ist auch klar, dass jeder unter welchen Umständen auch immer behaupten kann:

> „Jedes event meiner eigenen biografischen Weltlinie ist hier und jetzt (im irreduziblen Sinn der A-Ordnung und völlig einfach) als vergangen oder gegenwärtig und jedes event einer ihrer möglichen Fortsetzungen ist hier und jetzt (in demselben Sinn) als zukünftig bemerkbar."[24]

Dass das jeder unter welchen Umständen auch immer behaupten kann, impliziert, dass das auch jemand im Raumartigen zu meinem Hier-und-Jetzt tun kann. Für ihn ist genau so einfach völlig klar, wie weit die Entwicklung entlang *seiner* Weltlinie schon gediehen ist. Man hat es also mit koexistierenden, „lokalen" A-Ordnungen zu tun. Es ist jedoch wichtig, zu bemerken, was im Zuge der eventisierten Notwendigkeit ganz folgerichtig ist: Mehrere lokale A-Ordnungen sind nicht in einem einzigen Diagramm darstellbar, sondern die Diagramme sind notwendig aus der Perspektive eines bestimmten events gezeichnet. Dabei handelt es sich bei der Perspektive eines events nicht einfach um einen Blickpunkt, sondern um eine ontische Gegebenheit: Die Welt schaut nicht nur anders aus, je nachdem, von wo aus ich sie betrachte, während ich dort bin – sie *ist* anders, je nachdem, wo ich angekommen bin, und deshalb schaut sie anders aus. Dies ermöglicht noch einmal eine Klarstellung des Unterschieds zu Rakićs Ansatz. Rakić kann für *ihren* Ansatz eine raumweite Gegenwart in *einer* Zeichnung darstellen, ohne die Perspektive eines bestimmten events einzunehmen: Jeder Punkt an der Spitze einer gezackten Gegenwart zeigt dabei an, wie weit die Welt auf einer Weltlinie durch ihn gerade schon gekommen ist.[25]

---

[24] Die Dicke eines mittelgroßen Objekts kann man in kosmischen Dimensionen vernachlässigen.

[25] Vgl. Kap. III 1.2.3.2. Da die gezackte Gegenwart epistemisch auch nachträglich nicht zugänglich ist, kann Rakić freilich selbst im Rückblick nie sagen, *wann* sich etwas anderswo entschied: Sie kann zwar sagen mit welchem event ihrer Weltlinie die Emission eines entfernten Lichtsignals b-gleichzeitig war, nicht aber, mit welchem event ihrer Weltlinie die Emission gleich-gegenwärtig (im Sinne von Rakićs PRES) war. Außerdem rät sie zwar, wenn sie Glück hat, nicht ins Leere, weil sie an einen entfernten, schon verwirklichten Teil der Welt denkt. Aber sie kann nie sagen, ob es ihr glückt, mit ihrem Gedanken in einen schon verwirklichten Zacken zu treffen. Beides halte ich für erhebliche Nachteile.

Die Frage ist, wie mehrere A-Ordnungen über ihre raumzeitliche Distanz hinweg miteinander zu koordinieren sind. Die Antwort ist, dass man sich das in gewissem Rahmen aussuchen kann, was aber koexistierende A-Ordnungen weder unmöglich macht noch diese inhaltlich einschränkt. Wie das konkret vor sich geht, hoffe ich, mit den Beispielen für den Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit deutlich gemacht zu haben. Die Koordination ist dabei eng mit der B-Ordnung assoziiert: Sie erfolgt ja geradezu durch die B-Begriffe „gleichzeitig mit", „früher als", „später als" (und die B-Begriffe „gleichortig" und „in räumlichem Abstand von"). Es ist also in erster Linie die B-Ordnung, die aufs Bezugsystem relativiert wird.

Dennoch ist es möglich, auch A-Begriffe in den Raum auszuweiten, und zwar Bezugssystem-relativ.[26] Da diese Begriffe für die eigene Weltlinie Bezugssystem-invariant sind, ist die Bezugssystem-Relativität existenziell harmlos. Von einer raumweiten Gegenwart muss man sich auch nicht verabschieden, bloß von einer Bezugssystem-invarianten *eindeutigen* raumweiten Gegenwart.

4.5.3 Drei Arten der Erleichterung

Um zu sehen, welcher Platz im Rahmen der verfolgten Strategie für das existenzielle Faktum der Erleichterung bleibt, ist es wichtig, sich klarzumachen: Es gibt qualitativ unterschiedliche Anlässe für qualitativ unterschiedliche Arten von Erleichterung, und zwar wenigstens drei:

1. Man kann erleichtert darüber sein, dass etwas geglückt ist.
2. Man kann erleichtert darüber sein, dass sich etwas entschieden hat.
3. Man kann erleichert darüber sein, dass man den Ausgang einer Entscheidung nicht mehr beeinflussen kann.

Auf derselben Weltlinie fallen alle drei Arten der Erleichterung zeitlich zusammen: Man kann noch so lange etwas beeinflussen, wie es sich noch nicht entschieden hat; und man kann feststellen, dass es geglückt ist, sowie es sich *günstig* entschieden hat. Zumindest die erste und die beiden anderen Arten sind aber auch auf derselben Weltlinie unabhängig voneinander: Es kann ja vorkommen, dass man erleichtert darüber ist, eine Entscheidung nicht mehr beeinflussen zu können, und auch darüber, dass sie gefallen ist; aber dass man zugleich nicht erleichtert darüber sein darf, dass sie günstig ausgegangen ist, sondern enttäuscht darüber muss, dass sie ungünstig ausgefallen ist.

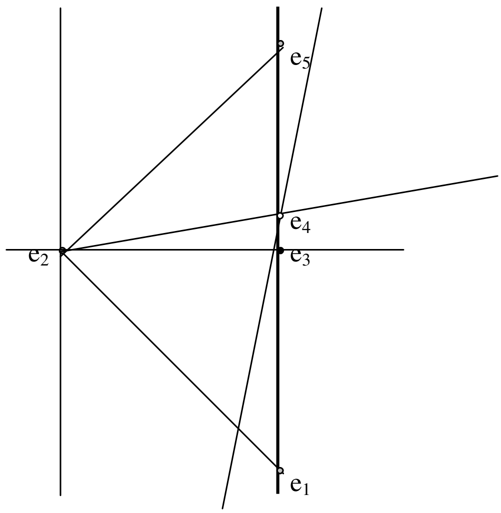
Wie lassen sich die drei Arten der Erleichterung im klassischen Bild unterscheiden, wenn man räumlich entfernte Ereignisse mit einbezieht? Wenn eine Bewerbung an

Sie sind Symptome dafür, dass ihr Ansatz insgesamt mit der Relativitätstheorie nicht ernst macht, sondern um ein durch und durch klassisch konzipiertes Gebäude herum bloß eine relativistische Fassade stehen lässt.

[26] Dies würde Rakić ebenfalls anders sehen und deshalb die Brückenprinzipien zwischen A- und B-Begriffen aufgeben (vgl. Kap. I 1.3 und Kap. III 1.2.3.2). Doch ich hoffe, gezeigt zu haben, dass man dazu nicht gezwungen ist.

einem bestimmten Tag an einem anderen Ort eintreffen muss, so kann man zwei Tage vor Bewerbungsschluss erleichtert darüber sein, dass man den Ausgang der Entscheidung nun nicht mehr beeinflussen kann (andere Kommunikationswege seien vernachlässigt). Das ist die Erleichterung am Briefkasten. Angenommen, über die Bewerbung werde sofort nach Bewerbungsschluss entschieden. So kann man zwei Tage nach dem Gang zum Briefkasten erleichtert darüber sein, dass jedenfalls nun die Entscheidung gefallen ist. Erst weitere zwei Tage später kann man, im angenommenen günstigen Fall, darüber erleichtert sein, die Einladung zum Vorstellungsgespräch in der Hand zu haben. Angesichts der endlichen Maximalgeschwindigkeit der Signalübertragung lässt sich eine ähnliche Geschichte natürlich auch für die Übermittlung von Botschaften mit Lichtsignalen an sehr weit entfernte Orte erzählen.

Ändert sich im relativistischen Bild etwas an einer solchen Geschichte? Nicht viel, aber etwas. Ein von der Erde aus funkender Bewerber für den Einsatz auf der Forschungsstation auf einem ein Lichtjahr entfernten Himmelskörper kann sein Bezugssystem wählen, wie er will: Er wird immer zur selben Gelegenheit die Erleichterung spüren können, nun seine Bewerbung abgeschickt zu haben. Und er wird immer zur selben Gelegenheit die Erleichterung darüber spüren können, dass er zum Vorstellungsgespräch auf der Forschungsstation eingeladen wird. Aber: Er kann sich *aussuchen*, wann er erleichtert darüber sein will, dass gerade eben die Entscheidung über seine Bewerbung gefallen ist. Entsprechend kann von zwei unzertrennlichen Bewerbern für zwei Stellen auf der Forschungsstation, B1 und B2, einer früher darüber erleichtert sein als der andere, wenn beide unterschiedliche Bezugssysteme benutzen:



B(ewerber)1 und B2 haben die fett gedruckte Weltlinie. B1 benutzt b_1 (rechtwinklig dargestellt) und nimmt an, dass sie sich ebenso wie die Forschungsstation in Ruhe befinden. B2 benutzt b_2 (schräg dargestellt) und nimmt an, dass sie und die Forschungsstation in immer gleichem Abstand voneinander durch den Raum driften. Beide schicken ihre Bewerbungen zusammen an e_1 ab und sind darüber erleichtert.

Beide erhalten ihre Einladung an e_5 und sind darüber erleichtert. B1 sagt zu Recht an e_3: „Wenn überhaupt je eine für mich günstige Entscheidung in der Sache fällt, dann mit diesem Augenblick“ und ist darüber erleichtert. B2 sagt dasselbe an e_4 und ist erst dann erleichtert. Beide beziehen sich auf die Entscheidung an e_2.

Der Unterschied zum klassischen Bild ist deutlich. Man kann nicht jede althergebrachte Intuition behalten. Und wenn zu diesen Intuitionen gehörte, dass B1 und B2 die zweite Art von Erleichterung unbedingt beide *auf einen Schlag* spüren müssen, so ist dies eben eine Intuition, die man verabschieden muss. Ist das existenziell beunruhigend? Nein. Denn was mit der zweiten Art von Erleichterung passiert, lässt die erste und dritte Art unberührt. Die erste und die dritte Art der Erleichterung sind aber doch existenziell gewichtiger. Denn sie betreffen etwas *da, wo ich bin* (die Emission bzw. den Erhalt der Botschaft) und nicht nur ein Ereignis in der Ferne. Zweifellos ist die erste Art der Erleichterung, die Erleichterung über den *günstigen* Ausgang, die größte und der Qualität nach intensivste. Es wäre wirklich ziemlich seltsam, wenn *sie* von der Relativierung betroffen wäre. Das ist aber nicht der Fall.

Die Erleichterung darüber, dass in großer Entfernung überhaupt eine Entscheidung gefallen ist, ist also nicht Bezugssystem-invariant zu haben (anders als die notwendigerweise spätere Erleichterung darüber, dass sie *günstig* ausgefallen ist). Es gibt verschiedene Möglichkeiten, darauf zu reagieren. Sie lassen sich interessanterweise damit verbinden, welche technische Lösung aus dem vorangegangenen Teilkapitel man befürwortet:

1. Man gewöhnt sich *diese* Art der Erleichterung für die Reporter- wie für die Historiker-Perspektive ab,[27] da man sie grundsätzlich als absurd empfindet, wenn die Gelegenheit für sie Bezugssystem-relativ ist. Wer das so sieht, wird wahrscheinlich der Peirceanischen Lösung einiges abgewinnen können, V-Werte als Wahrheitswerte auffassen und grundsätzlich die Operatoren „$\mathbf{P}_\Delta$“, „$\mathbf{S}_\Delta$“ etc. verwenden, nicht „$\mathbf{P}$“ oder „$\mathbf{S}$“.
2. Man gewöhnt sich diese Art der Erleichterung für die Reporter-Perspektive ab, findet aber aus der Historiker-Perspektive nichts dabei, zu sagen: „*Dann* also stand es fest“, wobei es freilich je nach Bezugssystem verschieden eingeordnet wird, *wann* es denn feststand. Von „*Dann* also stand es fest“ wird man dieser Ansicht nach *nicht* schließen dürfen auf „*Dann* also hätte man erleichtert sein dürfen“. Der „N“-Operator bleibt dann ungedeutet.
3. Man behält diese Art der Erleichterung für beide Perspektiven bei und stört sich nicht daran, dass dabei auch aus der Reporter-Perspektive Bezugssystem-abhängige Differenzen auftauchen. Man benutzt sowohl „N_Δ“ als auch „N“ im Sinne der erläuterten Deutungen und fasst S^Δ-Werte als Wahrheitswerte auf.

[27] Übrigens hat jemand, der Rakićs Ansatz befürwortet, gar keine andere Wahl, als dies zu tun. Denn er weiß ja nie, ob er sich mit seinem „jetzt“ auf ein realisiertes event (auf einem zu treffenden Zacken) oder auf ein noch unrealisiertes (zwischen zwei Zacken) bezieht. Man sieht, dass die scheinbar felsenfeste Bezugssystem-unabhängig reale Gegenwart bei Rakić existenziell nichts nützt.

In den ersten beiden Fällen kommt man ohne Wahrheitswertlücken aus, im dritten Fall akzeptiert man sie.

Wieder kann man die Peirceanische Lösung als eher Kompetenz-orientiert einstufen: Wie weit auch immer man Bezugssystem-abhängig die Wirklichkeit als fertiggestellt konzipiert – die ontische Situation des Standpunkts berechtigt einen jedenfalls nicht, über Entferntes etwas Wahres zu sagen. Wer es dennoch versucht, überschreitet seine Behauptungskompetenz. Und sie ist es auch, worüber im Rückblick zu reden ist. Wieder kann man die Supervaluations-Variante als Wahrmacher-orientiert einstufen: Das Raten in den Raum hinein führt deshalb zu Wahrheitswertlücken, ebenso wie das Raten in die Zukunft. Die Verwendung des „N"-Operators erlaubt es aber auch, so weit es geht, darauf einzugehen, wie weit jeweils Bezugssystem-abhängig die Wirklichkeit als fertiggestellt konzipiert wird.

Deutlich zu sehen ist, dass jeder der drei Arten der Erleichterung im Prinzip einer der drei „N"-Operatoren entspricht: der Erleichterung darüber, nichts mehr dran tun zu können, dem „pragmatischen" Operator „N_{∇}"; die Erleichterung darüber, dass sich etwas nunmehr entschieden hat (wenn man sie denn haben will) mit „N"; und die Erleichterung, dass etwas geglückt ist mit „N_{Δ}". Dies bestätigt, wofür sonst Priors Werk schöne Belege liefert: dass auch scheinbar rein technische Differenzierungen innerhalb einer formalen Sprache lebensnah sein können; ja, dass sie es sein müssen, wenn die Sprache mit Gewinn anwendbar sein soll.

4.6 Verbleibende Aufgaben

Zum Abschluss einer Studie gilt es, auf ungelöste Probleme und mögliche weitere Aufgaben für die Erforschung ihres Feldes hinzuweisen. So weit ich sehe, stellen sich zwei besonders interessante Probleme im Zusammenhang mit der AR:

1. Wie integriert man Schwarze Löcher und „trousers worlds"?
2. Wie identifiziert man events über Alternativen hinweg?

(zu 1) Die Entscheidung, die Raumzeit im Rahmen einer Sprache zu untersuchen, in der Raum- und Zeitoperatoren (egal, ob aufs Bezugssystem relativiert oder nicht) im Sinne einer *Produkt*logik interagieren, hat eine erhebliche Konsequenz: *Zerschlissene* Modelle sind ausgeschlossen. Schwarze Löcher und „trousers worlds" ähneln sich in der zweidimensionalen Darstellung nicht nur sehr stark. Es stellen sich für sie auch dieselben Fragen: (1) Entsprechen solche Szenarien zerschlissenen Modellen oder nicht? Und: (2) Was für eine Logik behält man für sie übrig, wenn man annimmt, *dass* sie zerschlissenen Modellen entsprechen? Zur zweiten Frage kann man mit Sicherheit so viel sagen: In einer solchen Logik dürften die typischen Produktgesetze für Raum- und Zeit-Operatoren *nicht* gelten (vgl. Kap. II 2.2). Von diesen Gesetzen ist aber manchmal in Herleitungen Gebrauch gemacht worden,[28] z.B. zur Herleitung der Rom-Formeln „SPSp → EPSp“ und „SFSp → EFSp“. In Kap. III 2.3.1.2 gingen die Überlegungen, wie mit Schwarzen Löchern und „trousers worlds“ umzugehen sei, freilich in eine andere Richtung. Es schien gar nicht ausgemacht, dass solche Szenarien zerschlissenen Modellen entsprechen müssen.

Solche Fragen ohne interdisziplinären Rückhalt zu diskutieren, wäre schlicht vermessen. Ich traue mir nicht zu, einzuschätzen, ob die eben gestellten Fragen bei genauerem Hinschauen auch nur sinnvoll sind. Aber vielleicht könnte das umrissene Problem ja zu gemeinsamen Überlegungen von Physikern und Logikern ermutigen. Es ist jedenfalls interessant, dass die Antworten auf solche Fragen präzise damit korreliert sein könnten, welche Gesetze der Raumzeitlogik in was für Modellen gelten.

(zu 2) Die Modelle für LF×Rel enthalten, anders als Belnaps Modelle mit ihren „possible point events“ solche events, die in mehreren Alternativen enthalten sind. Im Rahmen der SR ist das kein Problem. Für die AR fragt sich: Wie identifiziert man events eigentlich über Alternativen hinweg? Das Problem entsteht, weil es in der Welt Massen (bzw. Energien) gibt, die von Alternative zu Alternative unterschiedlich verteilt sein können. Etwas dramatischer gesagt: Schon ein gemäßigter Physikalismus zwingt zu der Annahme, dass in einer *anderen* möglichen Welt die Masse/Energie-Verteilung irgendwie wenigstens ein kleines bisschen anders sein muss – denn worin sollten sich mögliche Welten sonst unterscheiden!

Ein event lässt sich kaum anders identifizieren als über seinen räumlichen und zeitlichen Abstand von einem gewissen Ausgangspunkt aus. Doch die Masse/Energieverteilung wirkt sich auf solche Abstände aus. Soll man nun sagen, man könne nicht anders, als Abstände zur Identifikation von events zu verwenden, da man nun einmal nichts Besseres hat? Das ist zwar eine klare Sache. Aber ich bin nicht sicher, ob es nicht doch Situationen gibt, in denen wir events über Alternativen hinweg intuitiv eher *qualitativ* identifizieren. Doch reden wir dann noch über die event *location* oder eher über ein konkretes Ereignis? Wie identifiziert man ein konkretes (Punkt-)ereignis *qualitativ*? Geht dies ähnlich vor sich, wie es Kripke für Individuen vorschlägt – durch Stipulation?[29] Fallen hier zwei radikal unterschiedliche Arten des Bezugs auf events auseinander?[30]

---

[28] Vgl. etwa B21 und B22 zu Kap. I 2 und B7 zu Kap. II 3. B21 zu Kap. I 2 ist besonders interessant, weil dort die Herleitbarkeit der (com)-Gesetze aus den (chr)-Gesetzen bewiesen wird, wobei (chr)-Gesetze mit „F“ und mit „P“ im selben Beweis eingesetzt werden.

[29] Vgl. Kripke, „Naming and Necessity“, 2. Vorlesung.

[30] van Fraassen beschreibt meiner Ansicht nach im Postscript zu seiner „Introduction to the Philosophy of Space and Time“, S.210, dasselbe Problem und bemerkt dazu: „...*prima facie* at least the question [of probabilities] presupposes just that assumption of independence between physical phenomena and space-time we have found in jeopardy [in connection with General Relativity] – the idea of space-time as an arena in which different worlds *could* unfold. How do you write an indeterministic theory in general relativistic form? These reflections suggest that the problems are not merely technical but may derive from deep, unresolved conceptual questions.“

4.7 Fazit

Welches Fazit lässt sich am Ende der Studie festhalten, und welche Lösung erscheint besonders empfehlenswert?

1. Supervaluation über dem Vergangenheitslichtkegel ist der beste technische Ansatz.
   Vermutlich hat schon der Raum, den die Diskussion des Ansatzes mit S^{Δ}-Supervaluationen in diesem Kapitel eingenommen gezeigt, dass mir dieser Ansatz besonders attraktiv erscheint: Er verbindet leichte technische Durchschaubarkeit mit großer Expressivität und einer plausiblen Lösung im Spannungsfeld zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit. Der Peirceanische Ansatz ist zwar für Kompetenz-orientierte Sprechsituationen eine wertvolle Ergänzung zum Supervaluations-Ansatz, scheint mir aber als *alleinige* Lösung überfordert. Wer Wahrheitswertlücken ungern akzeptiert, wird vermutlich eine andere Einschätzung haben. Dass beide Ansätze einer gründlichen Untersuchung so standhalten, dass sie als vertretbare Optionen zur Verfügung stehen, hoffe ich gezeigt zu haben.

2. Ein eventisierter Hemiaktualismus ist der beste metaphysische Ansatz.
   Viel wichtiger als die Unterschiede zwischen den verschiedenen Lösungen scheinen mir die Gemeinsamkeiten zu sein: Ich plädiere dafür, alle diskutierten Lösungen als Varianten der metaphysischen These des *Hemiaktualismus* zu verstehen. Das ebnet nicht die Unterschiede zwischen ihnen ein. Aber es zeigt: Für welche Detaillösung man sich am Ende auch entscheidet – man kann sie als überzeugter Hemiaktualist vertreten. Bei der Diskussion der verschiedenen Varianten erweist sich somit der Hemiaktualismus als metaphysische Auffassung, die mit der Relativitätstheorie vereinbar ist. Dabei wandelt sich der Hemiaktulismus selbst von einer Auffassung über Zeitpunkte zu einer Auffassung über events.

3. Der Ockhamismus für Alternativen ist zwar abzulehnen, der Ockhamismus für Bezugssysteme ist aber zu befürworten.
   Eine Entscheidung für den Supervaluations-Ansatz für *Alternativen* impliziert eine Ablehnung des Alternativen-Ockhamismus, ist aber mit einem Ockhamismus für Bezugssysteme kompatibel. Ein Ockhamismus für Bezugssysteme ist zu befürworten: Man kann die Welt nicht beschreiben, ohne sie zu beschreiben, und dafür ist ein Bezugssystem zu wählen.

Will man den neuen Standpunkt mit einem *klassischen* Bild beschreiben, so mag man sagen: Die Welt gleicht einer großen Baustelle, die nicht auf einen Blick überschaubar ist; aber wie man seinen Blickwinkel auch wählt, wohin man auch blickt und wann auch immer man das tut – man stellt immer fest, dass das Gebäude nicht fertig ist, sondern weiter daran gebaut wird.[31]

[31] Dieses Bild kann, *als* klassisches Bild, nicht anders als defizitär sein. Es ist nichtsdestotrotz illustrativ. Das Vergleichsobjekt in einem Vergleich *darf* (wie die Sonne in Platons Höhlengleichnis zeigt) gegenüber dem damit Verglichenen defizitär sein, wenn man sich darüber im Klaren ist.

Man kann den neuen Standpunkt auch mit einem weiten Blick zurück in die Geschichte der Philosophie beschreiben. Schon lange sah man: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, was man als bewegt ansehen will und was als ruhend. Was immer der eine als bewegt ansieht, mag ein anderer als ruhend festsetzen. Doch daraus folgt nicht die Ansicht des Parmenides, nichts bewege sich. Denn wie man auch die Festsetzung vornimmt - wenn das eine als ruhend festgesetzt ist, so bewegt sich doch etwas anderes. Nun sieht man: Es gibt für das Raumartige verschiedene Möglichkeiten, was davon man als nicht fertiggestellt ansehen will und was als fertiggestellt. Was immer im Raumartigen der eine als nicht fertiggestellt ansieht, mag ein anderer als fertiggestellt festsetzen. Doch daraus folgt nicht die Ansicht, alles sei fertiggestellt. Denn wie man auch die Festsetzung vornimmt - wenn das eine als fertiggestellt festgesetzt ist, so ist doch anderes noch nicht fertiggestellt. Es lässt sich deshalb mit vollem Recht aus jeder Perspektive sagen: Die „ungeheure Arbeit der Weltgeschichte“[32] ist ergebnisoffen im Gange und unvollendet.

[32] So nennt es Hegel einmal schön in der Vorrede zur „Phänomenologie des Geistes“ (S.33f, 7. Abschnitt „Verwandlung des Vorgestellten und Bekannten in den Gedanken“), selbstverständlich mit ganz anderer Aussageabsicht und ohne Gedanken an raumzeitliche Koordination.

BEGRÜNDUNGEN

Begründungen zu Teil I, Kapitel 1

B1

Sehr wichtige Hilfsregeln von K sind:

DR1 $\vdash_K \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash_K \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$

1	$\alpha \rightarrow \beta$	Annahme als Theorem
2	$\Box(\alpha \rightarrow \beta)$	1, NEC-$\Box$
3	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$	K-$\Box$
4	$\Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	2, 3, MP.

DR2 $\vdash_K \alpha \equiv \beta \Rightarrow \vdash_K \Box\alpha \equiv \Box\beta$

1	$\alpha \equiv \beta$	Annahme als Theorem
2	$\alpha \rightarrow \beta$	1, PC
3	$\Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	2, DR 1
4	$\beta \rightarrow \alpha$	1, PC
5	$\Box\beta \rightarrow \Box\alpha$	4, DR 1
6	$\Box\alpha \equiv \Box\beta$	3,5, PC

DR3 $\vdash_K \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash_K \Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta$

1	$\alpha \rightarrow \beta$	Annahme als Theorem
2	$\sim\beta \rightarrow \sim\alpha$	1, PC (Kontrapos.)
3	$\Box\sim\beta \rightarrow \Box\sim\alpha$	2, DR 1
4	$\sim\Box\sim\alpha \rightarrow \sim\Box\sim\beta$	3, PC (Kontrapos.)
5	$\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta$	4, Def. $\Diamond$

Eine kleine Sammlung wichtiger K-allgemeingültiger Formeln ist:

1	$\sim \Diamond \sim p \equiv \sim \Diamond \sim p$	PC	
2	$\sim \sim \Box \sim \sim p \equiv \sim \Diamond \sim p$	1, Def. $\Diamond$	
3	$\Box p \equiv \sim \Diamond \sim p$	2, PC (PDN)	**(T-K1)**
4	$\Box \sim p \equiv \sim \Diamond \sim \sim p$	3, Subst	
5	$\Box \sim p \equiv \sim \Diamond p$	4, PC (PDN)	
6	$\sim \Diamond p \equiv \Box \sim p$	5, PC	**(T-K2)**

1	$\sim \Box \sim \sim p \equiv \sim \Box \sim \sim p$	PC	
2	$\sim \Box \sim \sim p \equiv \Diamond \sim p$	1, Def. $\Diamond$	
3	$\sim \Box p \equiv \Diamond \sim p$	2, PC (PDN)	**(T-K3)**

1	$\Box(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\Box \sim q \rightarrow \Box \sim p)$	K-$\Box$ mit $\alpha = \sim q$, $\beta = \sim p$	
2	$\Box(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim \Diamond q \rightarrow \sim \Diamond p)$	1, T-K2	
3	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$	2, PC (Kontrapos.)	**(T-K4)**

	1	$(p \wedge q) \to p$	PC	
	2	$\Box(p \wedge q) \to \Box p$	1, DR1	
	3	$(p \wedge q) \to q$	PC	
	4	$\Box(p \wedge q) \to \Box q$	3, DR1	
	5	$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$	2,4, PC	
	6	$p \to (q \to (p \wedge q))$	PC	
	7	$\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$	6, DR1	
	8	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	K-$\Box$	
	9	$\Box(q \to (p \wedge q)) \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$	8, Subst q/p, $(p \wedge q)$/q[1]	
*	10	$\Box p \wedge \Box q$	Annahme	
*	11	$\Box p$	PC (E$\wedge$)	
*	12	$\Box(q \to (p \wedge q))$	7, 11, PC (m.p.)	
*	13	$\Box q \to \Box(p \wedge q)$	9, 12, PC (m.p.)	
*	14	$\Box q$	PC (E$\wedge$)	
*	15	$\Box(p \wedge q)$	13, 14, PC (m.p.)	
	16	$\Box p \wedge \Box q \to \Box(p \wedge q)$	10, 15, Kond.	
	17	$(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$	5, 16, PC	**(T-K5)**.

1	$(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$	**T-K5**	
2	$\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$	1, PC	
3	$\Box(\sim p \wedge \sim q) \equiv (\Box \sim p \wedge \Box \sim q)$	2, Subst	
4	$\sim\Diamond\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv (\sim\Diamond\sim \sim p \wedge \sim \sim \Diamond q)$	3, **T-K1**	
5	$\sim\Diamond\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv (\sim\Diamond p \wedge \Diamond q)$	4, wg. PDN	
6	$\sim\Diamond(p \vee q) \equiv (\sim\Diamond p \wedge \sim\Diamond q)$	5, wg. $\vdash_{PC} \sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \vee q)$	
7	$\sim\Diamond(p \vee q) \equiv \sim(\Diamond p \vee \Diamond q)$	6, wg. $\vdash_{PC} \sim(\sim\alpha \wedge \sim\beta) \equiv (\alpha \vee \beta)$	
8	$\sim\Diamond(p \vee q) \to \sim(\Diamond p \vee \Diamond q)$	7, Def. $\equiv$	
9	$\sim(\Diamond p \vee \Diamond q) \to \sim\Diamond(p \vee q)$	7, Def. $\equiv$	
10	$\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$	9, PC (Kontraposition)	**(T-K6)**
11	$(\Diamond p \vee \Diamond q) \to \Diamond(p \vee q)$	8, PC (Kontraposition)	**(T-K7)**
12	$\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$	10, 11, Def. $\equiv$	**(T-K8)**.

1	$(p \wedge q) \to p$	PC	
2	$\Diamond(p \wedge q) \to \Diamond p$	1, DR3	
3	$(p \wedge q) \to q$	PC	
4	$\Diamond(p \wedge q) \to \Diamond q$	3, DR3	
5	$\Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$	2, 4, PC	**(T-K9)**

B2

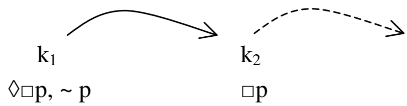
Die Relationseigenschaften Transitivität, Symmetrie Konvergenz und Konnexität lassen sich im Hinblick auf ihre charakteristischen modallogischen Axiome wie folgt veranschaulichen:

Transitivität: Ist die Zugänglichkeitsrelation transitiv, so muss man einen Kontext, den man von einem gegebenen Kontext aus mit zwei Schritten erreichen kann, auch mit einem Schritt erreichen können und deshalb muss, wenn „$\Diamond\Diamond p$“ wahr ist, auch „$\Diamond p$“ wahr sein. Ist sie nicht transitiv, so gibt es wenigstens einen Kontext, von dem aus man nicht in einem Schritt erreichen kann, was man mit zwei Schritten erreicht. Dann kann man aber immer eine Bewertungsfunktion finden, mit der für diesen Kontext „$\Diamond\Diamond p$“ wahr wird, „$\Diamond p$“ aber falsch:

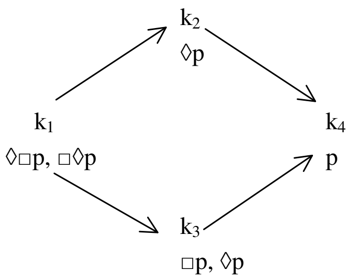
$$\begin{tikzcd} k_1 \arrow[r, bend left] & k_2 \arrow[r, bend left] & k_3 \\ \Diamond\Diamond p, \sim\Diamond p & \Diamond p, \sim p & p \end{tikzcd}$$

[1] Ab Zeile 9 Abweichung vom aussagenlogisch umständlichen Beweis im HC.

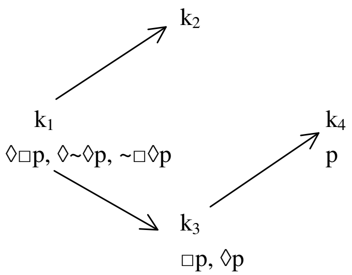
Symmetrie: Ist für einen gegebenen Kontext k „$\Diamond\Box p$“ wahr, so gibt es einen von k aus zugänglichen Kontext k’, für den „$\Box p$“ wahr ist. Ist die Zugänglichkeitsrelation symmetrisch, so ist dann auch von k_2 aus k_1 zugänglich. Dann muss aber, wenn „$\Box p$“ für k_2 wahr ist, „p“ für k_1 wahr sein. Ist dagegen die Zugänglichkeitsrelation nicht symmetrisch, so gibt es wenigstens zwei Kontexte k_1 und k_2, so dass zwar von k_1 aus k_2 zugänglich ist, aber nicht umgekehrt. In diesem Fall gibt es immer eine Bewertungsfunktion, die zwar „$\Diamond\Box p$“ für k_1 wahr sein lässt, „p“ aber nicht:



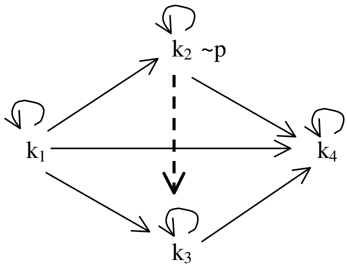
Konvergenz: Ist die Zugänglichkeitsrelation einer Struktur konvergent, so gibt es für zwei beliebige von einem Kontext k_1 aus erreichbare Kontexte k_2 und k_3 einen Kontext k_4, so dass dieser sowohl von k_2 als auch von k_3 erreichbar ist. Angenommen, für k_1 sei „$\Diamond\Box p$“ deshalb wahr, weil für k_2 „$\Box p$“ wahr ist. So ist „p“ für jeden von k_2 aus zugänglichen Kontext wahr, also auch für k_4. Ist aber k_4 von jedem *beliebigen* von k_1 aus zugänglichen Kontext k aus zugänglich, so muss auch „$\Box\Diamond p$“ für k_1 wahr sein. Das lässt sich, wenn man k_1, k_2, k_3 und k_4 verschieden wählt, folgendermaßen veranschaulichen:



Ist die Zugänglichkeitsrelation hingegen nicht konvergent, so kommt wenigstens an einer Stelle der Struktur eine Situation vor, die sich folgendermaßen veranschaulichen lässt, wenn man k_1, k_2, k_3 und k_4 verschieden wählt (wie auch immer sonst die Kontexte mit weiteren nicht dargestellten Kontexten verbunden sein mögen):



Konnexität: Die Forderung der Konnexität ergibt, dass z.B. die folgende Struktur ohne den unterbrochenen Pfeil eine S4.2-Struktur, aber keine S4.3-Struktur ist, mit dagegen schon (aber mangels Symmetrie noch keine S5-Struktur):



B3

Zu (S4-$\Box$): Äquivalenz von „$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$“ und „$\Box p \rightarrow \Box\Box p$“

1	$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	(S4-$\Box$)
2	$\Diamond\Diamond\sim p \rightarrow \Diamond\sim p$	1, Subst
3	$\sim\Diamond\sim p \rightarrow \sim\Diamond\Diamond\sim p$	2, PC (Kontrapos.)
4	$\sim\Diamond\sim \rightarrow \sim\Diamond\sim\sim\Diamond\sim p$	3, PC (wg. PDN)
5	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	4, wg. T-K1

Der Beweis der Gegenrichtung enthält dieselben Zeilen in umgekehrter Reihenfolge und mit angepasstem Kommentar.

Zu (B-$\Box$): Äquivalenz von „$\Diamond\Box p \rightarrow p$“ und „$p \rightarrow \Box\Diamond p$“

1	$\Diamond\Box p \rightarrow p$	(B-$\Box$)
2	$\Diamond\Box\sim p \rightarrow \sim p$	1, Subst
3	$\Diamond\sim\Diamond\sim\sim p \rightarrow \sim p$	2, T-K1
4	$\Diamond\sim\Diamond p \rightarrow \sim p$	3, PC (wg. PDN)
5	$\sim\Box\sim\sim\Diamond p \rightarrow \sim p$	4, Def. $\Diamond$
6	$\sim\Box\Diamond p \rightarrow \sim p$	5, PC (wg. PDN)
7	$p \rightarrow \Box\Diamond p$	6, Kontrapos.

Der Beweis der Gegenrichtung enthält dieselben Zeilen in umgekehrter Reihenfolge und mit angepasstem Kommentar.

Zu (S5-$\Box$): Äquivalenz von „$\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$“ und „$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$“

1	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$	(S5-$\Box$)
2	$\Diamond\Box\sim p \rightarrow \Box\sim p$	1, Subst
3	$\sim\Box\sim p \rightarrow \sim\Diamond\Box\sim p$	2, PC (Kontrapos.)
4	$\sim\Box\sim p \rightarrow \sim\Diamond\sim\sim\Box\sim p$	3, PC (DN)
5	$\Diamond p \rightarrow \sim\Diamond\sim\Diamond p$	4, Def. $\Diamond$
6	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	5, T-K1

Der Beweis der Gegenrichtung enthält dieselben Zeilen in umgekehrter Reihenfolge und mit angepasstem Kommentar.

B4

Wichtige T-Theoreme sind:

1	$\Box p \rightarrow p$	(T-$\Box$)	
2	$\Box{\sim}p \rightarrow {\sim}p$	1, Subst	
3	${\sim\sim}p \rightarrow {\sim}\Box{\sim}p$	2, PC (Kontrapos.)	
4	$p \rightarrow {\sim}\Box{\sim}p$	3, PC (wg. PDN)	
5	$p \rightarrow \Diamond p$	4, Def. $\Diamond$	**(T-T1)**
6	$\Box p \rightarrow \Diamond p$	1, 5, PC (Kettenschluss)	**(T-T2)**
7	${\sim}\Diamond p \rightarrow {\sim}\Box p$	6, PC (Kontrapos.)	**(T-T3)**
8	${\sim}\Diamond p \rightarrow \Diamond {\sim}p$	7, T-K3, PC (Gleichsetzung)	**(T-T4)**
9	$\Box p \rightarrow {\sim}\Box{\sim}p$	6, Def. $\Diamond$	
10	${\sim}(\Box p \wedge {\sim\sim}\Box{\sim}p)$	9, PC: $\ulcorner(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow {\sim}(\alpha\wedge {\sim}\beta)\urcorner$	
11	${\sim}(\Box p \wedge \Box{\sim}p)$	10, (wg. PDN)	**(T-T5)**
12	${\sim}\Diamond{\sim}p \rightarrow {\sim\sim}\Diamond{\sim\sim}p$	9, T-K1	
13	${\sim}\Diamond{\sim}p \rightarrow \Diamond p$	12, PC (wg.PDN)	
14	$\Diamond {\sim}p \vee \Diamond p$	12, PC (Def. $\vee$)	**(T-T6)**

B5

S4-Reduktionsgesetze

1	$\Box p \rightarrow p$	(T-$\Box$)	1	$p \rightarrow \Diamond p$	(T-T1)
2	$\Box\Box p \rightarrow \Box p$	1, Subst	2	$\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$	1, Subst
3	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	(S4-$\Box$)	3	$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	(S4-$\Box$)
4	$\Box p \equiv \Box\Box p$	2, 3, PC	4	$\Diamond p \equiv \Diamond\Diamond p$	2, 3, PC

B6

Dass (S5-$\Box$) die Kombination aus (S4-$\Box$) und (B-$\Box$) ersetzen kann, sieht man daran, dass einerseits aus der S4-Axiomatik mit hinzugefügtem (B-$\Box$) schnell (S5-$\Box$) herleitbar ist:

1	$\Diamond p \equiv \Diamond\Diamond p$	S4-Reduktion (vgl. B5)	
2	$\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond\Diamond p$	(B-$\Box$), $\alpha = \Diamond p$	
3	$\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond p$	1, 2, PC (gleichwertige Ersetzung)	(S5-$\Box$) alternativ
4	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$	3, vgl. B3 zu (S5-$\Box$)	**(S5-$\Box$)**

Andererseits lässt sich aus (S5-$\Box$) und der T-Axiomatik sowohl (S4-$\Box$) als auch (B-$\Box$) herleiten.

1	$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	(T-$\Box$) ($\alpha = \Diamond p$)	
2	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	(S5-$\Box$) alternativ	
3	$\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$	1, 2, PC (Def. $\equiv$)	
4	$p \rightarrow \Diamond p$	T-T1	
5	$\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$	4, Subst $\Box p/p$	
6	$\Diamond\Box p \equiv \Box\Diamond\Box p$	3, Subst $\Box p/p$	
7	$\Box p \rightarrow \Box\Diamond\Box p$	5, 6, PC (Gleichsetzung)	
8	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$	(S5-$\Box$)	
9	$\Diamond\Box p \equiv \Box p$	5, 8, PC (Def. $\equiv$)	
10	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	7, 9, PC (gleichwertige Ersetzung)	(S4-$\Box$) alternativ
11	$\Diamond\Diamond p\rightarrow\Diamond p$	vgl. B3 zu (S4-$\Box$)	**(S4-$\Box$)**.

B7

S5-Reduktionsgesetze

$\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$	vgl. B6 (2), Zeile 3
$\Box p \equiv \Diamond\Box p$	vgl. B6 (2), Zeile 9

S5-Herleitungsregeln

DR-4 $\vdash \Diamond\alpha\rightarrow\beta \Rightarrow \vdash \alpha\rightarrow\Box\beta$

1 $\Diamond\alpha\rightarrow\beta$	Annahme als Theorem
2 $\Box\Diamond\alpha\rightarrow\Box\beta$	1, DR1
3 $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$	(B-$\Box$) in S5 (vgl. B6)
4 $\alpha \rightarrow \Box\beta$	2, 3, PC.

DR-S5 $\vdash \alpha\rightarrow\Box\beta \Rightarrow \vdash \Diamond\alpha\rightarrow\beta$

1 $\alpha\rightarrow\Box\beta$	Annahme als Theorem
2 $\Diamond\alpha\rightarrow\Diamond\Box\beta$	1, DR3
3 $\Diamond\Box\beta \rightarrow \Box\beta$	S5-$\Box$
4 $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\beta$	2, 3, PC (!)
5 $\Box\beta \rightarrow \beta$	T-$\Box$
6 $\Diamond\alpha \rightarrow \beta$	4, 5, PC.

Beweis für „$\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$“

1 $\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$	S5-$\Box$ alt.
2 $\Box p \rightarrow \Diamond p$	(T-T2)
3 $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	S5-$\Box$
4 $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$	1, 2, 3 PC (Kettenschluss)

Gegenbeispiel zu „$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$“: ° ~p
(mit universeller Zugänglichkeit)

~p ° ° p

B8

Die Zugänglichkeitsrelationen müssen in keinerlei systematischem Verhältnis zueinander stehen. Es gibt deshalb zu jedem über die Fusions-Theoreme hinausgehenden vorgeblichen weiteren Theorem ohne weiteres ein Modell, das ein Gegenbeispiel dazu darstellt.

B9

„$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$“ und „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow p$“ sind (1) nicht KuK-allgemeingültig, aber (2) K_t-allgemeingültig.

(1) In Fällen, in denen A_1 mit A_2 identisch ist, aber nicht symmetrisch, gibt es einen Kontext, an dem beide Formeln falsifiziert werden. Denn abgesehen von den Indizes sind die Formeln ja jeweils gerade das Brouwer-Axiom (B-$\Box$), mit dem man die Symmetrie postuliert.

(2) Sind i, k aus {1,2} und i ≠ k und ist A’ die konverse Relation zu A, so kann man argumentieren: Angenommen, $V_M(\Diamond_i\Box_k\alpha,k_0)=1$. So gibt es, wegen der Semantik für $\Diamond_i$ ein k, so dass gilt: k_0 A k und $V_M(\Box_k\,\alpha,k)=1$. Sei k_1 ein solcher Kontext, so dass gilt: k_0 A k_1 und $V_M(\Box_k\alpha,k_1)=1$. So gilt $V_M(\Box_k\alpha,k_1)=1$. So gilt wegen der Semantik für $\Box_k$ für alle k’: Wenn k_1 A’ k’, dann $V_M(\alpha,k')=1$. Also gilt auch: Wenn k_1 A’ k_0, dann $V_M(\alpha,k_0)=1$. Nach Voraussetzung der Konversen-Eigenschaft gilt: k_1 R’ k_0 genau dann, wenn k_0 R k_1. Also gilt auch: Wenn k_0 A k_1, dann $V_M(\alpha,k_0)=1$. Nun gilt ja: k_0 A k_1. Also gilt: $V_M(\alpha,k_0)=1$. Wenn $V_M(\Diamond_i\Box_k\alpha,k_0)=1$, dann also auch $V_M(\alpha,k_0)=1$. Also gilt: $V_M(\Diamond_i\Box_k\alpha\rightarrow\alpha,k_0)=1$.

B10

Alternative Versionen der Formeln „$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$“ und „$\Diamond_2\Box_1 p \rightarrow p$“ sind „$p \rightarrow \Box_1\Diamond_2 p$“ und „$p \rightarrow \Box_2\Diamond_1 p$“. Die Beweise sind völlig analog zum zu (B-$\Box$) in B3 Ausgeführten. Ein besonders anschauliches Gegenbeispiel zu „$\Box_i\Diamond_i p \rightarrow \Diamond_i\Box_i p$“ besteht aus einem stark linearen und diskreten Modell ohne letzte Kontexte, in dem *jeder zweite* Kontext ein „p“-Kontext ist.

B11

	1	$\Diamond_1\alpha \rightarrow \beta$	Annahme als herleitbar
	2	$\Box_2 (\Diamond_1\alpha \rightarrow \beta)$	1, NEC-$\Box_2$
	3	$\Box_2(\Diamond_1\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box_2\Diamond_1\alpha \rightarrow \Box_2\beta)$	(K-$\Box_2$)
	4	$\Box_2\Diamond_1\alpha \rightarrow \Box_2\beta$	2, 3, MP
*	5	α	Annahme
	6	$\alpha \rightarrow \Box_2\Diamond_1\alpha$	(K_t-2) alternativ
*	7	$\Box_2\Diamond_1\alpha$	5, 6, MP
*	8	$\Box_2\beta$	4, 7, MP
	9	$\alpha \rightarrow \Box_2\beta$	5, 8, kond.

Analog mit „1“ und „2“ vertauscht.

B12

Fordert man bei K_t zusätzlich die Symmetrie von A_1, bricht der Unterschied zwischen den beiden Operatorenpaaren zusammen. Das liegt daran, dass jede symmetrische Relation klarerweise ihre eigene konverse Relation ist.

B13

1	$\Diamond_1\Box_1 p \rightarrow p$	(B-$\Box_1$)	
2	$\Diamond_2\Box_2 p \rightarrow p$	(B-$\Box_2$)	
3	$\Box_1 p \rightarrow \Box_2 p$	1, R-$\Diamond_1\Box_2$	$\alpha = \Box_1 p$, $\beta = p$
4	$\Box_2 p \rightarrow \Box_1 p$	2, R-$\Diamond_2\Box_1$	$\alpha = \Box_2 p$, $\beta = p$
5	$\Box_1 p \equiv \Box_2 p$	3, 4, Def. $\equiv$.	

B14

Angenommen, R_1 ist transitiv. So gilt für beliebige Relate a, b, c: Wenn a R_1 b & b R_1 c, dann a R_1 c. Weiter angenommen, R_1 und R_2 seien konvers. Dann gilt auch: Wenn b R_2 a & c R_2 b, dann c R_2 a. Dann gilt, wegen der Kommutativität von “&” auch: Wenn c R_2 b & b R_2 a, dann c R_2 a, also mit Umetikettierung: Wenn a R_2 b & b $R_{2\,c}$, dann a R_2 c.

B15

1	$\Diamond_1\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow \Diamond_1\Box_2 p$	(S4-$\Diamond_1$) mit $\alpha = \Box_2 p$)
2	$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$	(K_t–1)
3	$\Diamond_1\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow p$	1, 2, PC
4	$\Diamond_1\Box_2 p \rightarrow \Box_2 p$	3, R-$\Diamond_1\Box_2$ mit $\alpha = \Diamond_1\Box_2 p$ und $\beta = p$
5	$\Box_2 p \rightarrow \Box_2\Box_2 p$	4, R-$\Diamond_1\Box_2$ mit $\alpha = \Box_2 p$ und auch $\beta = \Box_2 p$
6	$\Diamond_2\Diamond_2 p \rightarrow \Diamond_2 p$	5.[2]

B16

Sind A_1 und A_2 konverse Relationen zueinander und ist A_1 reflexiv, so ist auch A_2 reflexiv. Denn sind R_1 und R_2 konvers, so gilt a R_1 b gdw b R_2 a für beliebige a und b, mit Einsetzung von a für b also auch a R_1 a gdw a R_2 a. Ist R_1 reflexiv, so gilt für a in der Tat a R_1 a, mithin auch a R_2 a

[2] Beweisansatz nach Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.73.

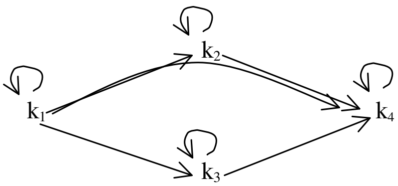
B17

	*	1	$\Box_2 p$	Annahme
*		2	$\Box_1 q \rightarrow q$	Annahme (Reflexivität)
*		3	$q \rightarrow \Diamond_1 q$	2, vgl. (T-T2)
*		4	$\Box_2 p \rightarrow \Diamond_1 \Box_2 p$	3, Subst $\Box_2 p$ / q
*	*	5	$\Diamond_1 \Box_2 p$	1, 4, MP
*	*	6	$\Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p$	(K_t–1)
*		7	p	5, 6, MP
*		8	$\Box_2 p \rightarrow p$	1, 7, konditionalisiert.

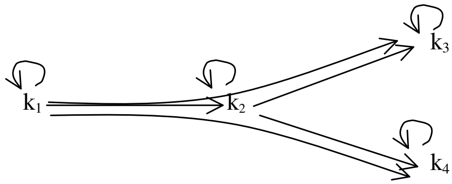
B18

Dies ist eine im Vergleich zum monomodalen S4.3 interessante, dem bimodalen Aufbau geschuldete Eigenschaft: Zwar sind die Strukturen (a) und (b) i.F. weder monomodale S4.3-Strukturen noch bimodale S4.3-Strukturen (wobei die Pfeile im monomodalen Fall A darstellen und im bimodalen A_1):

(a)

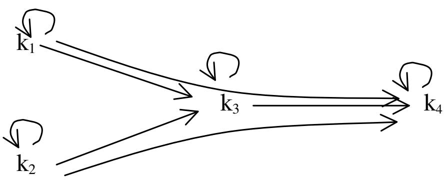


(b)



Denn in beiden Fällen wird die Konnexitätsforderung verletzt. Weder das monomodale noch das bimodale S4.3 erlauben also aufgespleißte oder „in Pfeilrichtung“ verzweigte Strukturen. Es ist jedoch zu beachten, dass (c) eine völlig respektable monomodale S4.3-Struktur ist, denn die Konnexitätsforderung für A wird nicht verletzt:[3]

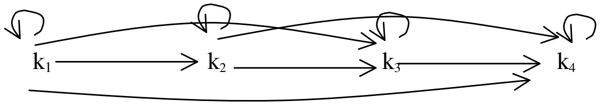
(c)



Das monomodale S4.3 erlaubt also rückwärtsverzweigte Strukturen. Interessanterweise ist (c) aber keine mögliche *bimodale* S4.3-Struktur. Denn beim auf K_t basierenden bimodalen S4.3 ist die Konnexität nicht nur für A_1 gefordert, sondern auch für deren Konverse A_2. Die Konnexitätsforderung für A_2 würde aber in (c), wie der Vergleich mit (b) anschaulich zeigt, verletzt. Deshalb *müssen* Strukturen des auf K_t basierenden bimodalen S4.3 typischerweise so aussehen:

[3] Zur Linienstruktur bei S4.3-Modellen zwar nicht falsch, aber doch missverständlich: HC, S.128.

(d)



B19

Angenommen, R_1 und R_2 sind konvers und asymmetrisch. So gilt b R_1 a gdw a R_2 b und a R_1 b gdw b R_2 a. Und es gilt: Wenn b R_1 a, dann nicht a R_1 b. Kann nun a R_2 b und auch b R_2 a gelten? Wenn a R_2 b, dann b R_1 a, also nicht a R_1 b. Wenn auch noch b R_2 a, dann aber doch. Also gilt: Wenn a R_2 b, dann nicht b R_2 a.

B20

Angenommen, R sei asymmetrisch. So gilt: Wenn a R b, dann nicht b R a, also auch wenn a R a, dann nicht a R a. Ein reflexiver Fall von R würde sofort zum Widerspruch führen. Also muss R irreflexiv sein.

B21

Angenommen, es gebe einen symmetrischen Fall mit a R b & b R a. So gilt bei Transitivität: Wenn aRb & bRa, dann a R a im Widerspruch zur Annahme der Irreflexivität. Also ist R asymmetrisch, falls transitiv und irreflexiv.

B22

Man betrachte die Forderungen:
Für alle k, k', k": wenn kA_1k' und kA_1k'', dann gibt es ein k"', so dass $k'A_1k'''$ und $k''A_1k'''$
Für alle k, k', k": wenn kA_2k' und kA_2k'', dann gibt es ein k"', so dass $k'A_2k'''$ und $k''A_2k'''$.

Die zweite lässt sich, wenn A_1 und A_2 Konversen sind, auch ausdrücken als:
Für alle k, k', k": wenn $k'A_1k$ und $k''A_1k$, dann gibt es ein k"', so dass $k'''A_1k'$ und $k'''A_1k''$.

Beide Forderungen sind unabhängig voneinander. Das sieht man z.B. daran, dass in B 18 (b) A_2 konvergent ist, A_1 aber nicht, und in (c) umgekehrt.

B23

Für A_1 und A_2 ganz symmetrisch formuliert hätte man:
Konnexität für A_1: Für alle k, k', k" aus W gilt: wenn kA_1k' und kA_1k'',
dann $k'A_1k''$ oder$^{\&}$ $k''A_1k'$ *oder*$^{\&}$ k'= k".
Konnexität für A_2: Für alle k, k', k" aus W gilt: wenn kA_2k' und kA_2k'',
dann $k'A_2k''$ oder$^{\&}$ $k''A_2k'$ *oder*$^{\&}$ k'= k".

Da A_1 und A_2 konvers zueinander stehen, kann man die Forderung der Konnexität *für* A_1 alternativ auch allein *unter Erwähnung von* A_2 formulieren und umgekehrt:

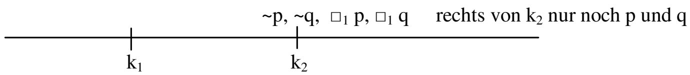
1	$\forall k,k',k''\ [kA_1k' \,\&\, kA_1k'' \Rightarrow (k'A_1k'' \vee k''A_1k' \vee k'= k'')]$	Ann.: A_1 konnex
2	$\forall\ k,k'\ [k\ A_1\ k' \Leftrightarrow k'\ R_2\ k]$	Ann.: A_1 und A_2 konvers
3	$\forall k,k',k''\ [k'A_2k \,\&\, k''A_2k \Rightarrow (k''A_2k' \vee k'A_2k'' \vee k'= k'')]$	1, 2, Einsetzung
4	$\forall k,k',k''\ [k'A_2k \,\&\, k''A_2k \Rightarrow (k'A_2k'' \vee k'= k'' \vee k''A_2k')]$	3, Umstellung.

B24

1. ($S4.3$-$\Box_i$) wird an einem Kontext falsifiziert, wenn dort „$\Diamond_1 (\Box_1 p \wedge \sim q) \wedge \Diamond_1 (\Box_1 q \wedge \sim p)$" wahr wird.

1	$\Diamond_1\ (\Box_1 p \wedge \sim q) \wedge\ \Diamond_1\ (\Box_1 q \wedge \sim p)$	
2	$\sim \Box_1 \sim (\Box_1 p \wedge \sim q) \wedge \sim \Box_1 \sim (\Box_1 q \wedge \sim p)$	1, Def. $\Diamond_i$
3	$\sim \Box_1\ (\Box_1 p \rightarrow q)\ \wedge \sim \Box_1\ (\Box_1 q \rightarrow p)$	2, PC
4	$\sim (\Box_1 (\Box_1 p \rightarrow q)\ \vee\ \Box_1 (\Box_1 q \rightarrow p))$	3, PC

2. „$\Diamond_1 (\Box_1 p \wedge \sim q) \wedge \Diamond_1 (\Box_1 q \wedge \sim p)$“ wird an k wahr:



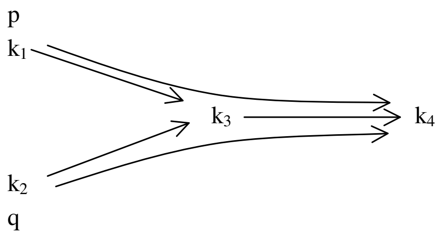
B25

Als Axiome für die Konnexität (wenn keine Reflexivität der Zugänglichkeitsrelationen gefordert ist) sind in der Literatur die folgenden gebräuchlich; jeder Logiker scheint hier seine bevorzugte Version zu haben:

1.[4]	**(Lin-1)**	$\ulcorner \Box_1 (\Box_1\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta) \vee \Box_1 (\Box_1\beta \wedge \beta \rightarrow \alpha)\urcorner$
	(Lin-2)	$\ulcorner \Box_2 (\Box_2\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta) \vee \Box_2 (\Box_2\beta \wedge \beta \rightarrow \alpha)\urcorner$
2.	**(SK-A$_2$-Pr1)**	$\ulcorner \Diamond_1\Diamond_2 \alpha \rightarrow (\Diamond_2 \alpha \vee \alpha \vee \Diamond_1 \alpha)\urcorner$
	(SK-A$_1$-Pr1)	$\ulcorner \Diamond_2\Diamond_1 \alpha \rightarrow (\Diamond_1 \alpha \vee \alpha \vee \Diamond_2 \alpha)\urcorner$
3.[5]	**(SK-A$_2$-Pr2)**	$\ulcorner \Diamond_2 \alpha \wedge \Diamond_2 \beta \rightarrow (\Diamond_2 (\alpha \wedge\beta) \vee \Diamond_2 (\alpha \wedge\Diamond_2\beta) \vee \Diamond_2 (\Diamond_2\alpha \wedge\beta))\urcorner$
	(SK-A$_1$-Pr2)	$\ulcorner \Diamond_1 \alpha \wedge \Diamond_1 \beta \rightarrow (\Diamond_1 (\alpha \wedge\beta) \vee \Diamond_1 (\alpha \wedge\Diamond_1\beta) \vee \Diamond_1 (\Diamond_1\alpha \wedge\beta))\urcorner$
4.[6]	**(SK-A$_2$-K/W)**	$\ulcorner \Diamond_1 \alpha \rightarrow \Box_1 (\Diamond_2 \alpha \vee \alpha \vee \Diamond_1 \alpha)\urcorner$
	(SK-A$_1$-K/W)	$\ulcorner \Diamond_2 \alpha \rightarrow \Box_2 (\Diamond_2 \alpha \vee \alpha \vee \Diamond_1 \alpha)\urcorner$
5.[7]	**(Reynolds-1)**	$\ulcorner \Diamond_1 (\Box_1\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \rightarrow \Box_1 (\alpha \vee \Diamond_1\beta \vee \gamma)\urcorner$
	(Reynolds-2)	$\ulcorner \Diamond_2 (\Box_2\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \rightarrow \Box_2 (\alpha \vee \Diamond_2\beta \vee \gamma)\urcorner$

Gerade die dritte und längste Version lässt sich besonders gut motivieren: Die folgende Variante von (c) wäre z.B. eine Situation, in der zwar A_1 konnex ist, nicht aber A_2 und in der „$\Diamond_2 (p \wedge q) \vee \Diamond_2 (p \wedge\Diamond_2 q) \vee \Diamond_2 (\Diamond_2 p \wedge q)$“ an k_3 falsifiziert wird, obwohl „$\Diamond_2 p \wedge \Diamond_2 q$“ an k_3 verifiziert wird.

(c’)



B26

1	$\forall k,k',k'' [k'A_1k \,\&\, k''A_1k \Rightarrow (k'A_1k'' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k''A_1k')]$	A_2 konnex
2	$\forall k,k',k'' [k'A_2k \,\&\, k''A_2k \Rightarrow (k'A_2k'' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k''A_2k')]$	A_1 konnex
3	$\forall k',k'' [k' A_1 k'' \Leftrightarrow k'' R_2 k']$	Ann.: A_1 und A_2 konvers
4	$\forall k,k',k'' [k'A_2k \,\&\, k''A_2k \Rightarrow (k''A_1k' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k'A_1k'')]$	2, 3, Einsetzung
5	$\forall k,k',k'' [k'A_2k \,\&\, k''A_2k \Rightarrow (k'A_1k'' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k''A_1k')]$	4, Umstellung
6	$\forall k,k',k'' [(k'A_1k \,\&\, k''A_1k) \text{ v } (k'A_2k \,\&\, k''A_2k) \Rightarrow (k'A_1k'' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k''A_1k')]$	1, 5 „v“
7	$\forall k,k',k'' [(k'A_1k \,\&\, k''A_1k) \text{ v } (kA_1k' \,\&\, kA_1k'') \Rightarrow (k'A_1k'' \text{ v } k'= k'' \text{ v } k''A_1k')]$	3, 6, Einsetzung

---

[4] Vgl. MDML, S.13, 43.

[5] „Pr“ steht für „Prior“. Vgl. zum Verhältnis der beiden Axiome zueinander auf Grundlage von Prior PPF, S.205ff, Øhrstrøm / Hasle („Temporal Logic“ (1995), S. 207f).

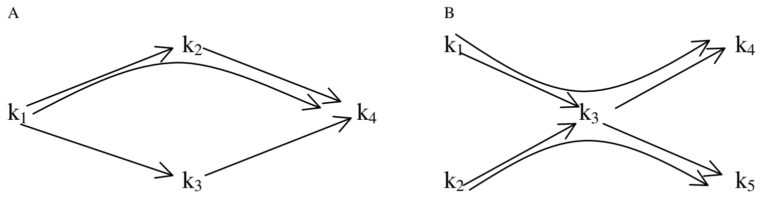
[6] „K/W“ steht für „Kutschera / Wölfl“. Sowohl Kutschera („TxW-comp1eteness“ (1997)) als auch Wölfl („Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.128) benutzen diese Varianten.

[7] Vgl. Reynolds, „A decidable temporal logic of parallelism“ (1998), S.16.

B27

Jede der beiden Forderungen, die der Konnexität für A_1 wie die der Konnexität für A_2, für sich schließt bereits Strukturen wie in (f) aus. Beide Forderungen sind wieder deutlich voneinander unterschieden: Abbildung (b) in B18 zeigt Konnexität für A_2, aber nicht für A_1; Abbildung (c) in B18 zeigt Konnexität für A_1, aber nicht für A_2. Erst wenn man *beidseitige* Konnexität fordert, kann man sichergehen, sowohl Strukturen wie in (b) als auch wie in (c) ausgeschlossen zu haben und es typischerweise mit Strukturen wie (d) zu tun zu haben:

(f)



B28

Man betrachte die in B26, Zeile 7, erreichte Formulierung der Forderung der Linearität im Sinne beidseitiger Konnexität:
(A) $\forall k,k',k''\ [(k'A_1k \ \&\ k''A_1k) \vee (kA_1k' \ \&\ kA_1k'') \Rightarrow (k'A_1k'' \vee k' = k'' \vee k''A_1k')]$.

Diese Forderung ist offensichtlich schwächer als:
(B) $\forall k,k',k''\ [k'A_1k'' \vee k' = k'' \vee k''A_1k']$.

Denn was in (A) unter einer Bedingung gefordert wird, wird in (B) bedingungslos gefordert. (B) ist aber einfach eine redundante Notation für:
(C) $\forall\ k,k'\ [kA_1k' \vee k = k' \vee k'A_1k]$.

B29

Die Forderung der starken Linearität ist für *zwei beliebige Kontexte aus W* formuliert. Deshalb ist in ihr implizit das Postulat der Verinselungsfreiheit enthalten. Denn dass zwei beliebige verschiedene Kontexte aus W in der einen oder der anderen Richtung über A_1 bzw. A_2 verbunden sind, heißt nichts anderes als: Es gibt keine zwei verschiedenen Kontexte *aus W*, die nicht über A_1 verbunden sind. Gerade das wird man aber *in diesem Fall* als *hinreichend* für die Verinselungsfreiheit ansehen können (wenn es auch nicht *notwendig* ist, denn die Strukturen in B18 und B27 sind ja intuitiv gesprochen auch verinselungsfrei).

B30

Die Korrektheit ist unproblematisch. Ferner ist wohlbekannt[8], dass die K_t-Axiomatik unter Hinzufügung von (S4-$\Box_1$) (oder (S4-$\Box_1$)-alternativ) und (SK-A_1-Pr2) / (SK-A_2-Pr2) (oder einem Äquivalent dazu) gerade diejenige Erweiterung von K_t nicht nur korrekt, sondern auch vollständig axiomatisiert, bei der für die Zugänglichkeitsrelationen Asymmetrie, Transitivität und *starke* Linearität gefordert werden. Somit ist sie *erst recht* stark genug, um alle Formeln herzuleiten, die auf K_{lin}-Modellen *überhaupt* allgemeingültig werden.

[8] Vgl. z.B. Burgess, „Basic Tense Logic" (1984).

B31[9]

	1	$\Diamond_1\Box_2\Box_2 p \to \Diamond_1\Diamond_1\Box_2\Box_2 p$	(Dense-A$_{(1)}$) mit $\alpha = \Box_2\Box_2 p$
	2	$\Diamond_1\Box_2 p \to p$	(K_t-1)
	3	$\Diamond_1\Box_2\Box_2 p \to \Box_2 p$	(K_t-1) mit $\alpha = \Box_2 p$
	4	$\Diamond_1\Diamond_1\Box_2\Box_2 p \to \Diamond_1\Box_2 p$	3, DR-3 mit $\alpha = \Box_2\Box_2 p$ und $\beta = \Box_2 p$
*	5	$\Diamond_1\Box_2\Box_2 p$	Annahme
*	6	$\Diamond_1\Diamond_1\Box_2\Box_2 p$	5, 1, MP
*	7	$\Diamond_1\Box_2 p$	4, 6, MP
*	8	p	2, 7, MP
	9	$\Diamond_1\Box_2\Box_2 p \to p$	5, 8, konditionalisiert
	10	$\Box_2\Box_2 p \to \Box_2 p$	9, R-$\Diamond_1\Box_2$ (vgl. B11) mit $\alpha = \Box_2\Box_2 p$ und $\beta = p$
	11	$\Box_2\Box_2{\sim}p \to \Box_2{\sim}p$	10, Subst ~p / p
	12	${\sim}\Diamond_2{\sim\sim}\Diamond_2{\sim\sim}p \to {\sim}\Diamond_2{\sim\sim}p$	11, nach T-K1
	13	${\sim}\Diamond_2\Diamond_2 p \to {\sim}\Diamond_2 p$	12, PC (PDN)
	14	$\Diamond_2 p \to \Diamond_2\Diamond_2 p$	13, PC (Kontrapos.).

B32

Die volle Kontinuität lässt sich charakterisieren wie folgt: Eine linear und dicht geordnete Menge von Kontexten ist gerade dann kontinuierlich, wenn gilt, dass sie an jedem in ihr enthaltenen Kontext k so in zwei Hälften geteilt werden, dass k entweder der letzte Kontext der ersten Hälfte ist (d.h. für jeden von k verschiedenen Kontext k', der in dieser Hälfte liegt, gilt: k' A k) oder k der erste Kontext der zweiten Hälfte ist (d.h. für jeden von k verschiedenen Kontext k', der in dieser Hälfte liegt, gilt: k A k'). Bereits seit 1966 kennt man eine Formel, die objektsprachlich kontinuierliche Zeitordnungen gegenüber dichten unterscheiden kann. Diese nach ihrem Entdecker benannte Cocchiarella-Formel ist nicht gerade unkompliziert:

Cocchiarella-Formel “$\Box_1 p \to (\Box_2\Box_1 (\Box_1 p \to \Diamond_2\Box_1 p) \to \Box_2\Box_1 p)$”.

Ihre Motivation bei Prior (PPF, S.71) gehört zu den besonders schönen Beispielen für die Argumentation mit der Ausdruckskraft bimodaler Logiken. Mit ähnlicher Motivation fügt Burgess die folgenden Axiomenschemata hinzu:

(Kont-1) $\ulcorner$ „$\Diamond_1\alpha \wedge \Diamond_1\Box_1{\sim}\,\alpha \to \Diamond_1(\Box_2\Diamond_1\,\alpha \wedge \Box_1{\sim}\,\alpha)$$\urcorner$
(Kont-2) $\ulcorner$ „$\Diamond_2\alpha \wedge \Diamond_2\Box_2{\sim}\,\alpha \to \Diamond_2(\Box_1\Diamond_2\,\alpha \wedge \Box_2{\sim}\,\alpha)$$\urcorner$

Man erhält damit eine korrekte und vollständige Axiomatik für diejenigen Erweiterungen von K_{lin}, in der die Kontinuität der Zugänglichkeitsrelation gefordert wird.[10]

B33

Ist eine Struktur in Richtung A randlos, so gibt es, wenn k darin letzter Kontext Richtung A ist, von k aus weder einen Kontext in Richtung A, an dem „~ p“ wahr wird, noch einen, an dem „p“ wahr ist. Da der Diamant den Charakter eines Existenzquantors hat, kann man dies auch so ausdrücken, dass an k „${\sim}\Diamond_1{\sim}p \wedge {\sim}\Diamond_1 p$“ wahr wird. „${\sim}\Diamond_1{\sim}p \wedge {\sim}\Diamond_1 p$“ lässt sich aber sofort zu „$\Box_1 p \wedge {\sim}\Diamond_1 p$“ und zu „${\sim}(\Box_1 p \to \Diamond_1 p)$“ umformen.

Außerdem wird man in diesem Fall sagen müssen, dass es keinen Kontext in Richtung A gibt, an dem z.B. die Nichtwiderspruchsformel „$\sim (p \wedge \sim p)$“ noch wahr wird, was bedeutet, dass an k selbst die Formel „$\sim \Diamond_1{\sim} (p \wedge \sim p)$“ wahr wird. „$\sim \Diamond_1{\sim} (p \wedge \sim p)$“ lässt sich zu „$\Box_1(p \wedge \sim p)$“ umformen und mit der üblichen Abkürzung „$\bot$“ für „$(p \wedge \sim p)$“ als „$\Box_1\bot$“ notieren: Für jeden Kontext aus W gilt, dass, *wenn* er in Richtung A von k aus zugänglich ist, an ihm ein Widerspruch wahr wird. Für Modelle hingegen, die in Richtung von A einen Rand besitzen, gilt: Wo auch immer man sich befindet - der

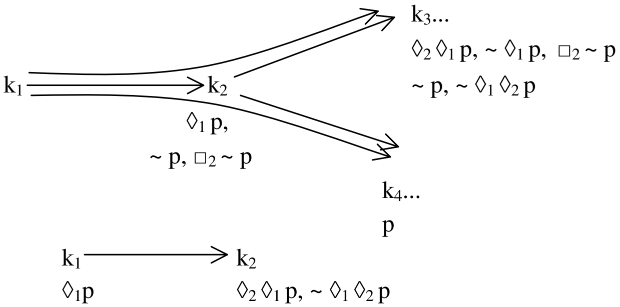
[9] Beweisansatz aus Wölfl, a.a.O., S.73f.
[10] Burgess, “Basic Tense Logic” (1984), S.109f.

eingenommene Standpunkt ist entweder bereits ein letzter Kontext in Richtung A ist oder ein solcher Kontext in Richtung A liegt vor einem. Das macht offensichtlich für jeden Kontext die Formel „$\Box_1\bot \vee \Diamond_1\Box_1\bot$“ wahr. Entsprechendes gilt auch für die Konverse von A.

B34

(1) $\Diamond_1\Diamond_2\, p \equiv \Diamond_2\Diamond_1\, p$ (2) $\Box_1\Box_2\, p \equiv \Box_2\,\Box_1\, p$.

Dass die Operatoren in diesem Fall vertauschen, lässt sich für die Diamanten besonders gut motivieren und für die Boxen danach leicht beweisen. Zunächst macht man sich leicht klar, dass sowohl ein randloses, aber verzweigtes Modell als auch ein nicht-verzweigtes Modell mit letztem Kontext die Formel (1) falsifizieren können.



Ist hingegen die Struktur unverzweigt und beidseitig randlos, so kommt man gleichsam von jedem Ausgangskontext mit einer Links/Rechts-Kombination von Zügen gerade ebenso weit wie mit einer Rechts/Links-Kombination, und man wird von jedem Kontext aus auch die Möglichkeit haben, eine solche Kombination zu spielen. Beim Beweis macht man sich zunutze, dass man in beidseitig randlosen Strukturen immer gefahrlos übers Ziel hinauszuschießen und dann wieder ein Stück zurückzufahren kann, dass nämlich (sogar unabhängig von Verzweigungen) gilt:

(3) $\Diamond_i\, p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_k\, p$.

Das lässt sich leicht zeigen wie folgt:

1	$p \rightarrow \Box_i\,\Diamond_k\, p$	(K_t)	
2	$\Box_i\,\Diamond_k\, p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_k\, p$	$(Rl\text{-}A_i)$ mit $\alpha = \Diamond_k\, p$	
3	$p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_k\, p$	1, 2, PC	
4	$\Diamond_i\, p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_i\,\Diamond_k\, p$	3, DR3 mit $\Diamond_i$	
5	$\Diamond_i\,\Diamond_i\,\Diamond_k\, p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_k\, p$	S4-$\Box_i$ mit $\alpha = \Diamond_k\, p$	
6	$\Diamond_i\, p \rightarrow \Diamond_i\,\Diamond_k\, p$	4, 5, PC	**(3)**

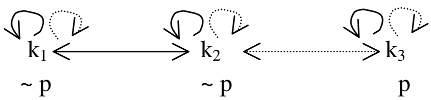
Nun kann man (1) und (2) herleiten wie folgt:

		*	1	$\Diamond_i \Diamond_k p$	Annahme	
			2	$\Diamond_i \Diamond_k p \rightarrow (\Diamond_k p \vee p \vee \Diamond_i p)$	(SK-A_i-Pr1) [für Lin-1]	
		*	3	$\boldsymbol{\Diamond_k p \vee p \vee \Diamond_i p}$	1, 2, MP	
			4	$\boldsymbol{\Diamond_k p} \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	**(3)**	
	*		5	p	Annahme	
			6	$p \rightarrow \Box_k \Diamond_i p$	(K_t)	
	*		7	$\Box_k \Diamond_i p$	5, 6, MP	
			8	$\Box_k \Diamond_i p \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	(Rl-A_k) mit $\alpha = \Diamond_i p$	
	*		9	$\Diamond_k \Diamond_i p$	7, 8, MP	
			10	$\boldsymbol{p} \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	6, 9, konditionalisiert	
			11	$\Diamond_i p \rightarrow \Box_k \Diamond_i \Diamond_i p$	(K_t) mit $\alpha = \Diamond_i p$	
			12	$\Box_k \Diamond_i \Diamond_i p \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i \Diamond_i p$	(Rl-A_k) mit $\alpha = \Diamond_i \Diamond_i p$	
			13	$\Diamond_i p \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i \Diamond_i p$	11, 12, PC	
			14	$\Diamond_i \Diamond_i p \rightarrow \Diamond_i p$	S4-$\Box_i$	
			15	$\Diamond_k \Diamond_i \Diamond_i p \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	14, DR 3 (HC)	
			16	$\boldsymbol{\Diamond_i p} \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	13, 15, PC	
			17	$(\Diamond_k p \vee p \vee \Diamond_i p) \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	4, 10, 16, PC	
		*	18	$\Diamond_k \Diamond_i p$	3, 17, PC	
			19	$\Diamond_i \Diamond_k p \rightarrow \Diamond_k \Diamond_i p$	1, 19, konditionalisiert	
*			20	$\Diamond_k \Diamond_i p$	Annahme	
...			39	$\Diamond_k \Diamond_i p \rightarrow \Diamond_i \Diamond_k p$	20, 38, kond. nach analogen Schritten	
			40	$\Diamond_i \Diamond_k p \equiv \Diamond_k \Diamond_i p$	19, 39, PC	**(1)**
			41	$\Diamond_i \Diamond_k \sim p \equiv \Diamond_k \Diamond_i \sim p$	40, Subst p / ~ p	
			42	$\sim\Box_i\sim \sim\Box_k\sim \sim p \equiv \sim\Box_k\sim \sim\Box_i\sim \sim p$	41, Def. $\Diamond_{i/k}$	
			43	$\sim \Box_i \Box_k p \equiv \sim \Box_k \Box_i p$	41, PC (PDN)	
			44	$\Box_k \Box_i p \equiv \Box_i \Box_k p$	43, PC (doppelte Kp.)	**(2)**

Begründungen zu Teil I, Kapitel 2

B1

Zur Begründung betrachte man das folgende Fusions-Modell:



Ist R_1 normal und R_2 mit durchbrochener Linie dargestellt, so gilt $V(\Diamond_1\Diamond_2 p, k_1)=1$ wegen $V(p,k_3)=1$. Es gilt aber $V(\Diamond_2\Diamond_1 p, k_1)=0$. Denn nur k_1 selbst ist von k_1 aus per R_2 zugänglich, von k_1 aus sind nur k_1 selbst und k_2 per R_1 erreichbar, es gilt aber $V(p, k_1)=0$ und $V(p,k_2)=0$. Damit ist (com-1) für k_1 falsch, und für ein entsprechendes Modell mit vertauschtem R_1 und R_2 wird entsprechend (com-1) für k_1 falsch. Schließlich ist $V(\Diamond_2\Box_1 p, k_2)=1$, denn k_3 ist von k_2 aus per R_2 erreichbar, von k_2 aus ist per R_1 allein k_2 erreichbar, und es gilt ja $V(p,k_3)=1$. Doch wir haben auch $V(\Box_1\Diamond_2 p, k_2)=0$. Denn von k_2 aus ist k_1 per R_1 erreichbar, von k_1 aus allein k_1 selbst per R_2, und es gilt $V(p,k_1)=0$.

B2

Dass das so ist, sieht man, wenn man bedenkt, dass ein Feld nur in derselben Querreihe *neben* einem anderen liegen kann und nur in derselben Längsreihe *über* oder *unter* einem anderen liegen kann. In der Beziehung R^*_1 können also nur Felder mit derselben horizontalen, in der Beziehung R^*_2 können nur Felder mit derselben vertikalen Koordinate stehen.

B3

Ganz allgemein hat jede zweidimensionale Produkt-Struktur die folgenden (com-1), (com-2) und (chr) entsprechenden semantischen Eigenschaften (wobei mit „x“, „y“ etc. geordnete Paare von Kontexten bezeichnet sind):[11]
$\forall$ x y z [x R^*_2 y & y R^*_1 z $\Rightarrow$ $\exists$u [x R^*_1 u & u R^*_2 z]]Links-Kommutativität (com-2)
$\forall$ x y z [x R^*_1 y & y R^*_2 z $\Rightarrow$ $\exists$u [x R^*_2 u & u R^*_1 z]]Rechts-Kommutativität (com-1)
$\forall$ x y z [x R^*_2 y & x R^*_1 z $\Rightarrow$ $\exists$u [y R^*_1 u & z R^*_2 u]]Church/Rosser-Eigenschaft (chr).
Entsprechendes gilt offensichtlich auch für höher-dimensionale Produkte und zwei beliebige verschiedene Zugänglichkeitsrelation daraus.

B4

1	$\Diamond_i\Box_k p \rightarrow \Box_k\Diamond_i p$	(chr)
2	$\Diamond_i\Box_k\sim p \rightarrow \Box_k\Diamond_i\sim p$	1, Subst
3	$\sim\Box_k\Diamond_i\sim p \rightarrow \sim\Diamond_i\Box_k\sim p$	2, PC (Kontrapos.)
4	$\sim\sim\Diamond_k\sim\sim\Box_i\, p \rightarrow \Box_i\sim\sim\Diamond_k p$	3, mit K
5	$\Diamond_k\Box_i\, p \rightarrow \Box_i\,\Diamond_k p$	4, PC

B5

Vgl. zu Kap. I 1, B34, Zeilen 40-44.

B6

„$\Box_2\Diamond_1 p \rightarrow \Diamond_1\Box_2 p$“ bedeutet ja auf das Schachbrett bezogen, mit „p“ als „Hier steht eine Figur“ und mit d1 als Bewertungsfeld: „Wenn es zu jedem Feld auf der d-(Längs-)Reihe ein in derselben Querreihe liegendes Feld gibt, auf dem eine Figur steht, dann gibt es ein in derselben Querreihe wie d1, also auf der 1-(Längs-)reihe ein Feld, so dass auf jedem Feld der Längsreihe dieses Feldes eine Figur steht.“ Die durch das Antezedens beschriebene Situation tritt auf, wenn nur jede Querreihe überhaupt eine Figur enthält. Das kommt gegen Ende der Eröffnung ohne weiteres vor. Doch damit die im Sukzedens beschriebene Situation eintritt, müssten acht Figuren *auf derselben Längsreihe* hintereinander stehen. Ich vermute, dass es keine triviale Aufgabe ist, eine realistische Partie zu entwerfen, in der das überhaupt passiert.

B7

1	$\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Box_1\,\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p$	(S5-$\Box_1$) $\alpha = \Diamond_2\Diamond_1\, p$
2	$\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_2\, p$	(com)
3	$\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Diamond_1\Diamond_1\Diamond_2\, p$	2, DR3
4	$\Box_1\,\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Box_1\,\Diamond_1\Diamond_1\Diamond_2\, p$	3, DR 1
5	$\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Box_1\,\Diamond_1\Diamond_1\Diamond_2\, p$	1, 4, PC (Kettenschluss)
6	$\Diamond_1\Diamond_2\Diamond_1\, p \rightarrow \Box_1\,\Diamond_1\Diamond_2\, p$	5, S4-Reduktion **(rom)**

B8

Begründung: Das Definiens von (iii) ist gerade dann wahr, wenn für *alle* $\langle k'', k''' \rangle$ aus $W_1 \times W_2$ gilt: wenn $\langle k, k' \rangle\ R^*_1\ \langle k'', k''' \rangle$, dann $V(\alpha, \langle k'', k''' \rangle)=1$. $\langle k, k' \rangle\ R^*_1\ \langle k'', k''' \rangle$ lässt sich mit der Definition von R^*_1 ausformulieren als k R_1 k“ & k’ = k“’. Dass $\langle k'', k''' \rangle$ Element von $W_1 \times W_2$ ist und die Beziehung kR_1k'' sowie die Identität k' = k''' besteht, ist gleichbedeutend damit, daß $\langle k'', k' \rangle$ Element von $W_1 \times W_2$ ist und die Beziehung kR_1k'' besteht.

B9

Zunächst zur Definition der S^n-artigen Partitionsstruktur. Dazu sind zuerst der Begriff der $S5_i$-Achse und der $S5^n$-artigen Partitionierung[12] zu definieren:

[11] Vgl. MDML, S.222.
[12] nicht: Partition. Eine Partition ist schon jede Menge der Äquivalenzklassen zu einer der Relationen.

Sei W eine nichtleere Menge [von Kontexten], und sei R_i eine Äquivalenzrelation auf W.
a ist eine **$S5_i$-Achse** bezüglich W und R_i gdw
(#1) a ist eine nichtleere Teilmenge von W
(#2) für alle k, k' aus W gilt: wenn $k \in a$ und $k' \in a$, dann $k\ R_i\ k'$ (Zugänglichkeit über R_i)
(#3) es gibt *kein* a', so dass a' nichtleere Teilmenge von W ist und für alle k, k' aus W gilt:
wenn $k \in a$ und $k' \in a'$, dann $k\ R_i\ k'$ und a ist echte Teilmenge von a' (Maximalität).

Sei W eine nichtleere Menge [von Kontexten].
$\langle R_1, ..., R_n\rangle$ ist eine **$S5^n$-artige Partitionierung** bezüglich W gdw
(1) R_1 bis R_n sind Äquivalenzrelationen auf W;
(2) die Vereinigung aller Felder der Relationen R_1 bis R_n ist W selbst;[13]
(3) für alle a, ..., a_n gilt: wenn a eine $S5_1$-Achse bezüglich W und R_1 ist, ... und wenn a_n eine $S5_n$-Achse bezüglich W und R_n ist, dann gibt es genau ein $k \in W$, so dass gilt:
$\{k\} = a \cap ... \cap a_n$.[14]

Eine **$S5^n$-artige Partitionsstruktur** ist ein geordnetes Paar $\langle W, \langle R_1, ..., R_n\rangle\rangle$, so dass gilt:
(1) W ist eine nichtleere Menge [von Kontexten]
(2) $\langle R_1, ..., R_n\rangle$ ist eine $S5^n$-artige Partitionierung bezüglich W.

Ein allgemeiner Begriff des reduktiven $S5^n$–artigen Modells, bei dem Formeln nur in Bezug auf „Felder" bewertet werden, lässt sich nun so definieren:[15]

Ein **reduktives $S5^n$-artiges Partitionsmodell** ist ein Tripel $\langle W, \langle R_1, ..., R_n\rangle, V\rangle$,
so dass gilt:
1. $\langle W, \langle R_1, ..., R_n\rangle\rangle$ ist eine $S5^n$-artige Partitionsstruktur
2. V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes k aus W genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei die Werte für die atomaren Formeln beliebig sind, aber ansonsten gilt (mit i aus {1, .., n}):
(i) $V(\sim\alpha, k)=1$ gdw $V(\alpha, k)=0$
(ii) $V(\alpha \to \beta, k)=1$ gdw $V(\alpha, k)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta, k)=1$
(iii) $V(\Box_i\alpha, k)=1$ gdw für alle k' aus W gilt: wenn $k R_i k'$, dann $V(\alpha, k')=1$.

B10

Um den Begriff des hybriden $S5^2$-artigen Partitionsmodells zu klären, seien zunächst die Abkürzungen „K1" und K2" relativ auf ein gegebenes Modell M eingeführt: K1 soll die Klasse aller $S5_1$-Achsen, K2 die Klasse aller $S5_2$-Achsen des Modells sein. Es lässt sich nun definieren:

Ein **hybrides $S5^2$-artiges Partitionsmodell** ist ein Quadrupel $\langle W, \langle R_1, R_2\rangle, I, V\rangle$,
so dass gilt:
1. $\langle W, \langle R_1, R_2\rangle\rangle$ ist eine $S5^2$-artige Partitionsstruktur
2. I ist eine Bewertungsfunktion, die jeder *atomaren* Formel für jedes k aus W genau einen Wert aus {1,0} zuweist;
3. V ist eine Interpretationsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Paar $\langle a, a'\rangle$ aus $K_1 \times K_2$, genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei gilt:
(0) $V(\alpha,\langle a, a'\rangle)=1$ gdw α eine atomare Formel ist, $\{k\} = a \cap a'$ und $I(\alpha, k)=1$
(i) $V(\sim\alpha,\langle a, a'\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle a, a'\rangle)=0$
(ii) $V(\alpha \to \beta,\langle a, a'\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle a, a'\rangle)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,\langle a, a'\rangle)=1$

[13] Das Feld einer Relation ist die Menge aller durch sie verbundenen Relate.
[14] Auf Klammern kann wegen der Assoziativität von „geschnitten mit" verzichtet werden.
[15] Der Begriff der Allgemeingültigkeit ist in diesem Fall wieder wie für *mono*modale Logiken zu fassen.

(iii) $V(\Box_i, \langle a, a'\rangle)=1$ gdw für jedes k, k‘ aus W, a“ aus K1, a“‘ aus K2 gilt:
Wenn $\{k\} = a \cap a'$, $\{k'\} = a'' \cap a'''$ und $k\ R_i\ k'$, dann $V(\alpha, \langle a'', a'''\rangle) = 1$.

Eine Partitionsstruktur mit mehr als einer Längs- und Querachse weist eine interessante Eigenschaft auf: Es handelt sich dabei bezüglich R_1 bzw. R_2 um eine *verinselte* S5-Struktur, denn Felder *verschiedener* Längs- bzw. Querreihen sind nicht durch die Relation „liegt neben oder ist identisch mit“ bzw. „liegt über, unter oder ist identisch mit“ geordnet. Die Verinselung von modallogischen Strukturen, die bisher eher den Eindruck eines definitorischen Betriebsunfalls gemacht haben mag, hat also durchaus eine sinnvolle Anwendung.

B11

$S5^*_1$ (S5 mit *universeller* Zugänglichkeitsrelation) wird durch die S5-Axiomatik für „$\Box_1$“ korrekt und vollständig axiomatisiert, $S5^*_2$ durch die S5-Axiomatik für „$\Box_2$“, damit nach Gabbay und Shehtmann auch deren Produkt. Für jede $S5_1 \times S5_2$-artige Partitionsstruktur gibt es offensichtlich eine entsprechende $S5^*_1 \times S5^*_2$-Produktstruktur, wobei $W_1 = K_1$ und $W_2 = K_2$ bzw. $W_1 \times W_2 = K_1 \times K_2$ ist und wobei es zu jedem k aus W der Partitionsstruktur genau ein entsprechendes Element aus $W_1 \times W_2$ der Produktstruktur gibt. Außerdem gibt es zu jeder $S5^*_1 \times S5^*_2$-Produktstruktur in derselben Weise eine entsprechende Partitionsstruktur. Weil sich ferner die Wahrheitsbedingungen genau entsprechen, ist offensichtlich, dass auf beiden Sorten von Strukturen bezüglich jeder der vorgestellten Semantik-Varianten genau dieselben Formeln allgemeingültig werden.

B12

Ein K_{lin}^n -Produktmodell lässt sich allgemein definieren als Tupel $\langle W_1, R_1, ..., W_n, R_n, V\rangle$, für das gilt:

(1) W_1 bis W_n sind nichtleere Mengen von Kontexten
(2) R_1 bis R_n sind asymmetrische, transitive und stark lineare Relationen auf W_1 bis W_n
(3) V ist eine Bewertungsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Tupel $\langle k_1, ..., k_n\rangle$ aus $W_1 \times ... \times W_n$ genau einen Wert aus $\{1,0\}$ zuweist, wobei die Werte für die atomaren Formeln beliebig sind, aber ansonsten gilt:
(i) $V(\sim\alpha,\langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle k_1, ..., k_n\rangle)=0$
(ii) $V(\alpha \rightarrow \beta,\langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$ gdw $V(\alpha,\langle k, k'\rangle)=0$ oder$^{\&}$ $V(\beta,\langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$
(iiia*) $V(\Box_i\alpha, \langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$ gdw für alle $\langle k'_1, ..., k'_n\rangle$ aus $W_1 \times ... \times W_n$ gilt:
wenn $k_i\ R_i\ k_i'$, dann $V(\alpha,\langle k'_1, ..., k'_n\rangle)=1$
(iiib*) $V(\boxdot_i\alpha, \langle k_1, ..., k_n\rangle)=1$ gdw für alle $\langle k'_1, ..., k'_n\rangle$ aus $W_1 \times ... \times W_n$ gilt:
wenn $k'_i\ R_i\ k_i$, dann $V(\alpha,\langle k'_1, ..., k'_n\rangle)=1$

B13

Korrektheit. Da es auch im Falle von K_{lin}^2 zu jedem Produktmodell ein Partititionsmodell gibt und umgekehrt, ist die Axiomatik für Partitionsmodelle korrekt, wenn sie es für Produktmodelle ist. Sie ist für Produktmodelle korrekt, da gilt:
1. Die verdoppelte K_{lin}-Axiomatik ist bereits korrekt.
Begründung: Die verdoppelte K_{lin}-Axiomatik ist identisch mit einer korrekten und vollständigen Axiomatik für die Fusion von K_{lin1} und K_{lin2}. Das Resultat in MDML, dass die bloße Kombination von korrekten und vollständigen Axiomatiken zweier normaler Modallogiken deren Fusion ebenfalls korrekt und vollständig axiomatisiert, gilt ausdrücklich für Modallogiken mit *beliebig vielen* Zugänglichkeitsrelationen und entsprechend vielen basalen Operatoren, somit auch für die Fusion von K_{lin1} und K_{lin2}.[16] Alle mit der Fusions-Axiomatik herleitbaren Formeln sind aber auch Produkt-allgemeingültig, diese ist also auch bezüglich des Produktes korrekt.[17]
2. Alle (com) und (chr)-Axiome für voneinander verschiedene Längs- und Quer-Operatoren sind K_{lin}^2 –allgemeingültig.

---

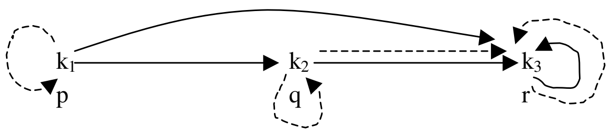
[16] Vgl. MDML, Kap. 3.1, S.112.
[17] Vgl. MDML, Proposition 3.8, 3.9, S.128.

Begründung: Die Argumentation für die Produkt-Allgemeingültigkeit der (com) und (chr)-Axiome in B3 war unabhängig von einer besonderen Eigenschaft der Zugänglichkeitsrelationen. Die Konverse einer $K_{lin1} \times K_{lin2}$ –Zugänglichkeitsrelation hat grundsätzlich dieselben Eigenschaften wie die Grundrelation (vgl. Kap. I 2.2.3).
3. Da die Herleitungsregeln Allgemeingültigkeit bewahren und alle Axiome allgemeingültig sind (vgl. 1. und 2.), ist die Korrektheit gewährleistet.

B14

Vollständigkeitresultat nicht einschlägig, sondern Vollständigkeit sogar ausgeschlossen.
Das Vollständigkeitsresultat von Gabbay und Shehtmann ist ausdrücklich nur für Produkte je zweier *mono*modaler Logiken (unimodal logics) formuliert.[18] K_{lin} ist aber eine *bi*modale Logik (und entsprechend die reinen Notationsvarianten K_{lin1} und K_{lin2}). Das Vollständigkeitsresultat von Gabbay und Shehtmann ist also für K_{lin}^2 nicht einschlägig.
Aus einem Beweis in MDML folgt mit einer kleinen Zusatzüberlegung, dass K_{lin}^2 durch eine Verdopplung der K_{lin}-Axiomatik mit (com)- und (chr)-Gesetzen *nicht* vollständig axiomatisiert wird: Theorem 5.15 in MDML[19] besagt, dass K4.3 x K4.3 *nicht* vollständig durch eine Verdopplung der K4.3-Axiomatik mit (com)- und (chr)-Gesetzen axiomatisiert wird. K4.3 ist K_{lin} ohne „H" bzw. ohne „G". Denn K4.3 hat gerade die „strict linear orders" als Modellklasse.[20] Dabei ist eine „strict linear order" eine „strict partial order", für die zusätzlich gilt, dass zwei verschiedene Kontexte über die Zugänglichkeitsrelation verbunden sind, also für beliebige k, k' aus W gilt: k R k' v k = k' v k' R k.[21] Eine „strict partial order" entsteht genau durch eine irreflexive und transitive Zugänglichkeitsrelation.[22] K4.3 wird korrekt und vollständig axiomatisiert durch (PC), (K-□), (T-□) und (K4.3-□) $\ulcorner\Box(\Box\alpha \wedge \alpha \rightarrow \beta) \vee (\Box\beta \wedge \beta \rightarrow \alpha)\urcorner$.[23] (K4.3-□) ist ein minimal von (S4.3-□) verschiedenes Axiom mit gleicher Wirkung.

Der Grundgedanke des Beweises in MDML, S.232f, ist der folgende: Das Beweisziel ist erreicht, wenn man eine Formel ϕ findet, die K4.3-kontradiktorisch ist (also in keinem K4.3-Modell je wahr werden kann), die aber von einem Kontext eines Modelles $\mathcal{F}$ verifiziert wird, das außerdem (mit i aus {1,2}) sowohl (PC), (K-$\Box_i$), (T-$\Box_i$), (K4.3-$\Box_i$) als auch die (com)- und (chr)-Gesetze verifiziert. Denn wäre die vorgeschlagene Axiomatik vollständig, so müsste $\ulcorner\sim\phi\urcorner$ mit ihr herleitbar sein. Dann müsste es aber einen Widerspruch ergeben, dass ϕ zusammen mit allen Axiomen wahr sein soll. Das Modell $\mathcal{F}$ (natürlich *kein* K4.3-Modell!) zeigt aber, dass ϕ zusammen mit allen Axiomen wahr sein kann. Also ist die vorgeschlagene Axiomatik nicht vollständig.
Das Problem ist, das richtige ϕ zu finden. Der entscheidende Kniff ist, praktisch ein *komplettes* Modell in eine Formel zu übersetzen. Das Modell $\mathcal{F}$ sieht so aus:



Dabei ist R_1 normal und R_2 gestrichelt dargestellt.

Um das Modell, von k_1 aus betrachtet, praktisch komplett in eine Formel zu übersetzen, bietet es sich an, die folgende Abkürzung zu definieren: $\ulcorner\Box^+\alpha\urcorner$ kürzt $\ulcorner\alpha \wedge \Box_1 \alpha \wedge \Box_2 \alpha \wedge \Box_1\Box_2 \alpha\urcorner$ ab. $\ulcorner\Box^+\alpha\urcorner$

[18] MDML, Proposition 5.7, S.229.
[19] MDML, S.232f
[20] MDML, S.26.
[21] Ebd.
[22] MDML, S.12.
[23] Vgl. MDML, S.11 für „korrekt und vollständig", S.12 für die Axiome, und S.26 Theorem 1.12 (i) für das Ergebnis)

heißt damit soviel wie: „Wohin man sich im Modell auch immer hinbegibt, man bekommt dort α“. Die Formel ϕ, die praktisch das ganze Modell übersetzt, lautet nun:

$$\begin{aligned} p \wedge \Box^{+} (& ((p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)) \wedge \ldots \\ & (p \rightarrow \Diamond_1 q) \wedge \mathbf{(q \rightarrow \Diamond_1 r)} \wedge (p \rightarrow \Diamond_1 r) \wedge \ldots \\ & (q \rightarrow \sim\Diamond_1 p) \wedge (r \rightarrow \sim\Diamond_1 q) \wedge (r \rightarrow \sim\Diamond_1 p) \wedge \ldots \\ & \mathbf{(q \rightarrow \Diamond_2 r)} \wedge \ldots \\ & (p \rightarrow \sim\Diamond_2 q) \wedge (p \rightarrow \sim\Diamond_2 r) \wedge (r \rightarrow \sim\Diamond_2 q) \wedge (q \rightarrow \sim\Diamond_2 p) \wedge (r \rightarrow \sim\Diamond_2 p) \;) \end{aligned}$$

In der ersten Zeile wird festgestellt, dass an jedem Kontext entweder „p“, „q“ oder „r“ wahr ist, aber alle drei miteinander inkompatibel sind. Die erste Formel der zweiten Zeile besagt, dass man, wenn man an einem „p“-Kontext ist, über R_1 einen „q“-Kontext erreicht etc. Dass man so *praktisch* das ganze Modell übersetzt, heißt:[24] Einige Informationen mehr darüber hätten sich in der Formel noch unterbringen lassen, z.B. in der zweiten Zeile „$(p \rightarrow \Diamond_2 p)$“. Doch da die Formel nicht *trivialerweise* auf den per def. irreflexiven K4.3-Modellen falsifiziert werden soll, sondern aus einem besonderen Grund, ist es angebracht, über die Selbstzugänglichkeit von Kontexten bei der Übersetzung des Modells in die Formel zu schweigen.

Das Modell $\mathcal{F}$ erfüllt offensichtlich (PC), (K-$\Box_i$), (T-$\Box_i$), (K4.3-$\Box_i$): Sowohl R_1 als auch R_2 sind transitiv ((T-$\Box_i$)) und linear ((K4.3-$\Box_i$)). Erfüllt $\mathcal{F}$ auch die (com)- und (chr)-Gesetze? Ja. Denn $\mathcal{F}$ weist die Eigenschaften der „left-hand commutativity“, der „right-hand commutativity“ und die „Church/Rosser-property“[25] auf. Als Beispiel genügt der Nachweis der „left-hand commutativity“:

$k_2\, R_2\, k_3 \;\&\; k_3\, R_1\, k_3 \Rightarrow k_1\, R_1\, k_2 \;\&\; k_2\, R_2\, k_3$ $\quad$ $k_2\, R_2\, k_2 \;\&\; k_2\, R_1\, k_3 \Rightarrow k_2\, R_1\, k_3 \;\&\; k_3\, R_2\, k_3$

$k_1\, R_2\, k_1 \;\&\; k_1\, R_1\, k_2 \Rightarrow k_1\, R_1\, k_2 \;\&\; k_2\, R_2\, k_2$ $\quad$ $k_3\, R_2\, k_3 \;\&\; k_3\, R_1\, k_3 \Rightarrow k_3\, R_1\, k_3 \;\&\; k_3\, R_2\, k_3$

$k_1\, R_2\, k_1 \;\&\; k_1\, R_1\, k_3 \Rightarrow k_1\, R_1\, k_2 \;\&\; k_2\, R_2\, k_3$.

Damit ist bewiesen, dass $\ulcorner\sim\phi\urcorner$ nicht mit der vorgeschlagenen Axiomatik herleitbar ist.

Auffällig an $\mathcal{F}$ im Vergleich zu den typischen „product frames“ von K4.3 x K4.3 ist, dass k_2 und k_3 sowohl durch R_1 als auch durch R_2 verbunden sind. Dies kommt in den fettgedruckten Teilen der Formel ϕ zum Ausdruck. Das heißt aber auch, dass das Verhalten von R_1 und R_2, das ϕ kodiert, verhindert, dass R_1 und R_2 als die horizontale und die vertikale Zugänglichkeitsrelation einer Produktstruktur interpretiert werden können.[26] Schließlich sind zwei Kontexte entweder vertikal oder horizontal zugänglich, aber nicht beides, wenn die Rede von „horizontal“ und „vertikal“ irgendeinen anschaulichen Sinn haben soll.[27] Damit ist bewiesen, dass $\ulcorner\sim\phi\urcorner$ K4.3 x K4.3-allgemeingültig ist.

Die Übertragung auf K_{lin}^2 ist unproblematisch: Die Darstellung von $\mathcal{F}$ kann auch als Darstellung eines Modells mit vier Zugänglichkeitsrelationen verstanden werden, nämlich R_1 und R_2 sowie deren Konversen. Ein solches Modell erfüllt offensichtlich die verdoppelte K_{lin}-Axiomatik mit (com)- und (chr)-Gesetzen. Also ist gezeigt, dass $\ulcorner\sim\phi\urcorner$ auch mit dieser Axiomatik nicht herleitbar ist. Auch in K_{lin}^2-Produktstrukturen sind zwei Kontexte entweder vertikal oder horizontal zugänglich, aber nicht beides. Also ist $\ulcorner\sim\phi\urcorner$ (wie alle K4.3 x K4.3-allgemeingültigen Formeln) K_{lin}^2-allgemeingültig.

B15

Die Argumente für die Korrektheit der entsprechenden Axiomatiken für $S5^2$ und K_{lin}^2 in Kap. II 1.1 und in B17 zu II 1 lassen sich ohne Schwierigkeit für $S5^3$ und K_{lin}^3 adaptieren.

B16

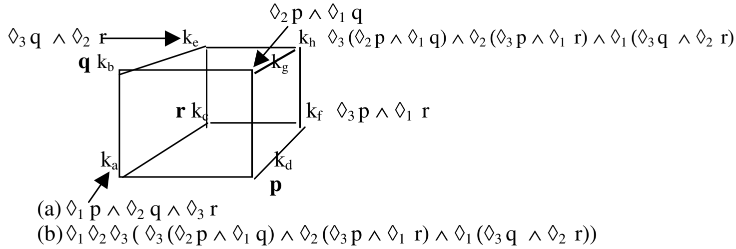
Was es mit diesem zunächst unübersichtlichen Schema auf sich hat, sieht man am besten am folgenden Ausschnitt eines $S5^3$-Modells (mit R_1=quer, R_2=vertikal, R_3=längs):

[24] Das „$p \neq p$‘“ in der entsprechenden Formel unter der großen Alternation in MDML, S.232, ist also auf die *ganze* Formel zu beziehen.

[25] MDML, S.222, vgl. oben B3.

[26] Abstrakter, terminologisch etwas voraussetzungsreiche Beweis: MDML S.233.

[27] Dieser Punkt wird in MDML etwas durch die sonst mnemotechnisch hilfreiche Notation von R_1 und R_2 als R_h und als R_v verdeckt.



Da $S5^3$-Modelle als Produkt-Modelle fransenlos sind, kann es nicht geschehen, dass k_a, k_b, k_c und k_d so angeordnet sind wie dargestellt, ohne dass auch k_e, k_f, k_g und k_h existieren: $S5^3$-Modelle sind kubistisch, d.h. sie besitzen die „cubifying property".[28] Deshalb muss, wenn für k_a (a) wahr ist, auch (b) wahr sein, was sich auf beliebige k verallgemeinern lässt. Die Formel

(cub) $(\Diamond_1 p \wedge \Diamond_2 q \wedge \Diamond_3 r) \rightarrow (\Diamond_1 \Diamond_2 \Diamond_3 (\Diamond_3(\Diamond_2 p \wedge \Diamond_1 q) \wedge \Diamond_2(\Diamond_3 p \wedge \Diamond_1 r) \wedge \Diamond_1(\Diamond_3 q \wedge \Diamond_2 r)))$

ist also $S5^3$-allgemeingültig. Diese Formel ist aber nicht mit der angegebenen Axiomatik herleitbar. Denn wäre sie herleitbar, so dürfte kein Modell, für das alle Axiome der Axiomatik verifiziert werden, diese Formel für einen Kontext falsifizieren. Es gibt aber ein – *sehr* kompliziertes – Modell, bei dem es sich so verhält.[29] Dies ist natürlich kein $S5^3$-Modell, da ja die fragliche Formel $S5^3$-allgemeingültig ist. Doch die Axiomatik ist auch für die einem solchen Modell zu Grunde liegende Art von Struktur korrekt, leitet also auch für sie nur allgemeingültige Formeln her. Also kann die Formel nicht mit ihrer Hilfe herleitbar sein.

B17

Hierfür lässt sich zweierlei anführen:
1. Ist schon K_{lin}^2 nicht vollständig durch eine verdoppelte K_{lin}-Axiomatik mit (com)- und (chr)-Gesetzen axiomatisiert (B 14 zu Kap. II 1), so K_{lin}^3 erst recht nicht durch eine Verdreifachung. Denn nicht einmal alles, was über eine einer K_{lin}^2-Struktur entsprechenden Ebene daraus zu sagen wäre, lässt sich ja dann damit herleiten.
2. Die Überlegungen zur cubifying property lassen sich so weit verallgemeinern, dass sich damit selbst K^3 als durch eine verdreifachte K-Axiomatik mit (com)- und (chr)-Gesetzen nicht vollständig axiomatisiert erweist.[30]

B18

Der folgende Beweis ist etwas langwieriger. Er zeigt aber die Leistungsfähigkeit der fragmentarischen Axiomatik für K_{lin}^4. Das ist auch deshalb interessant, weil diese eben nicht vollständig ist. Seine philosophische Bedeutung liegt darin, dass damit K_{lin}xS5 als Grobeinstellung von K_{lin}^4 nachgewiesen werden kann.

I) Zunächst sei $\ulcorner \boxminus^{SvW}_i \alpha \urcorner$ definiert als Abkürzung für $\ulcorner \Box_i\alpha \wedge \boxdot_i\alpha \urcorner$. „SvW" steht dabei für „Segerberg / von Wright". Der Grund ist: Sind „$\Box_1$" und „$\boxdot_2$" K_{lin}-Operatoren, so heißt „$\Box_1 p \wedge \boxdot_2 p$" offenbar soviel wie „überall *sonst* auf derselben K_{lin}-Achse. Segerberg und von Wright haben in „‘Somewhere else‘ and ‚some other time‘", „A Note on the Logic of ‚Elsewhere‘" und in „A modal logic of place"

[28] Diese lässt sich formal folgendermaßen ausdrücken (vgl. MDML, S.379):
$\forall xyzv[xR_iv \ \& \ xR_jy \ \& \ xR_kz \Rightarrow$
$\exists$ abcd $(vR_jc \ \& \ vR_kb \ \& \ yR_ic \ \& \ yR_ka \ \& \ zR_ib \ \& \ zR_ja \ \& \ aR_id \ \& \ bR_jd \ \& \ cR_kd)]$.
[29] MDML, S.380, mit Berufung auf Henkin et al., „Cylindric Algebras" II, § 3.2.6.7.
[30] Vgl. MDML, S.396f (Kap. 8.4.).

gezeigt, dass ein „überall-sonst"-Operator *vollständig* durch eine Axiomatik charakterisiert wird, die außer der Übernahme von PC die folgenden Regeln enthält:

1. Ist α herleitbar, so auch $\boxminus^{SvW}\alpha$.			(NEC)
2. (a)	(K-$\boxminus^{SvW}$)	$\ulcorner \boxminus^{SvW} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boxminus^{SvW} \alpha \rightarrow \boxminus^{SvW} \beta)\urcorner$ ist K_{lin}-herleitbar.	(Box-Verteiler)
(b)	(B-$\boxminus^{SvW}$)	$\ulcorner \sim \boxminus^{SvW} \sim \boxminus^{SvW} \alpha \rightarrow \alpha)\urcorner$ ist K_{lin}-herleitbar.	(Brouwer-Axiom)
(c)	(SvW-$\boxminus^{SvW}$)	$\ulcorner \alpha \rightarrow (\boxminus^{SvW} \alpha \rightarrow \boxminus^{SvW} \boxminus^{SvW} \alpha)\urcorner$ ist K_{lin}-herleitbar.	(typisches SvW-Axiom)

Also sollten sich diese Gesetze für einen *definierten* „überall-sonst"-Operator auf K_{lin}-Basis herleiten lassen. Die Vollständigkeit der K_{lin}-Axiomatik für K_{lin}-Modelle macht die konkrete Herleitung für K_{lin} zwar verzichtbar. Hier interessieren aber K_{lin}-Operatoren für $K_{lin}{}^3$, und die dafür angegebene Axiomatik ist unvollständig, so dass konkrete Herleitungen angebracht sind:

(ad 1) Aus den beiden NEC-Regeln für „$\Box_i$" und „$\boxdot_i$" ergibt sich ohne weiteres eine NEC-Regel für „$\boxminus^{SvW}$".

(ad 2) Die Beweise für Box-Verteiler und Brouwer-Axiom sind unkompliziert.

(a)				
*		1	$\boxminus^{SvW} (p \rightarrow q)$	Annahme
*		2	$\boxminus^{SvW} p$	Annahme
	*	3	$\Box_i (p \rightarrow q)$	1, Def. $\boxminus^{SvW}$
	*	4	$\boxdot_i (p \rightarrow q)$	1, Def. $\boxminus^{SvW}$
	*	5	$\Box_i p \rightarrow \Box_i q$	3, K-$\Box_i$
	*	6	$\boxdot_i p \rightarrow \boxdot_i q$	4, K-$\Box_2$
	*	7	$\Box_i p \wedge \boxdot_i p$	2, Def. $\boxminus^{SvW}$
*		8	$\Box_i p$	7, PC
*		9	$\boxdot_i p$	7, PC
*	*	10	$\Box_i q$	5, 8, MP
*	*	11	$\boxdot_i q$	6, 9, MP
*	*	12	$\Box_i q \wedge \boxdot_i q$	10, 11, PC
*	*	13	$\boxminus^{SvW} q$	12, Def. $\boxminus^{SvW}$
	*	14	$\boxminus^{SvW} p \rightarrow \boxminus^{SvW} q$	2, 13, kond.
		15	$\boxminus^{SvW} (p \rightarrow q) \rightarrow (\boxminus^{SvW} p \rightarrow \boxminus^{SvW} q)$	1, 14, kond.

(b)					
		*	1	$\sim \boxminus^{SvW} \sim \boxminus^{SvW} p$	Annahme
		*	2	$\sim \Box_i \sim \boxminus^{SvW} p \wedge \sim \boxdot_i \sim \boxminus^{SvW} p$	1, Def. $\boxminus^{SvW}$
		*	3	$\Diamond_i \boxminus^{SvW} p \vee \Diamonddot_i \boxminus^{SvW} p$	2, Def. $\Diamond_i$
	*		4	$\Diamond_i \boxminus^{SvW} p$	Annahme
	*		5	$\Diamond_i (\Box_i p \wedge \boxdot_i p)$	4,Def.$\boxminus^{SvW}$
	*		6	$\Diamond_i \Box_i p \wedge \Diamond_i \boxdot_i p$	5, mit K
			7	$\Diamond_i \Box_i p \wedge \Diamond_i \boxdot_i p \rightarrow p$	mit (K_t-1)
	*		8	p	6, 7, MP
			9	$\Diamond_i \boxminus^{SvW} p \rightarrow p$	4, 8, kond.
*			10	$\Diamonddot_i \boxminus^{SvW} p$	Annahme
				...	analog
*			15	p	10, 14, kond.
		*	16	p	3, 9, 15, E$\vee$
			17	$\sim \boxminus^{SvW} \sim \boxminus^{SvW} p \rightarrow p$	1, 16, kond.

Beim Beweis für das typische SvW-Axiom kommen verständlicherweise Linearitätsaxiome zum Einsatz.

(c)			
*	1	$p \wedge \boxminus^{SvW} p$	Annahme
*	2	$\Box_i p \wedge p \wedge \boxdot_i p$	1, Def. $\boxminus^{SvW}$
	3	$\Diamond_i \Diamonddot_i \sim p \rightarrow (\Diamond_i \sim p \vee \sim p \vee \Diamonddot_i \sim p)$	**(SK-A_2-Pr1)** mit $\alpha = \sim p$
	4	$\Diamonddot_i \Diamond_i \sim p \rightarrow (\Diamond_i \sim p \vee \sim p \vee \Diamonddot_i \sim p)$	**(SK-A_1-Pr1)** mit $\alpha = \sim p$
	5	$\sim (\Diamond_i \sim p \vee \sim p \vee \Diamonddot_i \sim p) \rightarrow \sim \Diamond_i \Diamonddot_i \sim p$	3, PC (Kontrapos.)
	6	$\sim (\Diamond_i \sim p \vee \sim p \vee \Diamonddot_i \sim p) \rightarrow \sim \Diamonddot_i \Diamond_i \sim p$	4, PC (Kontrapos.)
	7	$(\sim \Diamond_i \sim p \wedge \sim\sim p \wedge \sim \Diamonddot_i \sim p) \rightarrow \sim \Diamond_i \sim\sim \Diamonddot_i \sim p$	5, PC
	8	$(\sim \Diamond_i \sim p \wedge \sim\sim p \wedge \sim \Diamonddot_i \sim p) \rightarrow \sim \Diamonddot_i \sim\sim \Diamond_i \sim p$	6, PC
	9	$(\Box_i p \wedge p \wedge \boxdot_i p) \rightarrow \boxdot_i \Box_i p$	7, Def. $\Diamond_i$, Def. $\Diamonddot_i$
	10	$(\Box_i p \wedge p \wedge \boxdot_i p) \rightarrow \Box_i \boxdot_i p$	8, Def. $\Diamond_i$, Def. $\Diamonddot_i$
*	11	$\boxdot_i \Box_i p$	2, 9, MP
*	12	$\Box_i \boxdot_i p$	2, 10, MP
*	13	$\Box_i p$	2, PC
*	14	$\Box_i p \rightarrow \Box_i \Box_i p$	(S4-$\Box_i$)
*	15	$\Box_i \Box_i p$	13, 14, MP
*	16	$\boxdot_i p$	2, PC
*	17	$\boxdot_i p \rightarrow \boxdot_i \boxdot_i p$	(S4-$\boxdot_i$)
*	18	$\boxdot_i \boxdot_i p$	16, 17, MP
*	19	$(\boxdot_i \Box_i p \wedge \boxdot_i \boxdot_i p) \wedge (\Box_i \boxdot_i p \wedge \Box_i \Box_i p)$	11, 12, 15, 18, PC
*	20	$\boxdot_i \Box_i p \wedge \boxdot_i \boxdot_i p$	19, PC

*	21	$\Box_i \boxdot_i p \wedge \Box_i \Box_i p$	19, PC
*	22	$\boxdot_i(\Box_i p \wedge \boxdot_i p)$	20, T-K5
*	23	$\Box_i(\boxdot_i p \wedge \Box_i p)$	21, T-K5
*	24	$\boxdot_i \boxminus^{SvW} p$	22, Def. $\boxminus^{SvW}$
*	25	$\Box_i \boxminus^{SvW} p$	23, Def. $\boxminus^{SvW}$
*	26	$\Box_i \boxminus^{SvW} p \wedge \boxdot_i \boxminus^{SvW} p$	24, 25, PC
*	27	$\boxminus^{SvW} \boxminus^{SvW} p$	26, Def. $\boxminus^{SvW}$
	28	$(p \wedge \boxminus^{SvW} p) \rightarrow \boxminus^{SvW} \boxminus^{SvW} p$	1, 27, konditionalisiert
	29	$p \rightarrow (\boxminus^{SvW} p \rightarrow \boxminus^{SvW} \boxminus^{SvW} p)$	28, PC

II) Zu "$\boxminus^{SvW}_i$" kann die reflexive Erweiterung "$\boxminus^{r}_i$" als Abkürzung für $\ulcorner \Box_i\alpha \wedge \alpha \wedge \boxdot_i\alpha \urcorner$ bzw. $\ulcorner \boxminus^{SvW}_i\alpha \wedge \alpha \urcorner$ eingeführt werden. "$\boxminus^{r}_i$" heißt hier soviel wie "überall auf derselben K_{lin}-Achse". Jede Konkretisierung davon ist also semantisch gesehen ein S5-Operator. Nun hat von Wright a.a.O. skizziert, wie sich mit Hilfe der SvW-Gesetze auch herleiten lässt, dass das reflexive Gegenstück zu einem SvW-Operator ein S5-Operator ist. Der Beweis lässt sich hier wie folgt ausnotieren, wobei NEC-Regel, Box-Verteiler und T-Axiom unproblematisch sind:

(a) Ist α herleitbar, so auch $\ulcorner \boxminus^{r}_i\alpha \urcorner$ (NEC-$\boxminus^{r}_i$)

1	α	als herleitbar angenommen
2	$\boxminus^{SvW}_i\alpha$	1, NEC
3	$\alpha \wedge \boxminus^{SvW}_i\alpha$	1, 2, PC
4	$\boxminus^{r}_i\alpha$	3, Def. $\boxminus^{r}_i$

(b) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \boxminus^{r}_i(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boxminus^{r}_i\alpha \rightarrow \boxminus^{r}_i\beta) \urcorner$ ist SvW-herleitbar:

	*	1	$\boxminus^{r}_i (p \rightarrow q)$	Annahme
	*	2	$\boxminus^{SvW}_i(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$	1, Def. $\boxminus^{r}_i$
*		3	$\boxminus^{SvW}_i p \wedge p$	Annahme
	*	4	$\boxminus^{SvW}_i (p \rightarrow q)$	2, PC (E$\wedge$)
*	*	5	$\boxminus^{SvW}_i (p \rightarrow q) \wedge \boxminus^{SvW}_i p$	3, 4, PC (I$\wedge$)
		6	$\boxminus^{SvW}_i (p \rightarrow q) \rightarrow (\boxminus^{SvW}_i p \rightarrow \boxminus^{SvW}_i q)$	K-$\boxminus^{SvW}_i$
		7	$(\boxminus^{SvW}_i (p \rightarrow q) \wedge \boxminus^{SvW}_i p) \rightarrow \boxminus^{SvW}_i q$	6, PC
*	*	8	$\boxminus^{SvW}_i q$	5, 7, PC (m.p.)
	*	9	$p \rightarrow q$	2, PC (E$\wedge$)
*		10	p	3, PC (E$\wedge$)
*	*	11	q	9, 10, PC (m.p.)
*	*	12	$\boxminus^{SvW}_i q \wedge q$	8, 11, PC (I$\wedge$)
	*	13	$(\boxminus^{SvW}_i p \wedge p) \rightarrow (\boxminus^{SvW}_i q \wedge q)$	3, 12, kond.
	*	14	$\boxminus^{r}_i p \rightarrow \boxminus^{r}_i q$	13, Def. $\boxminus^{r}_i$
		15	$\boxminus^{r}_i (p \rightarrow q) \rightarrow (\boxminus^{r}_i p \rightarrow \boxminus^{r}_i q)$	1, 14, kond.

(c) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \boxminus^{r}_i \alpha \rightarrow \alpha \urcorner$ ist SvW-herleitbar:

*	1	$\boxminus^{r}_i p$	Annahme
*	2	$\boxminus^{SvW}_i p \wedge p$	1, Def. $\boxminus^{r}_i$
*	3	p	2, PC
	4	$\boxminus^{r}_i p \rightarrow p$	1, 3, konditionalisiert

Die Herleitung des typischen S5-Axioms ist dagegen nicht mehr ganz trivial:

(d) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \diamondminus^{r}_{i}\, \alpha \to \boxminus^{r}_{i}\, \diamondminus^{r}_{i}\, \alpha \urcorner$ ist SvW-herleitbar.
(i) Um dies zu zeigen, ist es nützlich, ein weiteres zentrales SvW-Theorem (**SvW**) zu beweisen:[31]

1	$(p \wedge \boxminus^{SvW}_{i}\, q) \to \boxminus^{SvW}_{i} \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee q)$	(SvW-$\boxminus^{SvW}_{i}$)
2	$\sim \boxminus^{SvW}_{i} \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee q) \to \ \sim (p \wedge \boxminus^{SvW}_{i}\, q)$	1, Kontrapos.
3	$\sim \boxminus^{SvW}_{i} \boxminus^{SvW}_{i} (\sim p \vee \sim p) \to \ \sim (\sim p \wedge \boxminus^{SvW}_{i} \sim p)$	2, Subst ~p/p, ~p/q
4	$\sim \boxminus^{SvW}_{i} \boxminus^{SvW}_{i}\ \sim p \to \ \sim (\sim p \wedge \boxminus^{SvW}_{i} \sim p)$	3, PC [$(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha$]
5	$\sim \sim \diamondminus^{SvW}_{i} \sim\sim \diamondminus^{SvW}_{i} \sim \sim p \to \ \sim (\sim p \wedge \boxminus^{SvW}_{i} \sim p)$	4, T-K1
6	$\diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ \sim (\sim p \wedge \boxminus^{SvW}_{i} \sim p)$	5, PC (PDN)
7	$\diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ \sim (\sim p \wedge \sim \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	6, T-K3
8	$\diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p$	7, PC (Def. $\wedge$)

(ii) Mit (SvW) lässt sich nun wie folgt argumentieren:[32]

1	$\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	PC
2	$\boxminus^{SvW}_{i} (\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	1, NEC-$\Box$
3	$\boxminus^{SvW}_{i} (\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \to \ldots$	(K-$\boxminus^{SvW}_{i}$) mit α= „$\diamondminus^{SvW}_{i}\, p$“
	$\ldots(\boxminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	und β = „$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$“
4	$\boxminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	2, 3, MP
5	$p \to \boxminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p$	(B-$\boxminus^{SvW}_{i}$) alternativ
6	$p \to \boxminus^{SvW}_{i}\quad (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	5, 4, PC (Kettenschluss)
7	$\diamondminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	**(SvW)**
8	$\boxminus^{SvW}_{i} (\diamondminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	7, NEC-$\boxminus^{SvW}_{i}$
9	$\boxminus^{SvW}_{i} (\diamondminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \ (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \to \ldots$	(K-$\boxminus^{SvW}_{i}$) mit α= „$\diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p$“ und
	$\ldots(\boxminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \ \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	β = „$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$“
10	$\boxminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	8, 9, MP
11	$\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i} \diamondminus^{SvW}_{i}\, p$	(B-$\boxminus^{SvW}_{i}$) alternativ mit α = „$\diamondminus^{SvW}_{i}\, p$“
12	$\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	11, 10, PC (Kettenschluss)
13	$((p \to q) \wedge (r \to q)) \to ((p \vee r) \to q)$	PC
14	$((p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \wedge (\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \to \ldots$	13, Subst
	$\ldots\ ((p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \Diamond p))$	
15	$(p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \wedge (\diamondminus^{SvW}_{i}\, p \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	6, 12, PC
16	$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	14, 15, MP
17	$(p \to q) \to (p \to p \wedge q)$	PC
18	$((p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)) \to ((p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to \ldots$	17, Subst
	$\ldots(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p \wedge \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)))$	
19	$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to ((p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \wedge \boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	18, 16, MP
20	$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to (\boxminus^{SvW}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \wedge (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p))$	19, PC
21	$(p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p) \to \boxminus^{r}_{i} (p \vee \diamondminus^{SvW}_{i}\, p)$	20, Def. $\boxminus^{r}_{i}$
22	$\diamondminus^{r}_{i}\, p \to \boxminus^{r}_{i} \diamondminus^{r}_{i}\, p$	21

Es lässt sich also herleiten, dass jede Konkretisierung von „$\boxminus^{r}_{i}$“ ein S5-Operator ist.

III) Angenommen, „$\boxminus^{r}_{1}$“, „$\boxminus^{r}_{2}$“ und „$\boxminus^{r}_{3}$“ werden räumlich gedeutet, „$\Box_4$“ und „$\boxdot_4$“ dagegen zeitlich, etwa so, dass „$\Box_4$“ auch als „G“ und „$\boxdot_4$“ auch als „H“ notiert werden kann. Nun sei $\ulcorner \mathsf{E}\ \alpha \urcorner$ definiert als Abkürzung für $\ulcorner \boxminus^{r}_{1} \boxminus^{r}_{2} \boxminus^{r}_{3} \alpha \urcorner$ und $\ulcorner \mathsf{S}\ \alpha \urcorner$ als Abkürzung für $\ulcorner \diamondminus^{r}_{1} \diamondminus^{r}_{2} \diamondminus^{r}_{3} \alpha \urcorner$ (bzw. für das trivialerweise damit äquivalente $\ulcorner \sim \mathsf{E} \sim \alpha \urcorner$).

Es ist zu zeigen, dass „E“ ein S5-Operator ist. Intuitiv zeigt das, dass sich „überall“ z.B. verstehen lässt als „überall entlang der x-Achse gilt: überall entlang der y-Achse gilt: überall entlang der z-Achse: p“. NEC-Regel, Box-Verteiler und T-Axiom sind unproblematisch.

1. NEC-E ist eine Abkürzung für die unproblematische sukzessive Anwendung von NEC-$\boxminus^{r}_{1}$, NEC-$\boxminus^{r}_{2}$ und NEC-$\boxminus^{r}_{3}$.

[31] Von Wright diskutiert dieses Theorem in „A modal logic of place“ als Axiom A5 (vgl. S.137).
[32] Beweisansatz nach von Wright, „A Modal Logic of Place“, (1983), S.138f

2. Box-Verteiler

1	$\boxminus^{r}_{3}(p \to q) \to (\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{3} q)$	(K-$\boxminus^{r}_{3}$)
2	$\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}(p \to q) \to \boxminus^{r}_{2}(\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{3} q)$	1, DR 1-$\boxminus^{r}_{2}$
3	$\boxminus^{r}_{2}(\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{3} q) \to (\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q)$	(K-$\boxminus^{r}_{2}$)
4	$\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}(p \to q) \to (\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q)$	2, 3, PC
5	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}(p \to q) \to \boxminus^{r}_{1}(\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q)$	1, DR 1-$\boxminus^{r}_{1}$
6	$\boxminus^{r}_{1}(\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q) \to (\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q)$	(K-$\boxminus^{r}_{1}$)
7	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}(p \to q) \to (\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} q)$	5, 6, PC
8	$\mathsf{E}(p \to q) \to (\mathsf{E}p \to \mathsf{E}q)$	7, Def. E

3.T-Axiom

*	1	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$	Annahme
	2	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p \to \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$	T-$\boxminus^{r}_{1}$
*	3	$\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$	1, 2, PC
	4	$\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3} p \to \boxminus^{r}_{3} p$	T-$\boxminus^{r}_{2}$
*	5	$\boxminus^{r}_{3} p$	3, 4, MP
	6	$\boxminus^{r}_{3} p \to p$	T-$\boxminus^{r}_{2}$
*	7	p	5, 6, MP
	8	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p \to p$	1, 7, konditionalisiert
	9	$\mathsf{E}\, p \to p$	8, Def. E

4. S5-Axiom

Weniger trivial ist das typische S5-Axiom. Denn man braucht dafür offenbar (chr)-Gesetze für „$\underline{\Diamond}^{r}_{i}$“. Es ist also zunächst zu zeigen, dass die aus der fragmentarischen Axiomatik für K_{lin}^{4} folgen. Denn in der sind ja als Axiome nur (chr)-Gesetze für die Grundebene („$\Box_1$“, „$\Box_2$“, „$\Box_3$“ „$\boxdot_1$“, „$\boxdot_2$“, „$\boxdot_3$“) vorausgesetzt.

(i) Dafür zeigen wir zunächst: Wenn (chr)-Gesetze für die Grundebene gelten, so auch für „$\boxminus^{SvW}_{1}$“, „$\boxminus^{SvW}_{2}$“ und „$\boxminus^{SvW}_{3}$“.

(ii) Dann zeigen wir: (ii) Wenn (chr)-Gesetze für „$\boxminus^{SvW}_{1}$“, „$\boxminus^{SvW}_{2}$“ und „$\boxminus^{SvW}_{3}$“ gelten, dann auch für „$\boxminus^{r}_{1}$“, „$\boxminus^{r}_{2}$“ und „$\boxminus^{r}_{3}$“.

(iii) Schließlich lässt sich dann zeigen: Das typische S5-Axiom ist für „E“ herleitbar.

(i)

*	1	$\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}\boxminus^{SvW}_{i}\, p$	Annahme
*	2	$\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}(\Box_i p \wedge \boxdot_i p)$	1, Def. $\boxminus^{SvW}_{i}$
*	3	$\Diamond_k(\Box_i p \wedge \boxdot_i p) \vee \blacklozenge_k(\Box_i p \wedge \boxdot_i p)$	2, Def. $\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}$
*	4	$(\Diamond_k\Box_i p \wedge \Diamond_k\boxdot_i p) \vee (\blacklozenge_k\Box_i p \wedge \blacklozenge_k\boxdot_i p)$	3, T-K9
*	5	$(\Box_i\Diamond_k p \wedge \boxdot_i\Diamond_k p) \vee (\Box_i\blacklozenge_k p \wedge \boxdot_i\blacklozenge_k p)$	4, mit **(chr)** (Grundebene)
	6	$(\Box_i\Diamond_k p \vee \Box_i\blacklozenge_k p) \wedge (\boxdot_i\Diamond_k p \vee \boxdot_i\blacklozenge_k p)$	5, PC $(\alpha\wedge\beta) \vee (\gamma\wedge\delta) \equiv (\alpha\vee\gamma) \wedge (\beta\vee\delta)$
*	7	$\Box_i(\Diamond_k p \vee \blacklozenge_k p) \wedge \boxdot_i(\Diamond_k p \vee \blacklozenge_k p)$	6, mit T-K8
*	8	$\Box_i\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}\, p \quad \wedge \boxdot_i\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}\, p$	7, Def. $\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}$
*	9	$\boxminus^{SvW}_{i}\underline{\Diamond}^{SvW}_{k}\, p$	8, Def. $\boxminus^{SvW}_{i}$
	10	$\underline{\Diamond}^{SvW}_{i}\boxminus^{SvW}_{k}\, p \to \underline{\Diamond}^{SvW}_{i}\boxminus^{SvW}_{k}\, p$	1, 9, kond.

(ii)			*	1	$\diamondminus^r_k \boxminus^r_i p$	Annahme
			*	2	$\diamondminus^r_k (\boxminus^{SvW}_i p \wedge p)$	1, Def. $\boxminus^r$
			*	3	$\diamondminus^{SvW}_k (\boxminus^{SvW}_i p \wedge p) \vee (\boxminus^{SvW}_i p \wedge p)$	2, Def. $\diamondminus^r$
			*	4	$(\diamondminus^{SvW}_k \boxminus^{SvW}_i p \wedge \diamondminus^{SvW}_k p) \vee (\boxminus^{SvW}_i p \wedge p)$	3, mit T-K8
			*	5	$(\boxminus^{SvW}_i \diamondminus^{SvW}_k p \wedge \diamondminus^{SvW}_k p) \vee (\boxminus^{SvW}_i p \wedge p)$	4, mit **(chr)** i.S. von (i)
		*		6	$(\boxminus^{SvW}_i \diamondminus^{SvW}_k p \wedge \diamondminus^{SvW}_k p)$	Annahme
		*		7	$\boxminus^{SvW}_i \diamondminus^{SvW}_k p$	6, PC
				8	$\diamondminus^{SvW}_k p \to (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	PC
				9	$\boxminus^{SvW}_i \diamondminus^{SvW}_k p \to \boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	8, DR 1
		*		8	$\boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	7, 9, m.p.
		*		9	$\diamondminus^{SvW}_k p$	PC
		*		10	$\diamondminus^{SvW}_k p \vee p$	9, PC
		*		11	$\boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p) \wedge (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	8, 10, PC
	*			12	$\boxminus^{SvW}_i p \wedge p$	Annahme
	*			13	$\boxminus^{SvW}_i p$	12, PC
				14	$p \to (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	PC
				15	$\boxminus^{SvW}_i p \to \boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	14, DR1
	*			16	$\boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	13, 15, m.p.
	*			17	p	12, PC
	*			18	$\diamondminus^{SvW}_k p \vee p$	14, 17, m.p.
	*			19	$\boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p) \wedge (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	16, 18, PC
			*	20	$\boxminus^{SvW}_i (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p) \wedge (\diamondminus^{SvW}_k p \vee p)$	5, 11, 19, PC (E$\vee$)
			*	21	$\boxminus^{SvW}_i \diamondminus^r_k p \wedge \diamondminus^r_k p$	20, Def. $\diamondminus^r$
			*	22	$\boxminus^r_i \diamondminus^r_k p$	21, Def. $\boxminus^r$
				23	$\diamondminus^r_k \boxminus^r_i p \to \boxminus^r_i \diamondminus^r_k p$	1, 22, kond. **(chr)**

(iii)	1	$\diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p$	**(S5-$\boxminus^r_3$)**
	2	$\diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \diamondminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p$	1, DR 3
	3	$\diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p$	2, DR 3
	4	$\diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_2 \diamondminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p$	3, **mit S5**[33]
	5	$\boxminus^r_1 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_2 \diamondminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p$	wg. **(chr)** i.S. von (ii)
	6	$\boxminus^r_1 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \boxminus^r_2 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p$	wg. **(chr)** i.S. von (ii)
	7	$\boxminus^r_1 \boxminus^r_2 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \boxminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p$	wg. **(chr)** i.S. von (ii)
	8	$\boxminus^r_1 \diamondminus^r_1 \boxminus^r_2 \diamondminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \boxminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p$	5, 6, 7, PC (Kettenschluss)
	9	$\diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p \to \boxminus^r_1 \boxminus^r_2 \boxminus^r_3 \diamondminus^r_1 \diamondminus^r_2 \diamondminus^r_3 p$	4, 8, PC
	10	$\mathsf{S}\, p \to \mathsf{ES}\, p$	9, Def. E

B19

Die Begründung soll wieder mit $\boxminus^r_1$, $\boxminus^r_2$ und $\boxminus^r_3$ als räumlichen S5-Operatoren und $\boxminus^r_4$ als zeitlichem S5-Operator arbeiten.

1. (com)

Das Problem ist, dass man dafür auch (com)-Gesetze für „$\diamondminus^r_i$“ braucht. Es ist also zunächst zu zeigen, dass die aus der fragmentarischen Axiomatik für $K_{lin}{}^4$ folgen. Denn in der sind ja als Axiome nur (com)-Gesetze für die Grundebene („$\Box_1$“, „$\Box_2$“, „$\Box_3$“ „$\boxdot_1$“, „$\boxdot_2$“, „$\boxdot_3$“) vorausgesetzt.

(i) Dafür zeigen wir zunächst: Wenn (com)-Gesetze für die Grundebene gelten, so auch für „$\boxminus^{SvW}_1$“, „$\boxminus^{SvW}_2$“ und „$\boxminus^{SvW}_3$“.

(ii) Dann zeigen wir: (ii) Wenn (com)-Gesetze für „$\boxminus^{SvW}_1$“, „$\boxminus^{SvW}_2$“ und „$\boxminus^{SvW}_3$“ gelten, dann auch für „$\boxminus^r_1$“, „$\boxminus^r_2$“ und „$\boxminus^r_3$“.

(iii) Schließlich lässt sich dann zeigen: Es gelten (com)-Gesetze auch für „T“ / „O“ und „S“ / „E“.

---

[33] im Sukzedens wird für die Indizes 1 und 2 die Raute zur Kombination „Box-Raute“ aufgeblasen.

(i)

1	$(\Diamond_i\Diamond_k p \vee \Diamond_i ◈_k p \vee ◈_i \Diamond_k p \vee ◈_i ◈_k p) \equiv (\Diamond_i\Diamond_k p \vee \Diamond_i ◈_k p \vee ◈_i \Diamond_k p \vee ◈_i ◈_k p)$	PC
2	$(\Diamond_i\Diamond_k p \vee \Diamond_i ◈_k p \vee ◈_i \Diamond_k p \vee ◈_i ◈_k p) \equiv (\Diamond_k\Diamond_i p \vee ◈_k \Diamond_i p \vee \Diamond_k ◈_i p \vee ◈_k ◈_i p)$	1, mit **(com)** (Gr.ebene)
3	$(\Diamond_i\Diamond_k p \vee \Diamond_i ◈_k p \vee ◈_i \Diamond_k p \vee ◈_i ◈_k p) \equiv (\Diamond_k\Diamond_i p \vee \Diamond_k ◈_i p \vee ◈_k \Diamond_i p \vee ◈_k ◈_i p)$	2, PC
4	$(\Diamond_i (\Diamond_k p \vee ◈_k p) \vee ◈_i (\Diamond_k p \vee ◈_k p)) \equiv (\Diamond_k(\Diamond_i p \vee ◈_i p) \vee ◈_k (\Diamond_i p \vee ◈_i p))$	3, mit T-K8
5	$⟠^{SvW}{}_i (\Diamond_k p \vee ◈_k p) \equiv ⟠^{SvW}{}_k (\Diamond_i p \vee ◈_i p)$	4, Def. $⟠^{SvW}{}_{i/k}$
6	$⟠^{SvW}{}_i\ ⟠^{SvW}{}_k p \equiv ⟠^{SvW}{}_k\ ⟠^{SvW}{}_i p$	5, Def. $⟠^{SvW}{}_{i/k}$

(ii)

1	$(⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee p) \equiv (⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee p)$	PC
2	$(⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee p) \equiv (⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee p)$	1, PC
3	$⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \equiv ⟠^{SvW}{}_k ⟠^{SvW}{}_i p$	**(com)** für $⟠^{SvW}{}_i$ (vgl. (i))
4	$(⟠^{SvW}{}_i ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee p) \equiv (⟠^{SvW}{}_k ⟠^{SvW}{}_i p \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee p)$	2, 3, äquiv. Ersetzung
5	$(⟠^{SvW}{}_i (⟠^{SvW}{}_k p \vee p) \vee ⟠^{SvW}{}_k p \vee p) \equiv (⟠^{SvW}{}_k(⟠^{SvW}{}_i p \vee p) \vee ⟠^{SvW}{}_i p \vee p)$	4, mit T-K8
6	$(⟠^{SvW}{}_i ⟠^r{}_k p \vee ⟠^r{}_k) \equiv (⟠^{SvW}{}_k ⟠^r{}_i p \vee ⟠^r{}_i p)$	5, Def. $⟠^r{}_{i/k}$
7	$⟠^r{}_i ⟠^r{}_k p \equiv ⟠^r{}_k ⟠^r{}_i p$	6, Def. $⟠^r{}_{i/k}$ **(com)**

(iii)

*	1	TSp	*	1	STp	Annahme
*	2	$⟠^r{}_4 ⟠^r{}_1 ⟠^r{}_2 ⟠^r{}_3 p$	*	2	$⟠^r{}_1 ⟠^r{}_2 ⟠^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	1, Def. T, Def. S
*	3	$⟠^r{}_1 ⟠^r{}_2 ⟠^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	*	3	$⟠^r{}_4 ⟠^r{}_1 ⟠^r{}_2 ⟠^r{}_3 p$	2, (com) für $⟠^r{}_i$ (vgl. (ii)), sukzessiv
*	4	STp	*	4	TSp	3, Def. T, Def. S
	5	TSp $\rightarrow$ STp		5	STp $\rightarrow$ TSp	1, 4, kond. (com)

2. (chr)
Der Beweis geht schneller, aber auch nur deshalb, weil die erforderliche Vorarbeit in B18 geleistet wurde.

*	1	TEp	Annahme
	2	$⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_1 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p$	(chr) mit $\alpha = \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p$ (vgl. B18, III 4 (ii))
	3	$⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_2 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_3 p$	(chr) mit $\alpha = \boxminus^r{}_3 p$ (vgl. B18, III 4 (ii))
	4	$\boxminus^r{}_1 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_3 p$	3, DR 1
	5	$⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	(chr) mit $\alpha = p$ (vgl. B18, III 4 (ii))
	6	$\boxminus^r{}_2 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	5, DR 1
	7	$\boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 ⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	6, DR 1
	8	$⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p \rightarrow \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	2 – 7, PC (Kettenschluss)
*	9	$⟠^r{}_4 \boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 p$	1, Def. T, Def. E
*	10	$\boxminus^r{}_1 \boxminus^r{}_2 \boxminus^r{}_3 ⟠^r{}_4 p$	8, 9, MP
*	11	ETp	10, Def. T, Def. E
	12	TEp $\rightarrow$ ETp	1, 11, kond. (chr)
	13	SOp $\rightarrow$ OSp	12, vgl. B4 zu Kap. I 2 (chr)

B20

($\Diamond_i ⟠^r{}_k$-Lemma)

*	1	$\Diamond_i ⟠^r{}_k p$	Annahme
*	2	$\Diamond_i(\Diamond_k p \vee p \vee ◈_k p)$	1, Def. $⟠^r{}_k$
*	3	$\Diamond_i\Diamond_k p \vee \Diamond_i p \vee \Diamond_i ◈_k p$	2, mit T-K8 (Äquivalenz)
*	4	$\Diamond_k\Diamond_i p \vee \Diamond_i p \vee ◈_k\Diamond_i p$	3, mit (com) (Äquivalenz)
*	5	$⟠^r{}_k \Diamond_i p$	4, Def. $⟠^r{}_k$
	6	$\Diamond_i ⟠^r{}_k p \equiv ⟠^r{}_k \Diamond_i p$	1, 5, beidseitig kond.

(com)

*	1	$\mathsf{FS}p$	Annahme
*	2	$\mathsf{F}\,\lozengeminus^{r}_{1}\lozengeminus^{r}_{2}\lozengeminus^{r}_{3}\,p$	1, Def. S
*	3	$\lozengeminus^{r}_{1}\,\mathsf{F}\,\lozengeminus^{r}_{2}\lozengeminus^{r}_{3}\,p$	2, ($\Diamond_i\lozengeminus^{r}_{k}$-Lemma)
*	4	$\lozengeminus^{r}_{1}\,\lozengeminus^{r}_{2}\,\mathsf{F}\,\lozengeminus^{r}_{3}\,p$	3, ($\Diamond_i\lozengeminus^{r}_{k}$-Lemma)
*	5	$\lozengeminus^{r}_{1}\,\lozengeminus^{r}_{2}\,\lozengeminus^{r}_{3}\,\mathsf{F}\,p$	4, ($\Diamond_i\lozengeminus^{r}_{k}$-Lemma)
*	6	$\mathsf{SF}p$	5, Def. S
	7	$\mathsf{FS}p \equiv \mathsf{SF}p$	1, 6, beidseitig kond., da alle Schritte auf Äquivalenzen beruhen.

„$\mathsf{PS}p \equiv \mathsf{SP}p$“ wird analog mit „$\mathsf{P}$“ statt „$\mathsf{F}$“ bewiesen.

($\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}$-Lemma)

*	1	$\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}p$	Annahme
*	2	$\Diamond_i\,(\Box_k p \wedge p \wedge \boxdot_k p)$	1, Def. $\boxminus^{r}_{k}$
*	3	$\Diamond_i\,\Box_k p \wedge \Diamond_i\,p \wedge \Diamond_i\,\boxdot_k p$	2, mit K (keine Äquivalenz!)
*	4	$\Box_k\Diamond_i\,p \wedge \Diamond_i\,p \wedge \boxdot_k\,\Diamond_i\,p$	3, (chr) sukzessiv (keine Äquivalenz!)
*	5	$\boxminus^{r}_{k}\Diamond_i\,p$	4, Def. $\boxminus^{r}_{k}$
	6	$\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}p \rightarrow \boxminus^{r}_{k}\Diamond_i\,p$	1, 6, kond.

(chr)

*	1	$\mathsf{FE}p$	Annahme
*	2	$\mathsf{F}\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$	Def. E
*	3	$\boxminus^{r}_{1}\,\mathsf{F}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$	2, ($\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}$-Lemma) mit „$\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p$“ für „p“
	4	$\mathsf{F}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{2}\mathsf{F}\boxminus^{r}_{3}p$	($\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}$-Lemma) mit „$\boxminus^{r}_{3}p$“ für „p“
	5	$\boxminus^{r}_{1}\,\mathsf{F}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{1}\,\boxminus^{r}_{2}\mathsf{F}\boxminus^{r}_{3}p$	4, DR 3
	6	$\mathsf{F}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{3}\mathsf{F}p$	($\Diamond_i\boxminus^{r}_{k}$-Lemma)
	7	$\boxminus^{r}_{2}\mathsf{F}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}\,\mathsf{F}\,p$	6, DR 3
	8	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\mathsf{F}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}\,\mathsf{F}\,p$	7, DR 3
	9	$\boxminus^{r}_{1}\,\mathsf{F}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}p \rightarrow \boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}\,\mathsf{F}\,p$	5, 8, PC (Kettenschluss)
*	10	$\boxminus^{r}_{1}\boxminus^{r}_{2}\boxminus^{r}_{3}\,\mathsf{F}\,p$	3, 9, MP
*	11	$\mathsf{EF}p$	10, Def. E
	12	$\mathsf{FE}p \rightarrow \mathsf{EF}p$	1, 11, kond.
	13	$\mathsf{S}\,\mathsf{G}p \rightarrow \mathsf{G}\,\mathsf{S}\,p$	12, vgl. B4 zu Kap. I 2

„$\mathsf{PE}p \rightarrow \mathsf{EP}p$“ wird analog mit „$\mathsf{P}$“ statt „$\mathsf{F}$“ bewiesen. Es folgt sogleich „$\mathsf{SH}p \rightarrow \mathsf{HS}p$“.

B21

Beweis analog zu Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.164, für
(com-FS) $\ulcorner \mathsf{FS}\,\alpha \equiv \mathsf{SF}\alpha \urcorner$ (com-PS) $\ulcorner \mathsf{PS}\,\alpha \equiv \mathsf{SP}\alpha \urcorner$

1	$\mathsf{PE}\underline{\mathsf{G}p} \rightarrow \mathsf{EP}\underline{\mathsf{G}p}$	(chr)	
2	$\mathsf{PG}p \rightarrow p$	K_t	
3	$\mathsf{EPG}p \rightarrow \mathsf{E}p$	2, DR 1	
4	$\mathsf{PEG}p \rightarrow \mathsf{E}p$	1, 3, PC	
5	$\mathsf{EG}p \rightarrow \mathsf{GE}p$	4, R-$\Diamond_i\Box_k$[34]	
6	$\mathsf{EG}\sim p \rightarrow \mathsf{GE}\sim p$	5, ~p/p	
7	$\sim\mathsf{GE}\sim p \rightarrow \sim\mathsf{EG}\sim p$	6, PC (Kontrapos.)	
8	$\sim\mathsf{G}\sim\sim\mathsf{E}\sim p \rightarrow \sim\mathsf{E}\sim\sim\mathsf{G}\sim p$	7, PC	
9	$\mathsf{FS}p \rightarrow \mathsf{SF}p$	8, Def. F, Def. S	(com-FS) von links nach rechts

[34] Vgl. Kap. I 1, B11.

10 $FHEp \rightarrow Ep$	K_t	
11 $SFHEp \rightarrow p$	10, DR-S5[35]	
12 $FS\underline{HEp} \rightarrow SF\underline{HEp}$	9, HE p / p	
13 $FS\underline{HEp} \rightarrow p$	11, 12, PC	
14 $S\underline{HEp} \rightarrow Hp$	13, $R\text{-}\Diamond_i\Box_k$.	
15 $\underline{HEp} \rightarrow EHp$	14, DR4	
16 $HE \sim p \rightarrow EH{\sim}p$	15, ~p / p	
17 $\sim EH{\sim}p \rightarrow {\sim}HE \sim p$	16, PC (Kontrapos.)	
18 $\sim E{\sim}{\sim}H{\sim}p \rightarrow {\sim}H{\sim}{\sim}E{\sim}p$	17, PC	
19 $SP \rightarrow PSp$	18, Def. P, Def. S	(com-PS) von rechts nach links

“$PSp \rightarrow SPp$”, also (com-PS) von links nach rechts, und „$SFp \rightarrow FSp$“, (com-FS) von rechts nach links, werden analog bewiesen mit „1 $FE\underline{Hp} \rightarrow EF\underline{Hp}$“ etc.

B22

Die Herleitung ist wie zu Kap. I 1 in B7 für $S5^2$ angegeben, nur mit „E“ für „$\Box_1$“, „S“ für „$\Diamond_1$“, und „F“ bzw. „P“ für „$\Diamond_2$“.

B23

Ein Vollständigkeitsbeweis für eine Sprache, die offensichtlich semantisch äquivalent zu $S5xK_{lin}$ ist,[36] ist durch Reynolds für die angegebene Axiomatik unter Hinzufügung einer Gabbay’schen Nichtreflexivitätsregel[37] seit Ende 1996 bekannt.[38] Reynolds benutzt sie in der Form

$$\vdash \ulcorner \Diamond q \wedge H{\sim}\Diamond q \rightarrow \alpha \urcorner \Rightarrow \vdash \alpha, \text{ falls } \alpha \text{ „q“-frei ist.}$$ [39]

Reynolds gibt als Axiomenschemata über die Inkorporation von PC (Axiom 1) hinaus die üblichen K_t-Schemata und Transitivitätsaxiome für „G“ und „H“ an (Axiome 2 bis 4 und deren „duals“) an,[40] als Linearitätsaxiome die in B25 zu Kap. I 1 angegebenen Reynolds-Schemata (Axiom 5 und dessen „dual“), übliche S5-Axiome für die Box (Axiome 6 bis 9), das (chr)-Schema $\ulcorner P\Box\, \alpha \rightarrow \Box\, P\, \alpha \urcorner$ und dessen „dual“ mit „F“ und die (com)-Schemata $\ulcorner \Diamond P\, \alpha \rightarrow P\Diamond\, \alpha \urcorner$ und dessen „dual“.[41]

---

[35] Vgl. zu Kap. I 1, B7.
[36] Reynolds, „A decidable temporal logic for parallelism“ (1998). Vgl. für die semantischen Definitionen S.3f, für den Vollständigkeitsbeweis Abschnitt 9, S.16-19.
[37] Vgl. Kap. I 1.2.1.
[38] Die Ergebnisse zur Axiomatisierung befinden sich nur im „technical report“ im Internet, nicht in der kürzeren Fassung im „Notre Dame Journal of Formal Logic“. In Gabbays und Shehtmans „Products of Modal Logics Part I“ (1998), S.86, wird $S5xK_{lin}$ ohne weitere Qualifikation für „product matching“ erklärt. Genau genommen geht die Hinzufügung der Gabbay-Regel etwas darüber hinaus.
[39] Reynolds, a.a.O., S.16.
[40] Von ihnen ist eines streng genommen redundant (vgl. B15 zu Kap. I 1).
[41] Man weiß durch Wölfls Arbeit von 1999 inzwischen, dass die (com)-Schemata hier streng genommen redundant sind, vgl. B3 zu diesem Kapitel.

Begründungen zu Teil II, Kapitel 1

B1

Es gibt zu keiner tempo-modalen Position einen möglichen Weltverlauf, in dem an irgendeiner Stelle eine allgemeingültige Formel falsifiziert wäre. Sonst wäre sie ja doch nicht allgemeingültig.

B2

Harada versucht, dem Gedanken, dass Peirceanische Zeitlogik (AAL) und ockhamistische Zeitlogik (AL)[1] vom Standpunkt des Hemiaktualisten aus in Haradas Logik HAL aufgehoben sind, durch den Beweis eines Theorems einen präzisen Ausdruck zu geben, wonach die beiden erstgenannten in gewissem Sinn als Grenzfälle in HAL enthalten sind (vgl. IZL, S. 296-315).

Für gründliche Leser von Haradas Arbeit sei hier Folgendes angemerkt: Haradas Argumentation ist, wie er selbst zuerst bemerkt hat, nicht ohne weiteres haltbar.[2] Das liegt daran, dass die Definition aller genannten Logiken Modelle mit endlicher Zeit ausschließt.[3] Harada hat selbst sinngemäß die folgende Reparatur seines Beweisansatzes vorgeschlagen: Man lässt die Definition des HAL-Modells wie zuvor, postuliert also beidseitige Randlosigkeit. Man fügt dann einem solchen Modell, nennen wir es M, noch eine Anfangs- und Endposition *extern* hinzu, ohne dass sie deswegen zu irgendeiner Weltgeschichte *des Modells M* gehören. Denn eine Weltgeschichte des Modells ist ein maximaler Früher/später-Pfad *durch* T_M, und die Anfangszeitstelle (t_a) oder die Endzeitstelle (t_e) gehört nicht zu T_M. Die Menge der Weltgeschichten durch t_a (H_a) wird dann extra definiert werden als die Menge aller Weltgeschichten über $<_M$; und die Menge aller Weltgeschichten durch t_e (H_e) wird definiert als die Menge aller t aus T_M mit $t<t_e$. Der Ausdruck „durch" ist dann *cum grano salis* zu lesen, denn es gilt ja für kein h aus H_a, dass t_a *Element von* h ist; und es gilt für kein h' aus H_e, dass t_e *Element von* h' ist. Doch das sollte eigentlich kein Problem sein. Das führt dazu, dass z.B. „$\mathsf{G}(\mathsf{F}p \vee \mathsf{F}{\sim}p)$", anders als zuvor, nun wirklich End-j-allgemeingültig wird. Denn von einer beliebigen Zeitstelle aus T_M aus erfasst der G-Operator die Position t_e nun nicht mehr, da t_e selbst gar nicht Element von T_M ist und „G" gewissermaßen nur alle davor liegenden Positionen *aus* T_M beachtet.

Ich halte diesen Reparaturvorschlag für überzeugend. Er eröffnet sogar die erstaunliche Denkmöglichkeit, dass die Zeit anders aussieht, je nachdem ob man sie aus der Ewigkeit von vorn oder von hinten betrachtet (wobei bei dieser Beschreibung jedes einzelne Wort *cum grano salis* zu lesen ist!). Wer, anders als ich, an einer Zeitlogik des Jüngsten Gerichts interessiert ist, sollte sich die hier skizzierten Modelle vielleicht einmal genauer ansehen.

B3

An die Stelle *eines* Kontexts im Sinne einer tempo-modalen Position tritt im Falle der lingua franca jeweils ein Paar aus Zeitstelle und möglichem Weltverlauf. Das jeweils erste Paar spielt also die Rolle des Kontexts, für den die Bewertung vorgenommen wird; das *zweite* Paar spielt die Rolle des An- oder Gebrauchskontexts, an dem die Bewertung vorgenommen wird. Im Sinne einer solchen Notationsvariante lässt sich nun definieren, was auf der Basis eines gegebenen LF-Modells der H(arada)-Wert einer Formel ist:

[1] Diese Benennungen sollen an „antaktualistisch" bzw. „aktualistisch" erinnern. Nach der in der vorliegenden Studie verfolgten Argumentation sind dies Fehlbenennungen.

[2] E-mail von Kimio Harada an Bertram Kienzle, Januar 2002.

[3] IZL, Def.2.1.(3), S.250.

Sei $\langle T, A_1, W, A_2, A_t, V\rangle$ ein LF-Modell. Eine wohlgeformte Formel α hat für ein $\langle t,h\rangle$ aus TxW den H-Wert 1 ($H(\alpha,\langle t,h\rangle)=1$) gdw gilt: $V^{Har}(\alpha, \langle t,h\rangle, \langle t,h\rangle)=1$; andernfalls den Wert 0. Dabei gilt: $V^{Har}(\alpha, \langle t,h\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$ (andernfalls=0) gdw

(0) α ist atomar und $V(\alpha, \langle t,h\rangle)=1$
(i) $\alpha = \sim\beta$ und $V^{Har}(\beta,\langle t,h\rangle, \langle t',h'\rangle)= 0$
(ii) $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ und $V^{Har}(\beta,\langle t,h\rangle, \langle t',h'\rangle)=0$ oder& $V^{Har}(\gamma,\langle t,h\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$
(iii) α = Nβ und für *jedes* h“ mit h“A_t h gilt: $V^{Har}(\beta,\langle t,h''\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$
(iv) α = Hβ und für *alle* t“ gilt: wenn t“ A_2 t, dann $V^{Har}(\beta,\langle t'',h\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$
(v) α = Fβ und

1. Es ist nicht der Fall, dass h $A_{t'}$ h’ und es gibt ein t“ mit t A_2 t“, so dass gilt: $V^{Har}(\beta,\langle t'',h\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$
2. h $A_{t'}$ h’ und für jedes h“ mit h“ $A_{t'}$ h’ gilt: es gibt ein t“ mit t A_2 t“, so dass gilt: $V^{Har}(\beta,\langle t'',h''\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$

(vi) α = Gβ und

1. Es ist nicht der Fall, dass h $A_{t'}$ h’; und für alle t“ mit t A_2 t“ gilt: $V^{Har}(\beta,\langle t'',h\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$
2. h $A_{t'}$ h’ und für jedes h“ mit h“ $A_{t'}$ h’ gilt: für alle t“ mit t A_2 t“ gilt: $V^{Har}(\beta,\langle t'',h''\rangle, \langle t',h'\rangle)=1$.

Als **H-gültig** ist eine solche Formel anzusehen, die für jedes Paar aus Zeitstelle und Weltverlauf eines beliebigen LF-Modells den H-Wert 1 erhält.

B4

Ist die Wahrheit von „Fq“ an $\langle t_1,h_1\rangle$ vorausgesetzt, so ist auch, wie soeben gezeigt, „F((q∧r) ∇ (q∧~r))“ an $\langle t_1,h_1\rangle$ wahr. Daraus folgt, weil das exklusive das inklusive „oder“ impliziert „F ((q∧r) ∨ (q ∧ ~r))“. Daraus folgt mit T-K8 (vgl. Kap. I 2), dass „F(q∧r) ∨ F (q ∧ ~r)“ zu t wahr ist.

Damit auch „F(q∧r) ∇ F(q∧~r)“ zu t wahr ist, muss zusätzlich noch „~(F(q∧r) ∧ F(q∧~r))“ wahr sein. Notiert man nun einfach „~ (F(q∧r) ∧ F (q ∧~r))“ aus, so erhält man als verbleibendes Beweisziel, dass an $\langle t_1,h_1\rangle$

~ (F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ r) ∧ F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r))

wahr ist. Dies wäre gezeigt, wenn man daraus, dass man „F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ r)“ als wahr annimmt, gewinnen könnte, dass „F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r))“ falsch sein muss.
Man kann nun semantisch argumentieren. Dabei sei h eine beliebige Weltgeschichte und t ein beliebiger Zeitpunkt. Die Grundidee ist: „r“ und „~r“ können an keiner Zeitstelle in derselben Weltgeschichte zugleich wahr sein. Nehmen wir an, dass „□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r)“ an einer zu t zukünftigen Zeitstelle t_0 in h wahr ist. So ist dort „□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q)“ wahr, also auch, weil „□“ ein S5-Operator ist, „H ~q ∧ q ∧ G ~q“, mithin „q“, also nach Voraussetzung „q ∧ r“. Nehmen wir außerdem an, dass „□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r)“ an einer zu t zukünftigen Zeitstelle t_1 in h wahr ist. So folgt entsprechend, dass dort „q ∧ ~r“ wahr ist. Daraus, dass es in h *nur eine* Zeitstelle gibt, an der „q“ wahr ist (was durch „H ~q“ und „G ~q“ gesichert ist), folgt, dass t_0 und t_1 identisch sind. Daraus, dass „r“ und „~r“ nicht an derselben Zeitstelle in h wahr sein können, folgt, dass t_0 und t_1 nicht identisch sind. Die Annahme, dass es in h sowohl eine zu t zukünftige Zeitstelle gibt, an der „□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ r)“ wahr ist, als auch eine, an der „□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r)“ wahr ist, führt also zum Widerspruch. Zu t in h kann demnach nicht zugleich „F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ r)“ und „F(□ (H ~q ∧ q ∧ G ~q) ∧ ~r)“ wahr sein.

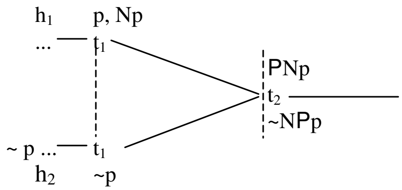
B5

1	$\Box p \rightarrow Np$	Box-Hierarchie-Axiom	
2	$\Box {\sim} p \rightarrow N{\sim}p$	1, Subst	
3	${\sim}N{\sim}p \rightarrow {\sim}\Box{\sim}p$	2, PC (Kp.)	
4	$Mp \rightarrow \Diamond p$	3, Def. M, Def. $\Diamond$	
5	$M\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$	4, Subst p / $\Diamond$p	
6	$M\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	5, mit S5-Reduktion von $\Diamond\Diamond$p zu $\Diamond$p	
7	$p \rightarrow Mp$	T-T1 (S5)	
8	$\Diamond p \rightarrow \Diamond Mp$	7, DR 3	
9	$M\Diamond p \rightarrow \Diamond Mp$	6, 8, PC (Kettenschluss)	(com 1)
10	$\Diamond Mp \rightarrow \Diamond\Diamond p$	4, DR 3	
11	$\Diamond Mp \rightarrow \Diamond p$	10, mit S5-Reduktion von $\Diamond\Diamond$p zu $\Diamond$p	
12	$\Diamond p \rightarrow M\Diamond p$	7, Subst p / $\Diamond$p	
13	$\Diamond Mp \rightarrow M\Diamond p$	11, 12, PC (Kettenschluss)	(com 2)
14	$\Diamond Mp \equiv M\Diamond p$	9, 13, Def. $\equiv$	(com)
15	$\Box Np \equiv N\Box p$	14, vgl. B5 zu Kap. I 2	(com) verstärkt
16	$M\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$	4, Subst p / $\Diamond$p	
17	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$	S5-Axiom	
18	$M\Box p \rightarrow \Box p$	16, 17, PC (Kettenschluss)	
19	$\Box p \rightarrow \Box Mp$	7, DR 1	
20	$M\Box p \rightarrow \Box Mp$	18, 19, PC (Kettenschluss)	(chr 1)
21	$\Diamond Np \rightarrow N\Diamond p$	20, vgl. B4 zu Kap. I 2	(chr 2)

Es lässt sich also allgemein festhalten, dass zwei beliebige S5-Operatorenpaare, für die gilt, dass der starke Operator des einen Paares den des anderen impliziert, den (com)- und (chr)-Gesetzen gehorchen.

B6

Dass „PNp → NPp“ als LF-allgemeingültig ist, liegt daran, dass LF-Strukturen per def. vergangenheitslinear sind.[4] Diese Formel könnte nämlich nur auf einem vergangenheitsverzweigten Modell, wenn ein solches erlaubt wäre, falsifiziert werden, und zwar wie hier an t_3 bezüglich beider möglicher Weltverläufe:



B7

Vgl. B4 zu I 2.

[4] Man ist darauf durch die Erforschung von KTM aufmerksam geworden. Vgl. dazu Kutschera, „TxW-completeness“ (1997), A6 auf S.244 und die Motivation bei Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik“ (1999), S.xiv f.

B8

(zu a) Sei M ein TxW-Modell, t aus T_M und h aus W_M und sei $V_M(MPp,\langle t,h\rangle) = 1$. So gibt es ein h', so dass h A_t h' und $V_M(Pp,\langle t,h'\rangle) = 1$. Also gibt es ein t' mit t'< t, so dass $V_M(p,\langle t',h'\rangle) = 1$. Sei h* ein solches h' und t* ein solches t'. So gilt $V_M(p,\langle t^*,h^*\rangle) = 1$. Es gilt dann t* < t. Wegen der typischen Beschränkung auf A gilt also: h A_{t^*} h*. Es gibt also mit h* ein h", so dass h A_{t^*} h" und $V_M(Mp,\langle t^*,h''\rangle) = 1$. Es gilt deshalb $V_M(Mp,\langle t^*,h\rangle) = 1$. Mit t* gibt es somit ein t" mit t" < t, so dass $V_M(p,\langle t'',h\rangle) = 1$. Deshalb gilt auch $V_M(PMp,\langle t,h\rangle) = 1$.

(zu b) Sei M ein TxW-Modell, t aus T_M und h aus W_M und sei $V_M(FMp,\langle t,h\rangle) = 1$. So gibt es ein t' mit t < t', so dass gilt $V_M(Mp,\langle t',h\rangle) = 1$. Somit gibt es ein h' mit h $A_{t'}$ h', so dass gilt: $V_M(p,\langle t',h'\rangle) = 1$. Sei t* ein solches t' und h* ein solches h'. So gilt $V_M(p,\langle t^*,h^*\rangle) = 1$, h A_{t^*} h* und t < t*. Mit t* gibt es also ein t", so dass t < t" und $V_M(p,\langle t'',h^*\rangle) = 1$. Es gilt deshalb $V_M(Fp,\langle t,h^*\rangle) = 1$. Da h A_{t^*} h* und t < t* muss wegen des typischen constraints auf A bereits gelten: h A_t h*. Es gibt also mit h* ein h", so dass h A_t h" und $V_M(Fp,\langle t,h''\rangle) = 1$. Es gilt deshalb auch $V_M(MFp,\langle t,h\rangle) = 1$.

B9

Man argumentiert wie in B21 zu Kap. I 2 mit „M" statt „S" und „N" statt „E". Dies ist Wölfls usprüngliche Anwendung.

B10

Auf verinselten Modellen kann „◊p" an einer Position ⟨t,h⟩ wahr sein, wenn an ⟨t,h'⟩ „p" wahr ist, aber h und h' zu keinem Zeitpunkt zugänglich sind (dies ist durch die Bedingung, dass sie, *falls* sie einmal zugänglich sind, auch immer zuvor zugänglich gewesen sein müssen, nicht ausgeschlossen). In diesem Fall war es nie so, dass h' als Alternative zu h mit wahrem „p" zu t offenstand: ~PMFp. Da Kutscheras Axiomatik korrekt ist, ist „◊p → PMFp" also auch nicht herleitbar. Verinselungsfreie Modelle dagegen sind gerade dadurch charakterisiert, dass es für beliebig gewählte Weltverläufe h, h' einen Zeitpunkt t' gibt, zu dem h und h' Alternativen sind. Sei t* ein solcher Zeitpunkt. Sei ferner „p" an ⟨t,h'⟩ wahr. So ist nach der Semantik für „◊" an ⟨t,h⟩ „p" wahr. Nun können wegen der Linearität der temporalen Zugänglichkeitsrelation < nur folgende Fälle vorliegen:
(1) h A_{t^*} h' und t < t*. Dann gilt nach dem typischen constraint auf A: h A_t h'.
(2) h A_{t^*} h' und t* = t. Dann ist trivialerweise h A_t h'.
In beiden Fällen gilt: Wegen der Randlosigkeitsforderung gibt es ein t" mit t" < t. Sei t** ein solcher Zeitpunkt. So ist wegen des typischen constraints h $A_{t^{**}}$ h'. Außerdem ist t** < t. Es ist also an ⟨t**, h'⟩ „Fp", an ⟨t**, h⟩ „MFp" und an ⟨t, h⟩ „PMFp" wahr.
(3) h A_{t^*} h' und t* < t. Nun gilt: Wegen der Randlosigkeitsforderung gibt es ein t" mit t" < t*. Sei t** ein solcher Zeitpunkt. So ist wegen des typischen constraints h $A_{t^{**}}$ h'. Wegen der Transitivität von < gilt: t** < t. Es ist also wieder an ⟨t**, h'⟩ „Fp", an ⟨t**, h⟩ „MFp" und an ⟨t, h⟩ „PMFp" wahr.

B11

(a) Wenn ⌈PNα → NPα⌉ herleitbar ist, dann ist auch ⌈PNα → NPMα⌉ herleitbar.

1	p → NM p	B (S5)
2	Pp → PNMp	1, DR 3 für P
3	PN Mp → NP Mp	nach Voraussetzung
4	Pp → NPMp	2,3 PC

(b) Wenn ⌈PNα → NPMα⌉ herleitbar ist, dann ist auch ⌈PNα → NPα⌉ herleitbar.

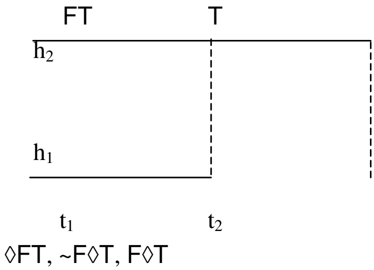
1	P Np → NPM Np	nach Voraussetzung
2	MNp → p	B (S5)
3	PMNp → Pp	2, DR 3 für P
4	NPMNp → NPp	3, DR 1 für N
5	PNp→ NPp	1,4 PC

B12

(a) (MB), nämlich $G\bot \rightarrow NG\bot$, ist mit der TxW-Axiomatik herleitbar. Abstrakt lässt sich das Ergebnis schon aufgrund des Vollständigkeitsbeweises in Kutscheras „TxW completeness“ behaupten. Denn (MB) ist TxW-allgemeingültig. Da die TxW-Axiomatik vollständig ist, muss es also eine Herleitung geben.

Warum ist (MB) TxW-allgemeingültig? Der Zweck von (MB) ist es, die „maximality of histories“ zu erzwingen:[5] Keine Geschichte soll am Ende kürzer sein dürfen als irgendeine andere. „$\bot$“ ist ja eine Abkürzung für eine beliebige kontradiktorische Formel. „$G\bot$“ ist somit typischerweise an einer letzten Zeitstelle einer Geschichte wahr (vgl. B33 zu I 1). Sei h_1 eine solche Geschichte. Angenommen nun, es sei eine andere zugängliche Geschichte, h_2, einfach länger. So wäre in h_2 „$G\bot$“ nicht zugleich wahr. Es wäre also am letzten Zeitpunkt in h_1 „$NG\bot$“ falsch. Genau diese Situation wird durch (MB) ausgeschlossen. Eine solche Situation *ist* aber in TxW-Modellen ohnehin ausgeschlossen. Denn jedes Paar aus einem Zeitpunkt und einem Weltverlauf ist eine Position. Ein Zeitpunkt kann sich sozusagen nicht dagegen wehren, mit einer Weltgeschichte ein Paar zu bilden. Wenn manche Geschichten länger wären als andere, so geschähe aber gerade das: Mancher Zeitpunkt hätte mit mancher Geschichte keinen Schnittpunkt, mit einer anderen, längeren, aber schon. (MB) ist also TxW-allgemeingültig.

Es lässt sich (unter Voraussetzung der aussagenlogischen Regeln für die *reductio ad absurdum*) auch skizzieren, wie ein Beweis *in concreto* aussieht. Die Beweisidee schließt genau an das Gesagte an. Dabei ist entscheidend: Dass nach hinten keine Enden überstehen, sollte in TxW eigentlich durch das (com)-Axiom $\ulcorner \Diamond F \alpha \equiv F \Diamond \alpha \urcorner$ gesichert sein. Und so ist es auch: In h_1 wäre am letzten Zeitpunkt immerhin noch „$\Diamond FT$“ wahr (wobei „T“ für eine beliebige allgemeingültige Formel steht. Denn zumindest in h_2 kommt ja noch ein Zeitpunkt, an dem „T“ wahr ist. Daraus folgt mit (com) „$F\Diamond T$“. Das ist aber zuviel gesagt, da in h_1 kein Zeitpunkt mehr kommt und deshalb am letzten Zeitpunkt von h_1 „$\sim F\Diamond T$“ wahr ist.

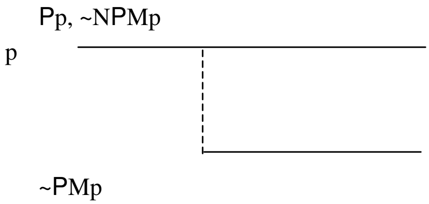


[5] Reynolds (2003), S.359.

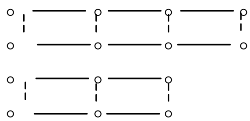
In einen Beweis für (MB) lässt sich das übersetzen wie folgt:

	1	⊥→ p	PC
	2	⊥→ ~ ◊ T	1, Subst
	3	G(⊥→ ~ ◊ T)	2, NEC für G
	4	G⊥→ G ~ ◊ T	3, K für G
*	5	~(G⊥→ □G⊥)	Hyp
*	6	G⊥ ∧ ~□G⊥	5, PC
*	7	G⊥	6, PC (E∧)
*	8	G ~ ◊ T	4, 7, PC (m.p.)
*	9	~ F◊ T	8, K_t
*	10	~□G⊥	6, PC (E∧)
*	11	◊ ~G~ T	10, K, PC
*	12	◊ F T	11, K_t
	13	◊ F T → F ◊ T	(com)
*	14	F ◊ T	12, 13, PC (m.p.)
*	15	⊥	9, 14, PC (I ⊥)
	16	~ ~(G⊥→ □G⊥)	5, 15, PC (I ~)
	17	G⊥→ □G⊥	16, PC (DN)
	18	□ G⊥ → N G⊥	Box-Hierarchie
	19	G⊥→ N G⊥	17, 18, PC (Kettenschluss), QED.

Anmerkung 1: Ein entsprechendes Axiom für die Anfänge von Geschichten muss Reynolds nicht fordern. Die Gleichursprünglichkeit der Geschichten wird bereits durch (HN), also $\ulcorner P\alpha \rightarrow NPM\alpha \urcorner$, garantiert. Dieses Axiom wäre nämlich verletzt, wenn manche Geschichten später beginnen könnten als andere.



Anmerkung 2: Man sieht hier, dass *nicht* jedem Modell von Reynolds' ockhamistischer Logik mit primitiven tempo-modalen Positionen ein TxW-Modell entspricht. „G⊥→ □G⊥" ist nämlich etwas stärker als „G⊥→ NG⊥". Durch ersteres wird nämlich das folgende verinselte Modell ausgeschlossen, durch das zweite Axiom nicht:



Doch das ist ein sehr ungewöhnliches Modell und muss für die Anwendung nicht weiter beunruhigen.

(b)

1	p → Np	(ANF)	
2	Pp → PNp	1, DR 3	Man beachte dazu, dass DR 3 ohne Subst beweisbar ist.
3	PNp → NPp	vgl. (b) zu B11	Genau das geht mit „F" nicht!
4	Pp → NPp	2, 3, m.p.	

Begründungen zu Teil II, Kapitel 2

B1

Ein solches Wesen würde, optimal informiert, die gesamte Vergangenheit kennen, ferner die Naturgesetze und alle dann vorhandenen Dinge durch und durch in ihrer Beschaffenheit. Dennoch wäre ihm die Zukunft unbekannt, wenn der ontische Indeterminismus wahr ist. Denn:

> Angenommen, das besagte Wesen hat von einer bestimmten Alternative h die Meinung, diese werde verwirklicht, und es täuscht sich garantiert nie. Weiter angenommen, die Verwirklichung einer von h verschiedenen Alternative h' steht unter diesen Umständen ebenso offen wie die Verwirklichung von h. Dann muss es möglich sein, dass h' unter diesen Umständen verwirklicht wird. Angenommen nun, unter diesen Umständen wird h' statt h verwirklicht. Dann ist die Meinung, h werde verwirklicht, falsch, das Wesen täuscht sich also. Nach der ersten Annahme sollte es sich aber garantiert nicht täuschen. Also steht unter diesen Umständen die Verwirklichung einer von h verschiedenen Alternative h' nicht offen, sondern allein die Verwirklichung von h. Die Menge der offen stehenden Alternativen darf nur h umfassen, damit das Wesen garantiert täuschungsfrei ist und keinerlei Risiko besteht, dass seine Ansicht falsifiziert wird.

Zu beachten ist: (1) Es geht nicht darum, ob h' tatsächlich verwirklicht wird – das würde der ersten Annahme trivialerweise widersprechen. Es geht nur darum, ob die Verwirklichung von h' *offen steht*, obwohl das Wesen meint, h werde verwirklicht. (2) Mit „es steht offen" ist nicht bloß interne Konsistenz gemeint: Es ist geschenkt, dass die Annahme der Verwirklichung von h' ohne die Annahme, das Wesen „sehe" h, *keinen* Widerspruch ergibt. Aber die Verwirklichung von h' darf nicht nur, sondern muss sogar *unter den vorausgesetzten Umständen* angenommen werden, wenn man sehen will, ob sie unter den vorausgesetzten Umständen offen steht. Zu sagen, unter der Annahme, dass h' verwirklicht werde, werde das Wesen eben *nicht* die Verwirklichung von h „sehen", ist eine unzulässige Veränderung der Voraussetzungen; man untersucht dann nicht mehr die Situation, über die man etwas erfahren will, sondern tauscht sie unter der Hand gegen eine andere.

B2

Boethius, der das Argument, mit anderer Ansicht, analytisch vorbildlich diskutiert („Consolatio philosophiae", Buch V, 3. Prosa) ist der Auffassung, das Problem bestehe nicht, wenn Gott alle Dinge – gleichsam wie in einem großen Kontrollzentrum mit vielen Bildschirmen – zugleich sieht. Ich bin nicht davon überzeugt. Vielmehr scheint mir das obige Argument zu zeigen, dass man Gott, wenn man ihn denn annehmen will, lieber in der Zeit verankern sollte, damit er wenigstens die Vergangenheit kennen kann. Denn streng genommen müsste Gott für die Welt blind sein, wenn er der Zeit enthoben und zugleich der ontische Indeterminismus wahr wäre. Denn: Sieht er für einen beliebigen Zeitpunkt den verwirklichten Zustand, so schließt dies ja für alle Zeitpunkte *davor* die Möglichkeit von Alternativen aus; es gibt aber Zeitpunkte davor und Alternativen zu ihnen, wenn der ontische Indeterminismus wahr ist. Also sieht er für keinen Zeitpunkt den verwirklichten Zustand, wenn er der Zeit enthoben ist: Die Bildschirme bleiben leer.

Begründungen zu Teil II, Kapitel 3

B1

1. Seien e und e* events und $e = t \cap s$ sowie $e^* = t \cap s^*$.
2. Damit h und h' zu e gegenseitig zugänglich sind, müssen für jedes Element der Menge aller e', für die gilt, dass $t_{e'} \leq t_e$ $h(\alpha,e')$ und $h'(\alpha,e')$ für beliebiges α übereinstimmen.
3. Damit h und h' zu e* gegenseitig zugänglich sind, müssen für jedes Element der Menge aller e', für die gilt, dass $t_{e'} \leq t_{e^*}$ $h(\alpha,e')$ und $h'(\alpha,e')$ für beliebiges α übereinstimmen.
4. Laut 1. ist $t_e = t_{e^*}$. Also ist für die gegenseitige Zugänglichkeit von h und h' an e und an e* gerade dasselbe verlangt.

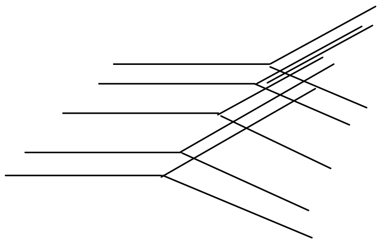
B2

Ein **LF×S5-Modell** (Weltbuch) ist ein Quintupel ⟨W, ⟨<, A⟩, H, A^*_e, V⟩, so dass gilt:
1. ⟨W, ⟨<, A⟩⟩ ist eine S5×K_{lin}-artige Partitionsstruktur;
2. H ist eine nichtleere Menge von Funktionen auf der Menge der *atomaren* Formeln von LF×S5, deren jede jeder atomaren Formel für jedes e aus W genau einen Wert aus {1,0} zuweist;
3. A^*_e ist eine Relation auf H, die definiert ist wie folgt: h A^*_e h' gdw
für jedes e' aus {e' | $t_{e'} \leq t_e$} und jede atomare Formel α gilt: h(α,e') = h'(α,e');
4. (a) Für zwei beliebige h, h' aus H gilt: es gibt ein e aus W, so dass h A^*_e h'
(Verinselungsfreiheit von A^*_e) (b) < *und* ihre Konverse sind randlos (Randlosigkeit);
5. V ist eine Interpretationsfunktion, die jeder wohlgeformten Formel für jedes Tripel ⟨t,s,h⟩ mit t aus T (der Klasse aller S5-Achsen von ⟨W, ⟨<, A⟩⟩), mit s aus (S die Klasse aller K_{lin}-Achsen von ⟨W, ⟨<, A⟩⟩) und mit h aus H genau einen Wert aus {1,0} zuweist, wobei gilt:

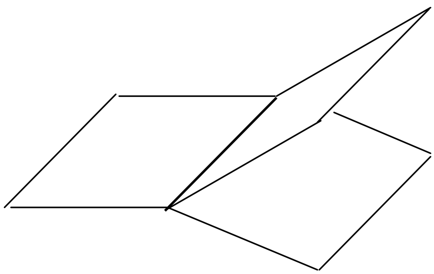
(0) V(α,⟨t,s,h⟩) =1	gdw α eine atomare Formel ist und es ein e aus W mit e= t ∩ s gibt, so dass h(α, e)=1
(i) V(~α,⟨t,s,h⟩)=1	gdw V(α,⟨t,s,h⟩)=0
(ii) V(α → β,⟨t,s,h⟩)=1	gdw V(α,⟨t,s,h⟩)=0 oder[&] V(β,⟨t,s,h⟩)=1
(iii) V(Eα, ⟨t,s,h⟩)=1	gdw für alle s' aus S gilt: wenn s A s', dann V(α,⟨t,s',h⟩)=1
(iv) V(Gα, ⟨t,s,h⟩)=1	gdw für alle t' aus T gilt: wenn t < t', dannV(α,⟨t',s,h⟩)=1
(v) V(Hα, ⟨t,s,h⟩)=1	gdw für alle t' aus T gilt: wenn t' < t, dannV(α,⟨t',s,h⟩)=1
(vi) V(□α,⟨t,s,h⟩)=1	gdw für jedes h' aus H gilt: V(α,⟨t,s,h'⟩)=1
(vii) V(Nα,⟨t,s,h⟩)=1	gdw für jedes h' aus H mit h $A^*_{t\cap s}$ h' gilt: V(α,⟨t,s,h'⟩)=1.

B3

Dies ist informal einsichtig.
1. Man kann sich ein LF×S5-Modell als Reihe von nebeneinander gelegten, auf jeweils einen Ort eingeschränkten LF-Modelle vorstellen, die alle dieselbe Verzweigungsstruktur aufweisen.



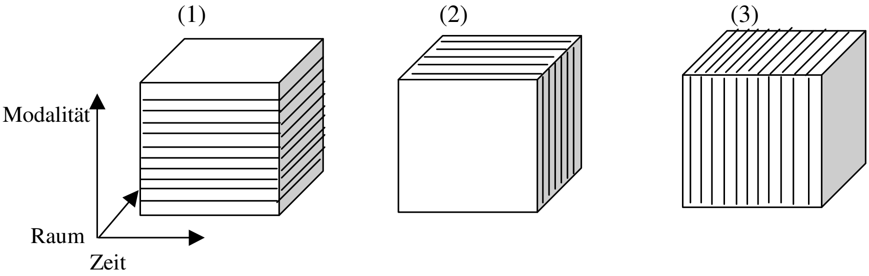
Die Zugänglichkeit zwischen diesen Modellen wird allein durch die Ortsoperatoren und die entsprechende Zugänglichkeitsrelation hergestellt. *Innerhalb* einer „Ortsfaser“ eines LF×S5-Modells müssen daher genau die Gesetze für LF-Modelle gelten, die das Verhalten von „S“ und „E“ offenlassen.
2. Man kann sich, wie erklärt, ein LF×S5-Modell als Stapel von teilweise aufeinander geleimten S5×K_{lin}-Modellen (Weltblättern) vorstellen.



Die Zugänglichkeit zwischen den Weltblättern wird allein durch „N“ und „M“ und die entsprechende Zugänglichkeitsrelation hergestellt („□“ ist trivial). *Innerhalb* eines Weltblatts müssen daher genau die Gesetze für $S5{\times}K_{lin}$-Modelle gelten, die das Verhalten von „N“ und „M“ offenlassen.

B4

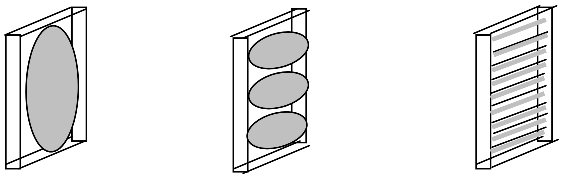
Bei beiden Operatorenpaaren handelt es sich um S5-Operatoren. In Kap. II 1.2 ließ sich eine LF-Struktur so verstehen, dass durch die temporale Zugänglichkeitsrelation und die universelle Zugänglichkeitsrelation für „□“ eine $S5{\times}K_{lin}$-Fläche aufgespannt wird, in welche die Zugänglichkeitsrelation für „N“ zusätzlich eingeflochten ist. Man kann sich also, ganz abgesehen von „N“, ein $LF{\times}S5_1$-Modell als Würfel vorstellen, in dem $S5_1{\times}K_{lin}$-Scheiben, nämlich Weltblätter, übereinander gestapelt sind, wobei die S5-Dimension jedes Weltblatts der räumlichen Zugänglichkeit entspricht (1). Man kann sich aber den Würfel auch so vorstellen, dass darin $S5_2{\times}K_{lin}$-Scheiben *nebeneinander* stehen und die $S5_2$-Dimension jeder Scheibe der Box-Notwendigkeit entspricht (2). Schließlich kann man sich den Würfel so vorstellen, dass darin $S5^2$-Scheiben *hintereinander* stehen, der Würfel also aus lauter durch die temporale Zugänglichkeitsrelation geordnete $S5^2$-Modelle besteht (3).



Die Zugänglichkeit zwischen diesen auf je einen Zeitpunkt eingeschränkten spatio-modalen Scheiben wird *allein* durch die temporale Zugänglichkeitsrelation hergestellt. *Innerhalb* einer spatio-modalen Scheibe müssen daher genau die Gesetze für $S5^2$ gelten. $S5^2$ ist aber durch eine verdoppelte S5-Axiomatik mit hinzugefügten (com)- und (chr)-Gesetzen *vollständig* axiomatisiert[6] (der Fall liegt hier anders als bei $S5^3$![7]).

B5

Man kann sich wiederum (wie in B4, (3)) ein $LF{\times}S5$-Modell als in spatio-modale Isochroniescheiben zerlegt vorstellen.



grau ausgefüllt: $S5^2$-Cluster in spatio-modalen Isochronen

In einer sehr frühen Scheibe mögen noch alle möglichen Weltverläufe gegenseitig zugänglich sein. In einer sehr späten Scheibe ist vielleicht jeder mögliche Weltverlauf nur noch mit sich selbst zugänglich,

[6] Vgl. Kap. I 2.1.1 und MDML, Corollary 5.10, S.230.
[7] Vgl. I 2.2.

und die Operatoren „M“ und „N“ sind trivialisiert. In Scheiben „dazwischen“ bilden die möglichen Weltverläufe Zugänglichkeits-Cluster im Sinne einer verinselten S5-Zugänglichkeit. Jedes dieser Cluster lässt sich als ein eigenes nicht-verinseltes $S5^2$-Modell auffassen, oder aber die ganze Scheibe als *verinseltes* $S5^2$-Modell. In solchen Modellen gelten aber die (com)- und (chr)-Gesetze.

Natürlich lässt sich der Beweis auch abstrakt führen:
(a) Angenommen, an ⟨t,s,h⟩ sei ⌈MSα⌉ wahr und t∩s = e. So gibt es ein h’ mit h A_e h’, so dass an ⟨t,s,h’⟩ ⌈Sα⌉ wahr ist. Sei h* ein solches h’, so ist ⌈Sα⌉ an ⟨t,s,h*⟩ wahr. Es gibt also ein s’, so dass α an ⟨t,s’,h*⟩ wahr ist. Sei s* ein solches s’. Dann ist α an ⟨t,s*,h*⟩ wahr. Sei e* = t∩s*. So gilt wegen der globalen Historizität nicht nur, dass h(β,e)=h*(β,e) für jeden Satzbuchstaben β, sondern auch h(β,e*)=h*(β,e*). Es ist also ⌈Mα⌉ wahr an ⟨t,s*,h⟩. Damit ist ⌈S Mα⌉ wahr an ⟨t,s,h⟩.
(b) Angenommen, an ⟨t,s,h⟩ sei ⌈SMα⌉ wahr und t∩s = e. So gibt es ein s’, so dass an ⟨t,s’,h⟩ ⌈Mα⌉ wahr ist. Sei s* ein solches s’, so dass also an ⟨t,s*,h⟩ ⌈Mα⌉ wahr ist und sei e* = t∩s*. So gibt es ein h’ mit h A_{e*} h’, so dass an ⟨t,s*,h’⟩ α wahr ist. Sei h* ein solches h’. So ist α an ⟨t,s*,h*⟩ und also ⌈Sα⌉ an ⟨t,s,h*⟩ wahr. Es gilt nun, wegen der globalen Historizität, nicht nur, dass h(β,e*)=h*(β,e*), sondern auch, dass h(β,e)=h*(β,e), also h A_e h’, so dass an ⟨t,s,h⟩ ⌈MSα⌉ wahr ist.
(c) Angenommen, an ⟨t,s,h⟩ sei ⌈MEα⌉ wahr und t∩s = e. So gibt es ein h’ mit h A_e h’, so dass an ⟨t,s,h’⟩ ⌈Eα⌉ wahr ist. Sei h* ein solches h’, so ist ⌈Eα⌉ an ⟨t,s,h*⟩ wahr. Es gilt also für jedes s’, dass α an ⟨t,s’,h*⟩ wahr ist. Dann ist α für jedes e’ mit e’ = t∩s’ an ⟨t,s’,h*⟩ wahr, wobei wegen der globalen Historizität für jeden Satzbuchstaben β gilt: h(β,e’)=h*(β,e’). Es ist also ⌈Mα⌉ wahr an ⟨t,s’,h⟩ für jedes s’. Damit ist ⌈EMα⌉ wahr an ⟨t,s,h⟩.
(d) (chr-SN) folgt einfach aus (chr-ME) mit der Substitution ~p / α, Kontraposition und DN.

B6

Wie B4 deutlich macht, weisen LF×S5-Strukturen, abgesehen von „N“ und der dazu gehörenden Zugänglichkeitsrelation, eine große Ähnlichkeit mit $S5^3$-Strukturen auf. Man lasse „N“ weg und benutze statt der feinkörnigen Zeitoperatoren die S5-Operatoren „O“ („Es ist[8] hier immer der Fall, dass“) und „T“ („Es ist hier manchmal der Fall, dass“). Dann erhält man für jedes LF-Modell ein entsprechendes $S5^3$-Modell. Seine drei Dimensionen würden nicht mehr als Raumdimensionen gedeutet, sondern, wie in der obigen Darstellung, als Raum, Zeit und Modalität. Diese Modelle verifizieren grundsätzlich die in B16 zu I 2 diskutierte problematische Formel (cub), die sich nun wie folgt notieren lässt:

$$(\Diamond p \wedge \mathrm{S}\, q \wedge \mathrm{T}r) \rightarrow (\Diamond \mathrm{S}\,\mathrm{T}(\ \mathrm{T}\,(\,\mathrm{S}\,p \wedge \Diamond q) \wedge \mathrm{S}\,(\,\mathrm{T}p \wedge \Diamond\, r) \wedge \Diamond(\,\mathrm{T}q\ \wedge \mathrm{S}\, r))$$

Diese Formel ist aber (vgl. B16 zu I 2) nicht mit einem dreifachen S5 mit (com)- und (chr)-Axiomen herleitbar. Nun hat zwar das Herleitungsspiel für LF einige Ressourcen mehr als das Herleitungsspiel für $S5^3$. Ein Beweis *damit* ist nach dem Gesagten noch nicht ausgeschlossen, wäre aber überraschend.

B7

1	PENp → EPNp	(chr)	PSNp → SPNp	(com)
2	EPNp → ENPp	mit (PN) und DR 1	SPNp → SNPp	mit (PN) und DR3
3	ENPp → NEPp	(com)	SNPp → NSPp	(chr)
4	PENp → NEPp	1 – 3, PC (Kettenschluss)	PSNp → NSPp	1–3, PC.

B8

Dass die Formeln „Sp → NSp“, „Sp → SNp“, „Ep → NEp“, „Ep → ENp“ allesamt nicht mit dem skizzierten Herleitungsspiel *herleitbar* sind, wenn dieses korrekt ist, ist klar. Wenn man für „p“ einfach „Fp“ einsetzt, was mit Subst erlaubt ist, dann erhält man „SFp → NSFp“ etc. Diese Einsetzungen lassen sich in Weltbüchern ebenso leicht falsifizieren wie „Fp → NFp“ in Baumstrukturen. „Sp → NSp“ etc. sind jedoch LF×S5-allgemeingültig:

[8] mit atemporalem Präsens.

(a) Ist „Sp“ zu t an s in h wahr, dann gibt es ein s’, so dass „p“ zu t an s’ in h wahr ist. Sei s* ein solches s’, so gilt: Ist „p“ zu t an s* in h wahr, so ist wegen der Historizitätsforderung auch „Np“ zu t an s* in h wahr. Damit gibt es mit s* ein von s aus zugängliches s’, so dass „Np“ an zu t an s’ in h wahr ist. Also ist „SNp“ zu t an s in h wahr. Also ist „Sp → SNp“ LF×S5-allgemeingültig.
(b) Ist „Sp“ zu t an s in h wahr, so auch „SNp“ (vgl. (a)). Ist „SNp“ zu t an s in h wahr, so, wegen (chr) auch „NSp“. Ist „Sp“ zu t an s in h wahr, so also auch „NSp“, mithin ist „Sp → NSp“ LF×S5-allgemeingültig.
(c) Ist „Ep“ zu t an s in h wahr, dann gilt für alle s’, dass „p“ zu t an s’ in h wahr ist. Sei s* ein beliebiges s’, so gilt: Ist „p“ zu t an s* in h wahr, so ist wegen der Historizitätsforderung auch „Np“ zu t an s* in h wahr. Da s* beliebig gewählt war, gilt dies für alle s’. Also ist „ENp“ zu t an s in h wahr. Also ist „Ep → ENp“ LF×S5-allgemeingültig.
(d) Ist „Ep“ zu t an s in h wahr, so auch „ENp“ (vgl. (c)). Ist „ENp“ zu t an s in h wahr, so, wegen (com) auch „NEp“. Ist „Ep“ zu t an s in h wahr, so also auch „NEp“, mithin ist „Ep → NEp“ LF×S5-allgemeingültig.

B9

Die Herleitung ist gerade die in B7 zu Kap. I 2 angegebene mit „S“ für „$\Diamond_1$“, „M“ für „$\Diamond_2$“ etc.

B10

Man geht analog zu B9 vor, nur nun mit „S“ für „$\Diamond_2$“, „M“ für „$\Diamond_1$“ etc.

B11

1	Mp → SMp	(T-T1)
2	SMp → MSp	(com)
3	MSp → SMSp	(T-T1)
4	SMSp → EMSp	(rom)
5	Mp → EMSp	1 – 4, Kettenschluss **(a)**

1	Np → SNp	(T-T1)	1	SNSp → ESNSp	(S5-E) α = NSp **(d)**
2	SNp → ESNp	(S5-E) α = Np **(b)**	2	SNSp → NSSp	(chr)
3	SNp → NSp	(chr)	3	ESNSp → ENSSp	2, DR 1 (K)
4	ESNp → ENSp	3, DR 1 (K) **(h)**	4	ESNSp → ENSp	3, S5 (S-Reduktion) **(e)**
5	Np → ESNp	1, 2, PC **(c)**	5	SNSp → ENSp	1, 4, PC.
6	Np → ENSp	5, 4, PC **(f)**			

B12

(d*) Ein Gegenbeispiel ergibt sich analog zum Gegenbeispiel zur Konversen von (h) oben, wenn man die dort skizzierten spatio-modalen Isochronen als in der Zukunft des Bewertungskontextes ansieht: Es mag überall gelten, dass es für jeden möglichen Weltverlauf zukünftigen einen „p“-Ort gibt („NFSp“). Aber dies kann in jedem möglichen Weltverlauf ein *anderer* Ort sein. Durch „SNFp“ wird aber behauptet, dass es mindestens *einen* Ort gibt, der in allen möglichen Weltverläufen ein zukünftiger „p“-Ort ist.

(e*) Man wird sicher zugeben, dass es einen Ort gibt, an dem noch offensteht, ob es *dort* je schneien wird („S~NFp“), z.B. Timbuktu. Dennoch wird man realistischerweise bestreiten, dass es noch offensteht, ob es *überhaupt* irgendwo je wieder schneien wird („~NFSp“).

B13

(d)	*	1	SNFp	Annahme
	*	2	NSFp	1, (chr)
	*	3	NFSp	2, (com)
		4	SNFp → NFSp	1, 3, kond.

(e)	1	EFp → SFp	T-T2	
	2	NEFp → NSFp	1, DR 1	
	3	NEFp → NFSp	2, mit (com)	
	4	ENFp → NFSp	3, mit (com) verstärkt	
	5	~S~NFp → NFSp	4, Def. S	
	6	~ NFSp → S~NFp	5, PC (Kp.).	
(f/f*)	1	ENSFp → NSFp	T-E	
	2	SNSFp → ENSFp	(rom)	
	3	NSFp → SNSFp	T-T1	
	4	NSFp → ENSFp	2, 3, PC (Kettenschluss)	
	5	NSFp ≡ ENSFp	1, 4, PC (Def. ≡)	
	6	NFSp ≡ ENSFp	5, mit (com)	
	7	~ENSFp ≡ ~NFSp	6, PC (doppelte Kp.)	
	8	S~NSFp ≡ ~NFSp	mit T-K3	
	9	S~NSFp → ~NFSp	8, PC (Def. ≡)	(f)
	10	~NFSp → S~NSFp	8, PC (Def. ≡)	(f*).

Das Gegenbeispiel zu (e*) greift für (f) nicht. Denn wenn es einen Ort gibt, an dem es noch offensteht, ob es *überhaupt irgendwo* je wieder schneien wird, dann steht es *auch hier* noch offen, ob es überhaupt irgendwo je wieder schneien wird.

B14

Aus der Forderung folgt sofort, dass auch die Zugänglichkeitsfläche für „N_∇" bezüglich eines events e dieses event selbst enthalten muss. Im Falle des ausgesparten Dreiecks ist die Zugänglichkeitsfläche eine *echte* Teilmenge von W, denn aus W sind dabei ja gerade die events in Form des Richtung e auf der Spitze stehenden Dreiecks ausgespart.

B15

Die Modelldefinition für 3N lautet:

Ein **3N-Modell** ist ein Tupel $\langle W, \langle A_1, A_2\rangle, H, A^*, F_\Delta, F_\nabla, A^{N\Delta}, A^{N\nabla}, V\rangle$, so dass gilt:
Es gelten die Klauseln 1. – 5. der Modelldefinition für LF×S5 und:

4a. F_Δ ist eine Funktion, die jedem e aus W eine Menge Δ_e zuweist, so dass gilt:
(a) $e \in \Delta_e$
(b) $\Delta_e \subseteq \{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ (mit e' aus W)

4b. F_∇ ist eine Funktion, die jedem e aus W eine Menge ∇_e zuweist, so dass gilt:
Für alle e, e': $e \in \nabla_{e'}$ gdw $e' \in \Delta_e$. (Konverse)

4c. $A^{N\Delta}$ ist eine Relation auf H, die definiert ist wie folgt:
$h\ A^{N\Delta}_e\ h'$ gdw für jedes e' aus Δ_e und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$

4d. $A^{N\nabla}$ ist eine Relation auf H, die definiert ist wie folgt:
$h\ A^{N\nabla}_e\ h'$ gdw für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ und jede atomare Formel α gilt:
$h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$[9]

4e. Für alle e, e': Wenn $t_{e'} < t_e$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \Delta_e$ (maximale Rückerstreckung)
4f. Für alle e, e': Wenn $e' \in \Delta_e$, dann $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_e$. (Rückwärts-Inklusion)
4g. Für alle e, e': Wenn $t_e < t_{e'}$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \nabla_e$ (maximale Vorwärtserstreckung)
4h. Für alle e, e': Wenn $e \in \nabla_{e'}$, dann $\nabla_e \subseteq \nabla_{e'}$. (Vorwärts-Kegelinklusion)
4i. Für alle e: Es gibt kein e' aus t_e mit $e \neq e'$, so dass $e' \in \Delta_e$ (echte Spitze)

5b. ...
(viii) $V(N_\Delta\alpha,\langle t,s,h\rangle)=1$ gdw es ein e aus W mit $e = t \cap s$ gibt, so dass für jedes h' aus H mit $h\ A^{N\Delta}_e\ h'$ gilt: $V(\alpha,\langle t,s,h'\rangle)=1$.
(ix) $V(N_\nabla\alpha,\langle t,s,h\rangle)=1$ gdw es ein e aus W mit $e = t \cap s$ gibt, so dass für jedes h' aus H mit $h\ A^{N\nabla}_e\ h'$ gilt: $V(\alpha,\langle t,s,h'\rangle)=1$.

---

[9] „\" heißt „*außer* allen Elementen von...".

B16

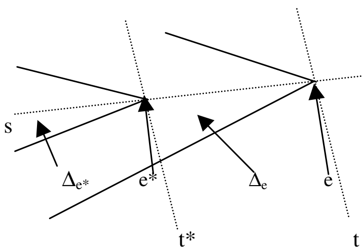
Angenommen, e' $\in \Delta_e$. Außerdem angenommen, h* gehöre zu $H^{AN\Delta}{}_{e,h}$. So gilt für jeden Satzbuchstaben β und jedes e" aus Δ_e: h(β,e") = h*(β,e). Nun ist, wegen der Forderung der Kegelinklusion, $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_e$. Ist h* mit h für *ganz* Δ_e gleich beschriftet, so erst recht für jede Teilmenge davon, also auch für $\Delta_{e'}$. Es gilt also auch für jeden Satzbuchstaben β und jedes e" aus $\Delta_{e'}$: h(β,e") = h*(β,e'). Demnach gehört h* gehöre zu $H^{AN\Delta}{}_{e',h}$. Da h* beliebig gewählt war, lässt sich verallgemeinern, dass jedes h', dass zu $H^{AN\Delta}{}_{e,h}$ gehört, auch zu $H^{AN\Delta}{}_{e',h}$ gehört: $H^{AN\Delta}{}_{e,h} \subseteq H^{AN\Delta}{}_{e',h}$.

B17

Angenommen, $t_{e'} < t_e$ und h* ist in $H^{A}{}_{e,h}$ enthalten. So sind, weil h* ist in $H^{A}{}_{e,h}$ enthalten ist, h und h* bis zu incl. t_e auf ganzer Breite gleich beschriftet. Dann sind aber, weil $t_{e'} < t_e$ gilt, h und h* erst recht bis zu incl. $t_{e'}$ auf ganzer Breite gleich beschriftet. h* ist also auch in $H^{A}{}_{e',h}$ enthalten, was sich verallgemeinern lässt dazu, dass jedes h' aus $H^{A}{}_{e,h}$ auch in $H^{A}{}_{e',h}$ enthalten ist, also gilt: $H^{A}{}_{e,h} \subseteq H^{A}{}_{e',h}$.

B18

Angenommen, $\ulcorner PN_\Delta\alpha \urcorner$ sei an ⟨t,s,h⟩ wahr und t∩s =e. Dann gibt es ein t' mit t'<t, so dass $\ulcorner N_\Delta\alpha \urcorner$ an t' wahr ist. Sei t* ein solches t' und sei e*=⟨t*,s⟩. Dann gilt für alle h' mit $A^{N\Delta}{}_{e^*}$ h: α ist wahr an ⟨t*,s,h'⟩. So gilt für jedes h' mit h' $A^{N\Delta}{}_{e^*}$ h, weil t* < t: $\ulcorner P\alpha \urcorner$ ist wahr an ⟨t,s,h'⟩ (es gilt ja: $t^*=t_{e^*}$). Außerdem gilt wegen der Forderung der maximalen Rückerstreckung: e* ist in Δ_e enthalten (es gilt ja: $t^*=t_{e^*}$, t_e = t, s = s_e = s_{e^*} und t* < t). Nun gilt, wie soeben bewiesen: Wenn e* $\in \Delta_e$, dann $H^{AN\Delta}{}_{e,h} \subseteq H^{AN\Delta}{}_{e^*,h}$. Also gilt: Jedes h' aus $H^{AN\Delta}{}_{e,h}$ ist auch schon in $H^{AN\Delta}{}_{e^*,h}$ enthalten. Also gilt, wenn sogar für jedes h' aus $H^{AN\Delta}{}_{e^*,h}$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr ist, erst recht, dass für jedes h' aus $H^{AN\Delta}{}_{e,h}$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr ist. Damit ist $\ulcorner N_\Delta P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr.

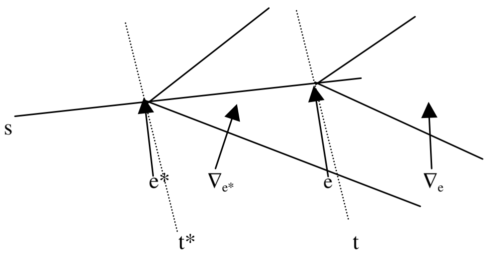


B19

Angenommen, e $\in \nabla_{e'}$. Außerdem angenommen, h* gehöre zu $H^{AN\nabla}{}_{e,h}$. So gilt für jeden Satzbuchstaben β und jedes e" aus W/∇_e: h(β,e") = h*(β,e): h* und h sind außer auf ∇_e komplett gleich beschriftet. Nun ist, wegen der Forderung der Kegelinklusion, $\nabla_e \subseteq \nabla_{e'}$. Sind h* und h sogar für W/∇_e komplett gleich beschriftet, so erst recht für W/$\nabla_{e'}$. h* gehört also zu $H^{AN\nabla}{}_{e',h}$. Das lässt sich von h* auf jedes h' aus $H^{AN\nabla}{}_{e,h}$ verallgemeinern: Jedes h' aus $H^{AN\Delta}{}_{e,h}$ gehört schon zu $H^{AN\Delta}{}_{e',h}$, also gilt: $H^{AN\Delta}{}_{e',h} \subseteq H^{AN\Delta}{}_{e,h}$.

B20

Angenommen, $\ulcorner PN_\nabla\alpha \urcorner$ sei an ⟨t,s,h⟩ wahr und t∩s =e. Dann gibt es ein t' mit t'<t, so dass $\ulcorner N_\nabla\alpha \urcorner$ an t' wahr ist. Sei t* ein solches t' und sei e*=⟨t*,s⟩. Dann gilt für alle h' mit $A^{N\nabla}{}_{e^*}$ h: α ist wahr an ⟨t*,s,h'⟩. So gilt für jedes h' mit h' $A^{N\nabla}{}_{e^*}$ h, weil t* < t: $\ulcorner P\alpha \urcorner$ ist wahr an ⟨t,s,h'⟩ (es gilt ja: $t^*=t_{e^*}$). Nun gilt wegen der Forderung der maximalen Vorwärts-Erstreckung: e ist in ∇_{e^*} enthalten. Nun gilt: Wenn e $\in \nabla_{e^*}$, dann $H^{AN\nabla}{}_{e,h} \subseteq H^{AN\nabla}{}_{e^*,h}$. Also gilt: Jedes h' aus $H^{AN\nabla}{}_{e,h}$ ist auch schon in $H^{AN\nabla}{}_{e^*,h}$ enthalten. Also gilt, wenn sogar für jedes h' aus $H^{AN\nabla}{}_{e^*,h}$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr ist, erst recht, dass für jedes h' aus $H^{AN\nabla}{}_{e,h}$ $\ulcorner P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr ist. Damit ist $\ulcorner N_\nabla P\alpha \urcorner$ an ⟨t,s,h'⟩ wahr.



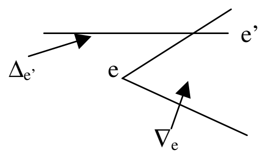
B21

1. (i) e R^Δ e’ gdw $e \in \Delta_{e'}$ & $e \neq e'$. e = e, also gilt nie: e R^Δ e.
   (ii) Angenommen, e R^Δ e’ und e’ R^Δ e”. So gilt $e \in \Delta_{e'}$ und $e' \in \Delta_{e''}$. So gilt wegen der Kegel-Inklusion: Wenn $e' \in \Delta_{e''}$, dann $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_{e''}$, also $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_{e''}$. Also ist e auch in $\Delta_{e''}$ enthalten: $e \in \Delta_{e''}$. Kann e = e“ sein? Nein. Denn es ist nach Voraussetzung $e' \neq e''$. Es gilt deshalb nach Def. $\Delta_{e''}$ und der Eigenschaft der echten Spitze, dass $t_{e'} < t_{e''}$. Ferner gilt wegen Def. $\Delta_{e'}$ und der Eigenschaft der echten Spitze, dass $t_e < t_{e'}$. Es gilt also wegen Transitivität von <: $t_e < t_{e''}$ und also wegen Irreflexivität von <: $t_e \neq t_{e''}$, somit auch $e \neq e''$. Also gilt: e R^Δ e“.
   (iii) Aus (i) und (ii) folgt die Asymmetrie: Aus aRb & bRa würde mit der Transitivität aRa folgen - im Widerspruch zur Irreflexivität.

2. (i) e R^∇ e’ gdw $e \in \nabla_{e'}$. Aus Def. ∇_e ergibt sich sofort: $e \notin \nabla_e$. Also hat man nie: e R^∇ e.
   (ii) Angenommen, e R^∇ e’ und e’ R^∇ e”. So gilt $e \in \nabla_{e'}$ und $e' \in \nabla_{e''}$. So gilt wegen der Kegel-Inklusion: $\nabla_{e'} \subseteq \nabla_{e''}$. Also ist e auch in $\nabla_{e''}$ enthalten. Es gilt deshalb: e R^∇ e“.
   (iii) vgl. 1.

B22

So hätte e’ im normal geformten Vorwärtskegel von e’ liegen, aber der Rückwärts-“Kegel“ von e’ aus einer bloßen Linie bestehen können, ohne e zu enthalten.



B23

e R^Δ e’ ist definiert als $e \in \Delta_{e'}$ & $e \neq e'$. e R^∇ e’ ist definiert als $e \in \nabla_{e'}$. Das lässt sich wegen der Irreflexivität von R^∇ trivialerweise expandieren zu: e R^∇ e’ gdw $e \in \nabla_{e'}$ & $e' \neq e$. Es gilt nach der neuen Forderung: $e \in \nabla_{e'}$ gdw $e' \in \Delta_e$. Also gilt: e R^∇ e’ gdw $e' \in \Delta_e$ & $e' \neq e$. Das lässt sich umlabeln zu: e’ R^∇ e gdw $e \in \Delta_{e'}$ & $e \neq e'$, dem Definiens von „e R^Δ e’“. Also gilt: e R^Δ e’ gdw e’ R^∇ e.

B24

1. Reflexivität: Sei h ein Element von H und e von W eines 3N-Modells: Für jedes e’ aus Δ_e und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h(\alpha,e')$, also h $A^{N\Delta}{}_e$ h. Und: für jedes e’ aus W \ ∇_e und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h(\alpha,e')$, also h $A^{N\nabla}{}_e$ h.

2. Symmetrie: Angenommen h $A^{N\Delta}{}_e$ h'. Dann gilt für jedes e' aus Δ_e und jede atomare Formel α: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$, also $h'(\alpha,e') = h(\alpha,e')$, also h' $A^{N\Delta}{}_e$ h.
Und: Angenommen h $A^{N\nabla}{}_e$ h'. Dann gilt für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ und jede atomare Formel α: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$, also $h'(\alpha,e') = h(\alpha,e')$, also h' $A^{N\nabla}{}_e$ h.

3. Transitivität: Angenommen (a) h $A^{N\Delta}{}_e$ h', (b) h' $A^{N\Delta}{}_e$ h". Wegen (a) gilt: für jedes e' aus Δ_e und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$; wegen (b) gilt: für jedes e' aus Δ_e und jede atomare Formel α gilt: $h'(\alpha,e') = h''(\alpha,e')$. Also gilt für jedes e' aus Δ_e und jede atomare Formel α: $h(\alpha,e') = h''(\alpha,e')$, also h $A^{N\Delta}{}_e$ h". Angenommen (a) h $A^{N\nabla}{}_e$ h', (b) h' $A^{N\nabla}{}_e$ h". Wegen (a) gilt: für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ und jede atomare Formel α gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$; wegen (b) gilt: für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ und jede atomare Formel α gilt: $h'(\alpha,e') = h''(\alpha,e')$. Also gilt für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ und jede atomare Formel α: $h(\alpha,e') = h''(\alpha,e')$, also h $A^{N\Delta}{}_e$ h".

B25

(a) Damit „□p" an ⟨t,s,h⟩ wahr wird, muss „p" an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' aus H, der Menge aller möglichen Weltverläufe des Modells, wahr sein. Damit ist „p" *a fortiori* für jedes h' jeder Teilmenge von H wahr. Damit „$N_\Delta p$" oder „$N_\nabla p$" an ⟨t,s,h⟩ wahr ist, ist es aber bloß erforderlich, dass „p" an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' aus der über $A^{N\Delta}$ bzw. $A^{N\nabla}$ zugänglichen Teilmenge von H wahr ist. Das Umgekehrte gilt offensichtlich nicht: „p" kann an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' aus der über $A^{N\Delta}$ bzw. $A^{N\nabla}$ Teilmenge von H wahr sein, ohne für jedes h' aus H überhaupt wahr zu sein.

(b) (i) Angenommen, „$N_\Delta p$" ist an ⟨t,s,h⟩ wahr und $t \cap s = e$. Dann ist „p" an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' aus der über $A^{N\Delta}$ zugänglichen Teilmenge von H wahr. Zu dieser Menge gehört jedes h', für das gilt: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus Δ_e. Jedes h', für das gilt, dass $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ ist Element dieser Menge, denn es gilt per def.: $\Delta_e \subseteq \{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$. Also ist, nach der Def. von A, „p" auch an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' aus der über A zugänglichen Teilmenge von H wahr. Also ist auch „Np" an ⟨t,s,h⟩ wahr.
(ii) Das Umgekehrte muss, falls Δ_e *echte* Teilmenge von $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ ist, nicht gelten. Denn angenommen, „Np" ist an ⟨t,s,h⟩ wahr und $t \cap s = e$. Dafür muss für jeden Satzbuchstaben α und jedes h' mit $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ „p" an ⟨t,s,h'⟩ wahr sein. Doch für die Wahrheit von „$N_\Delta p$" an ⟨t,s,h⟩ ist mehr verlangt als das: Dafür muss für jeden Satzbuchstaben α und jedes h' mit $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus Δ_e „p" an ⟨t,s,h'⟩ wahr sein. Es mag nun aber einen Satzbuchstaben „q", ein e" und ein h" geben, so dass $h(\alpha,e'') \neq h'(\alpha,e'')$, wobei e" zu $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}/\Delta_e$ gehört, so dass „p" an ⟨t,s,h"⟩ falsch ist. Ein solches h" ist per A* an e nicht zugänglich, wohl aber per $A^{N\Delta}$, so dass dadurch verhindert wird, dass „$N_\Delta p$" an ⟨t,s,h⟩ wahr wird.

(c) (i) Angenommen, „Np" ist an ⟨t,s,h⟩ wahr und $t \cap s = e$, α ein Satzbuchstabe. Dann gilt für *jedes* Element h' der Menge aller Elemente von H mit $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$, dass „p" an ⟨t,s,h'⟩ wahr ist. Nun ist jedes h', für das gilt, dass $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$, ein Element dieser Menge. Denn ∇_e ist echte Teilmenge von $\{e' \mid t_e < t_{e'}\}$. Daraus folgt, dass kein Element von $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ Element von ∇_e ist, da $\{e' \mid t_e < t_{e'}\}$ und $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ aufgrund der Def. der Partitionsstruktur disjunkt sein müssen. Also ist „p" an ⟨t,s,h'⟩ für jedes h' mit $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ wahr. Also ist „$N_\nabla p$" auch für ⟨t,s,h⟩ wahr.
(ii) Das Umgekehrte muss nicht gelten: Angenommen, „$N_\nabla p$" ist an ⟨t,s,h⟩ wahr und $t \cap s = e$. Dann gilt zwar, dass für *jedes* Element h' der Menge aller Elemente von H mit $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $W \setminus \nabla_e$ „p" an ⟨t,s,h⟩ wahr sein muss. Doch es mag sein, dass diese Menge *echte* Teilmenge der Menge aller Elemente von H ist, für die $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$. In diesem Fall gibt es ein h" aus der Menge aller Elemente von H ist, für die $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$ für jedes e' aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$, und es gibt ein e" aus $(W \setminus \nabla_e\ w)\ /\ \{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ und einen Satzbuchstaben „q", so dass $h(\alpha,e') \neq h''(\alpha,e')$, wobei „p" an ⟨t,s,h"⟩ falsch sein mag. Ein solches h" ist über $A^{N\nabla}$ von e aus nicht zugänglich und schadet für „$N_\nabla p$" nichts, ist aber über A* an e zugänglich und verhindert so, dass „Np" an ⟨t,s,h⟩ wahr wird.

B26

Man erhält (mit $k \in \{\Delta,\nabla\}$, $i \in \{\Delta,\nabla\}$, $k \neq i$):

(com-$\Diamond M_i$) $\ulcorner \Diamond M_i\alpha \equiv M_i\Diamond\alpha \urcorner$	(com-M_iM) $\ulcorner M_iM\alpha \equiv MM_i\alpha \urcorner$	(com- M_iM_k) $\ulcorner M_iM_k\alpha \equiv M_k M_i\alpha \urcorner$
(com-$\Box N_i$) $\ulcorner \Box N_i\alpha \equiv N_i\Box\alpha \urcorner$	(com-N_iN) $\ulcorner N_iN\alpha \equiv NN_i\alpha \urcorner$	(com-N_iN_k) $\ulcorner N_iN_k\alpha \equiv N_kN_i\alpha \urcorner$
(chr-$\Diamond N_i$) $\ulcorner \Diamond N_i\alpha \rightarrow N_i\Diamond\alpha \urcorner$	(com-M_iN) $\ulcorner M_iN\alpha \rightarrow NM_i\alpha \urcorner$	(com-M_iN_k) $\ulcorner M_iN_k\alpha \rightarrow N_kM_i\alpha \urcorner$
(chr-$M_i\Box$) $\ulcorner M_i\Box\alpha \rightarrow \Box M_i\alpha \urcorner$	(com-MN_i) $\ulcorner MN_i\alpha \rightarrow N_iM\alpha \urcorner$	[(com-M_kN_i) $\ulcorner M_iN_k\alpha \rightarrow N_iM_k\alpha \urcorner$]

B27

(a) (i) Angenommen, „p“ ist an $\langle t,s,h\rangle$ wahr und $t \cap s = e$. Dann ist „p“ für jedes h’ mit h $A^{N\Delta}{}_e$ h’ an $\langle t,s,h'\rangle$. Denn e gehört selbst per def. zu Δ_e, und muss daher h’(p,e) = h(p,e) sein, damit für jedes e’ aus Δ_e gelten kann: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$. Also ist auch „$N_\Delta p$“ an $\langle t,s,h\rangle$ wahr.
(ii) Es gilt aber z.B. nicht allgemein „$Fp \rightarrow N_\Delta Fp$“. Denn es gilt ja allgemein „$N_\Delta p \rightarrow Np$“, also mit Subst „$N_\Delta Fp \rightarrow NFp$“. Würde „$Fp \rightarrow N_\Delta Fp$“ gelten, so erhielte man im Kettenschluss „$Fp \rightarrow NFp$“. Es wurde aber bereits bewiesen, dass „$Fp \rightarrow NFp$“ nicht TxW-allgemeingültig und damit auch nicht 3N-allgemeingültig ist.

(b) (i) Angenommen, „p“ ist an $\langle t,s,h\rangle$ wahr und $t \cap s = e$. Dann ist „p“ für jedes h’ mit h $A^{N\nabla}{}_e$ h’ an $\langle t,s,h'\rangle$. Denn e ist Element von $W \setminus \nabla_e$, weil kein Element von $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ Element von ∇_e ist, aber e trivialerweise zu $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ gehört. Es muss daher h’(p,e) = h(p,e) sein, damit für jedes e’ aus $W\setminus\nabla_e$ gelten kann: $h(\alpha,e') = h'(\alpha,e')$. Also ist auch „$N_\nabla p$“ an $\langle t,s,h\rangle$ wahr.
(ii) Es gilt aber z.B. nicht allgemein „$Fp \rightarrow N_\nabla Fp$“. Denn angenommen (bei $t \cap s = e$), es gibt ein e’ mit $t_e < t_{e'}$, so dass e’ zu ∇_e gehört. Dann ist „Fp“ an $\langle t,s,h\rangle$ wahr. Aber es mag dennoch ein h’ mit h $A^{N\nabla}$ h’ geben, so dass h’(p,e’)=0, was die Wahrheit von „$N_\nabla Fp$“ an $\langle t,s,h\rangle$ verhindert.

B28

(a) „$Sp \rightarrow NSp$“ gilt für Satzbuchstaben. Es gilt zudem nach den Hierarchien aus (2): „$NSp \rightarrow N_\nabla Sp$“. Also gilt auch für Satzbuchstaben „$Sp \rightarrow N_\nabla Sp$“. An intendierten Modellen kann man sich das so veranschaulichen: Alle von $\langle t,s,h\rangle$ aus bei $t \cap s = e$ an e gegenseitig per $A^{N\nabla}$ zugänglichen Weltblätter sind auch per A (*simpliciter*) gegenseitig zugänglich: Die „N_∇“-Verzweigung enthält die komplette „N“-Verzweigungskante.

(b) Es kann folgende Situation auftreten: „Sp“ ist an $\langle t,s,h\rangle$ wahr. Es gibt aber ein h’, so dass h’ an e = $t \cap s$ von h aus per $A^{N\Delta}$ zugänglich ist und „Sp“ an $\langle t,s,h'\rangle$ falsch ist, weil es kein s’ gibt, so dass „p“ an $\langle t,s',h'\rangle$ wahr ist. In intendierten Modellen kommen ja die „N“-Verzweigungskante und das Zugänglichkeitsdreieck für $A^{N\Delta}$ überhaupt nur an dessen Spitze überein!

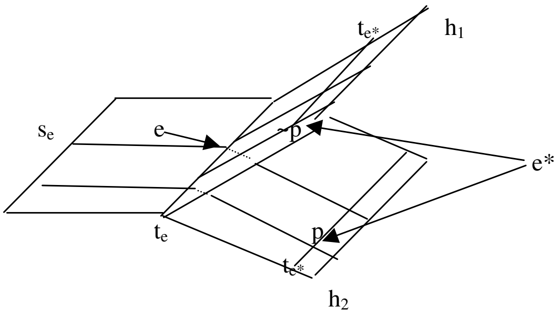
B29

(a) Es kann „EPp“ an $\langle t,s,h\rangle$ (mit $t \cap s = e$) wahr sein, so dass für jedes s’ „Pp“ an $\langle t,s',h\rangle$ wahr ist, es also für jedes s’ ein t’ mit t’ < t gibt, so dass „p“ an $\langle t',s',h\rangle$ wahr ist. Sei t* ein solches t’ und s* ein solches s’, und zwar so, dass $\langle t^*,s^*\rangle = e^*$ und e* nicht in Δ_e enthalten ist. So kann es ein h’ geben, so dass h’(p,e*)=0, also h’(p,e*)≠ h(p,e*) und dennoch h’ $A^{N\Delta}$ h vorliegt. Sei h* ein solches h’. So ist „EPp“ an $\langle t^*,s^*,h^*\rangle$ falsch und so auch „$N_\Delta EPp$“ an $\langle t,s,h\rangle$ falsch.
(b) Man argumentiert analog mit der Annahme, dass „p“ zu t bezüglich h* nirgendwo wahr ist.

B30

(a)/ (b)	1 $(S)p \rightarrow N(S)p$	für Satzbuchstaben!
	2 $N_\nabla (S)p \rightarrow N_\nabla N(S)p$	1, DR 1
	3 $N_\nabla (S)p \rightarrow NN_\nabla (S)p$	2, mit (com)

(c) Gegenbeispiel zu „$N_\nabla SFp \rightarrow NN_\nabla SFp$“ und „$N_\nabla Fp \rightarrow NN_\nabla Fp$“. Betrachten wir ein einfaches Modell, in dem nur zwei Weltblätter vorkommen, deren Bewertungsfunktionen für die Zukunft von t_e so sehr voneinander abweichen, dass jedes Blatt allein mit sich selbst per $A^{N\nabla}$ zugänglich ist. In diesem Fall ist „$N_\nabla SFp$“ gerade dann wahr, wenn „SFp“ wahr ist, und „$NN_\nabla SFp$“ ist gerade dann wahr, wenn „NSFp“ wahr ist. Ist „p“ allein an s_{e*} irgendwann nach t_e in irgendeinem Weltverlauf wahr, so ist „SFp“ an $\langle t_e, s_e \rangle$ gerade dann wahr, wenn „Fp“ wahr ist, und „NSFp“ ist gerade dann wahr, wenn „NFp“ wahr ist. „$Fp \rightarrow NFp$“ lässt sich aber leicht falsifizieren.

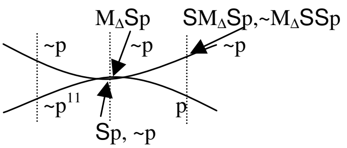


Ein Gegenbeispiel in einem *intendierten* Modell ist weniger leicht zu zeichnen, aber gleichwohl gut zu beschreiben. In diesem Fall muss man sich an der Stelle von h_1 und h_2 jeweils ein ganzes Bündel von per $A^{N\nabla}$ an e gegenseitig zugänglichen Weltverläufen denken. e* liegt in der Zukunft von t_e, aber außerhalb von ∇_e. Während im einen Bündel durchgängig an e* „p“ wahr ist, ist „p“ in jedem Weltverlauf des anderen Bündels falsch. Alle Weltverläufe beider Bündel sind aber bis zu incl. t_e identisch. Vgl. dazu Kap. II 3.3.3.1.

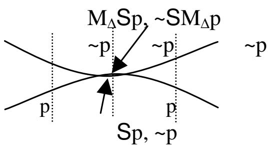
B31

Man kann sich einfache Gegenbespiele für die linke Seite an spatio-modalen Isochronen veranschaulichen, die an geeigneter Stelle auf offensichtliche Weise aus der Darstellung eines der intendierten 3N-Modelle für ein bestimmtes event e herauspräpariert wurden. Der Querschnitt verläuft genau durch t_e. Die gestrichelten Linien stellen also Orte dar, nicht Zeiten (man sieht das Modell „von vorne“). Parallelverlauf der je zwei als Linien dargestellten Momentanräume zeigt die „N_Δ“-Zugänglichkeit an:

zu (com-SM_Δ) (mit „Sp“ für α)[10]



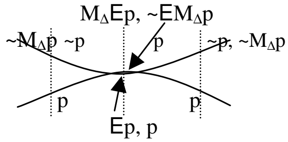
zu (com-$M_\Delta S$)



[10] „$SM_\Delta p \rightarrow M_\Delta Sp$” (mit Satzbuchstaben!) *ist* allgemeingültig: Gibt es irgendwo einen Ort, an dem „p“ in einem per $A^{N\Delta}$ mit h zugänglichen Weltverlauf h’ dort und jetzt wahr ist, so muss wegen der Def. von $A^{N\Delta}$ dort und jetzt auch in h wahr sein. Dann gibt es aber auch mit h einen Weltverlauf und einen Ort, so dass jetzt dort „p“ wahr ist.

[11] Man bemerke, dass hier in beiden Alternativen „~p“ vorliegen kann, ohne dass diese hier gegenseitig zugänglich sind, wenn z.B. in einer „q“ vorliegt, in der unteren „~q“.

zu (chr- $M_\Delta E$)

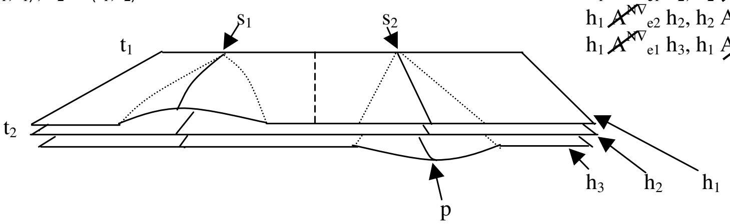


B32

Leider lässt sich die Situation zeichnerisch nur noch in Form einer etwas verunglückten Lasagna darstellen:

$e_1 = \langle t_1,s_1\rangle$, $e_2 = \langle t_1,s_2\rangle$

$h_1\ A^{N\nabla}_{e1}\ h_2$, $h_2\ \cancel{A^{N\nabla}}_{e1}\ h_3$
$h_1\ \cancel{A^{N\nabla}}_{e2}\ h_2$, $h_2\ A^{N\nabla}_{e2}\ h_3$
$h_1\ \cancel{A^{N\nabla}}_{e1}\ h_3$, $h_1\ \cancel{A^{N\nabla}}_{e2}\ h_3$



Dort, wo Weltblätter parallel verlaufen, sollen sie über die Bewertungsfunktion gleich beschriftet sein. *Allein* dort, wo es angemerkt ist, soll „p“ wahr sein. Eckige Klammern sind i.F. Lesehilfen für die teils etwas komplizierten Einsetzungsinstanzen. Es ist nun

1. an $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ „$SM_\nabla Fp$“ wahr, nicht aber „$M_\nabla SFp$“, was ein Gegenbeispiel zu (com-SM_∇) ist;
2. an $\langle t_1,s_1,h_1\rangle$ „$M_\nabla S[M_\nabla Fp]$“ wahr, nicht aber „SM_∇ [$(M_\nabla)Fp$]“, was ein Gegenbeispiel zu (com- $M_\nabla S$) ist.
3. an $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ „SN_∇ [~FSp]“ wahr, nicht aber „$N_\nabla S$[~FSp]“, was ein Gegenbeispiel zu (chr-$M_\nabla E$) ist.

Begründung:

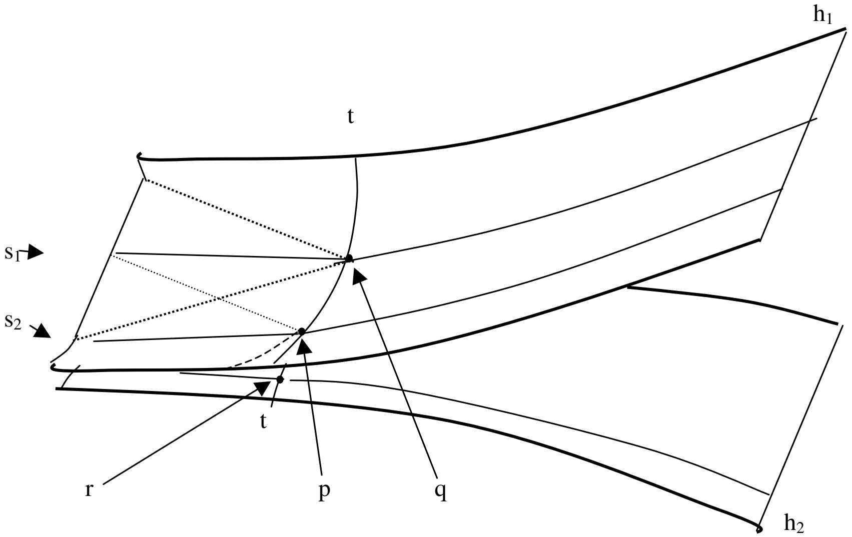
(ad 1.) (a) An $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ ist „$SM_\nabla Fp$“ wahr. Denn es ist an $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ „$M_\nabla Fp$“ wahr, denn es gilt $h_2\ A^{N\nabla}_{e2}\ h_3$, und an $\langle t_1,s_2,h_3\rangle$ ist „Fp“ wahr, weil an $\langle t_2,s_2,h_3\rangle$ „p“ wahr ist. (b) „$M_\nabla SFp$“ könnte offensichtlich an $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ nur wahr sein, wenn $h_2\ A^{N\nabla}_{e1}\ h_3$ der Fall wäre. Dies ist aber nicht der Fall.

(ad 2.) (a) An $\langle t_1,s_1,h_1\rangle$ ist „$M_\nabla SM_\nabla Fp$“ wahr. Denn es gilt $h_1\ A^{N\nabla}_{e1}\ h_2$, und an $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ ist „$SM_\nabla Fp$“ wahr, weil $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ „$M_\nabla Fp$“ wahr ist. Denn es gilt $h_2\ A^{N\nabla}_{e2}\ h_3$, und an $\langle t_1,s_2,h_3\rangle$ ist „Fp“ wahr, weil an $\langle t_2,s_2,h_3\rangle$ „p“ wahr ist.
(b) An $\langle t_1,s_1,h_1\rangle$ ist aber „$SM_\nabla M_\nabla Fp$“ falsch. Denn „$SM_\nabla M_\nabla Fp$“ ist äquivalent mit „$SM_\nabla Fp$“, der einzige Ort, der für die Wahrheit von „$M_\nabla Fp$“ in Frage kommt, ist offensichtlich s_2, es gilt aber: „$M_\nabla Fp$“ ist an $\langle t_1,s_2,h_1\rangle$ falsch. Denn es gilt *nicht*: $h_1\ A^{N\nabla}_{e2}\ h_3$; nur an $\langle t_1,s_2,h_3\rangle$ ist aber „Fp“ wahr, weil an $\langle t_2,s_2,h_3\rangle$ „p“ wahr ist.

(ad 3.) (a) An $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ ist „SN_∇~FSp“ wahr. Denn an $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ ist „N_∇~FSp“ wahr, weil an e_1 nur gilt: $h_1\ A^{N\nabla}_{e1}\ h_2$ und $h_2\ A^{N\nabla}_{e1}\ h_2$ und offensichtlich weder an $\langle t_1,s_1,h_1\rangle$ noch an $\langle t_1,s_1,h_2\rangle$ gilt, dass „FSp“ wahr ist.
(b) An $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ ist aber „$N_\nabla S$~FSp“ falsch. Denn „~$N_\nabla S$~FSp“ ist äquivalent mit „$M_\nabla EFSp$“, „$M_\nabla EFSp$“ ist aber an $\langle t_1,s_2,h_2\rangle$ wahr. Denn es gilt: $h_2\ A^{N\nabla}_{e2}\ h_3$, und an $\langle t_1,s_2,h_3\rangle$ ist „EFSp“ wahr. Denn von jedem Ort aus kann man *auf h_3* mit t_2 einen Zeitpunkt in der Zukunft von t_1 finden, so dass es dann mit s_2 einen Ort gibt, an dem „p“ wahr ist.

B33

Zunächst kann man sich dies für „N_Δ“ / „M_Δ“ klarmachen. „p“, „q“ und „r“ sollen dabei jeweils *allein* da wahr sein, wo es angemerkt ist.



1. Gegenbeispiel zu (rom 1) „$SM_\Delta Sp \rightarrow EM_\Delta Sp$“:
An $\langle t,s_2,h_1\rangle$ ist „p“ wahr, also an $\langle t,s_1,h_1\rangle$ „Sp“, an $\langle t,s_1,h_2\rangle$ „$M_\Delta Sp$“ und an $\langle t,s_2,h_2\rangle$ „$SM_\Delta Sp$“. Es gilt aber an e mit e= $t\cap s_2$ *nicht*: $h_2\ A^{N\Delta}{}_e\ h_1$, und „p“ sollte allein in h_1 irgendwann und irgendwo wahr sein. Also ist an $\langle t,s_2,h_2\rangle$ die Formel „$M_\Delta Sp$“ falsch. Also ist an $\langle t,s_2,h_2\rangle$ „$S{\sim}M_\Delta Sp$“ wahr, was äquivalent ist mit „${\sim}EM_\Delta Sp$“.

2. Gegenbeispiel zu (rom 2) „$M_\Delta SM_\Delta p \rightarrow N_\Delta SM_\Delta p$“:
An $\langle t,s_2,h_1\rangle$ ist „p“ wahr, also auch „$M_\Delta p$“ und „$SM_\Delta p$“. Da mit e= $t\cap s_1$ gilt, dass $h_1\ A^{N\Delta}{}_e\ h_1$, ist an $\langle t,s_1,h_1\rangle$ die Formel „$M_\Delta SM_\Delta p$“ wahr. Nun ist auch $h_1\ A^{N\Delta}{}_e\ h_2$, aber es gibt keinen Ort s’, so dass „$M_\Delta p$“ an $\langle t,s',h_2\rangle$ wahr wird. Schließlich ist „p“ ja nur an $\langle t,s_2,h_1\rangle$ wahr, nicht an $\langle t,s_1,h_1\rangle$! Also ist an $\langle t,s_1,h_2\rangle$ „${\sim}SM_\Delta p$“ wahr, was die Wahrheit von „$N_\Delta SM_\Delta p$“ an $\langle t,s_1,h_1\rangle$ verhindert.

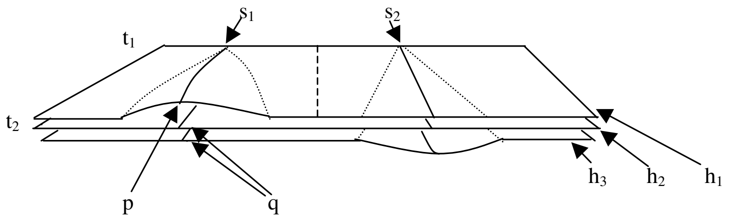
3. Gegenbeispiel zu $\ulcorner M_\Delta\alpha \rightarrow EM_\Delta S\alpha\urcorner$ mit α = Sr:
An $\langle t,s_1,h_1\rangle$ ist „$M_\Delta Sr$“ wahr, weil an $\langle t,s_1,h_2\rangle$ „Sr“ wahr ist und mit e= $t\cap s_1$ gilt, dass $h_1\ A^{N\Delta}{}_e\ h_1$. Es ist aber an $\langle t,s_1,h_1\rangle$ „$EM_\Delta S(S)r$“ falsch. Denn an $\langle t,s_2,h_1\rangle$ ist „$M_\Delta Sr$“ offensichtlich falsch.

4. Gegenbeispiel zu „$N_\Delta p \rightarrow EN_\Delta Sp$“ und „$SN_\Delta Sp \rightarrow EN_\Delta Sp$“
An $\langle t,s_2,h_1\rangle$ ist „p“ wahr, und so auch „$N_\Delta p$“, außerdem „Sp“, „$N_\Delta Sp$“ und „$SN_\Delta Sp$“. Aber an $\langle t,s_1,h_1\rangle$ ist „$N_\Delta Sp$“ falsch. Denn an $\langle t,s_1,h_2\rangle$ ist offensichtlich „Sp“ falsch. Also ist an $\langle t,s_2,h_1\rangle$ „$EN_\Delta Sp$“ falsch.[12]

[12] Zu „$N_\Delta p \rightarrow ESN_\Delta p$“ gibt es kein Gegenbeispiel. Tatsächlich ist diese Formel eine Instanz des Brouwer-Axioms für „E“ und „S“ und ist in der Deutung völlig plausibel: Wenn es jetzt und hier wissbar ist, dass p, so ist es überall so, dass es einen Ort gibt, wo das so ist, nämlich hier.

B34

Dies lässt sich wieder an einem „Lasagna-Modell“ zeigen.



(a) Gegenbeispiel zu „$SM_\nabla S[Fp] \rightarrow EM_\nabla S[Fp]$“ (rom 1) und „$M_\nabla SM_\nabla[Fp] \rightarrow N_\nabla S\, M_\nabla[Fp]$“ (rom 2). (i) An $\langle t_1,s_2, h_2\rangle$ ist „$SM_\nabla S[Fp]$” wahr, denn an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ ist „$M_\nabla S[Fp]$” wahr, weil an $\langle t_1,s_1, h_1\rangle$ „(S)Fp” wahr ist. Aber „$EM_\nabla S[Fp]$“ ist an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ falsch, denn es gilt an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ selbst „$\sim M_\nabla S[Fp]$“, da h_1 und h_2 an $\langle t_1,s_2\rangle$ nicht zugänglich sind. (ii) An $\langle t_1,s_2, h_3\rangle$ ist „$M_\nabla SM_\nabla$ [Fp]“ wahr. Denn es ist an $\langle t_1,s_2, h_2\rangle$ „$SM_\nabla[Fp]$“ wahr, weil an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ „M_∇ [Fp]“, weil an $\langle t_1,s_1, h_1\rangle$ „Fp“ wahr ist. Doch es ist an $\langle t_1,s_2, h_3\rangle$ selbst „$\sim SM_\nabla[Fp]$“ wahr, weil in h_3 und h_2 nirgends „p“ wahr ist. Also ist an $\langle t_1,s_2, h_3\rangle$ „$EM_\nabla[Fp]$“ falsch, „$M_\nabla\sim EM_\nabla[Fp]$“ wahr und deshalb „$N_\nabla EM_\nabla[Fp]$“ falsch.

(b) Gegenbeispiel zu „$M_\nabla S[Fp] \rightarrow EM_\nabla S[Fp]$“.
An $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ ist „$M_\nabla S[Fp]$“ wahr, nicht aber „$EM_\nabla S[Fp]$“, weil an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ „$\sim M_\nabla S[Fp]$“ wahr ist.

(c) Gegenbeispiel zu „$N_\nabla[SFq] \rightarrow EN_\nabla[SFq]$“ und „$SN_\nabla S[SFq] \rightarrow EN_\nabla S[SFq]$“.
An $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ ist „$N_\nabla[SFq]$“ wahr, und daher auch mit (T-N_∇) und „S“-Verdopplung (S5) „$SN_\nabla SSFq$“. Es ist an $\langle t_1,s_2, h_2\rangle$ „$\sim N_\nabla[SFq]$“ wahr, denn es gibt mit h_1 ein an $\langle t_1,s_2\rangle$ mit h_2 zugängliches Weltblatt ganz ohne „q“. Also ist „EN_∇(S)[SFq]“ an $\langle t_1,s_1, h_2\rangle$ falsch.

Begründungen zu Teil III, Kapitel 1

B1

$\ulcorner \Box_1^{refl}\, \alpha \urcorner$ sei definiert als $\ulcorner \Box_1^{irr}\, \alpha \wedge \alpha \urcorner$, „$\Diamond_1^{refl}$“ als „$\sim\Box_1^{refl} \sim$“.
Es gilt dann klarerweise $\ulcorner \Diamond_1^{refl}\, \alpha \equiv (\Diamond_1^{irr} \alpha \vee \alpha) \urcorner$.

S4-Fall: Für „$\Box_1^{irr}$“ und „$\Box_2^{irr}$“ gelten die K_t-Axiome, also der Box-Verteiler aus K und die Mischaxiome und das Transitivitätsschema $\ulcorner \Diamond_1^{irr}\, \Diamond_1^{irr}\, \alpha \rightarrow \Diamond_1^{irr}\, \alpha \urcorner$ (vgl. zur Redundanz des Spiegelbilds B15 zu Kap. I 1). Der Beweis dafür, dass für „$\Box_1^{refl}$“ eine NEC-Regel, der Box-Verteiler, dass das Reflexivitätsaxiom und das Transitivitätsaxiom folgen, ist einfach:

(a) Ist α herleitbar, so auch $\ulcorner \Box^{refl}\, \alpha \urcorner$ (NEC-$\Box^{refl}$)

1	α	als herleitbar angenommen
2	$\Box^{irr}\, \alpha$	1, NEC
3	$\alpha \wedge \Box^{irr}\, \alpha$	1, 2, PC
4	$\Box^{refl}\, \alpha$	3, Def. $\Box^{refl}$

(b) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \Box^{refl} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box^{refl}\, \alpha \rightarrow \Box^{refl}\, \beta) \urcorner$ ist herleitbar:

	*	1	$\Box^{refl} (p \rightarrow q)$	Annahme
	*	2	$\Box^{irr} (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$	1, Def. $\Box^{refl}$
*		3	$\Box^{irr}\, p \wedge p$	Annahme
	*	4	$\Box^{irr} (p \rightarrow q)$	2, PC (E$\wedge$)
*	*	5	$\Box^{irr} (p \rightarrow q) \wedge \Box^{irr}\, p$	3, 4, PC (I$\wedge$)
		6	$\Box^{irr} (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box^{irr}\, p \rightarrow \Box^{irr}\, q)$	K-$\Box^{irr}$
		7	$(\Box^{irr} (p \rightarrow q) \wedge \Box^{irr}\, p) \rightarrow \Box^{irr}\, q$	6, PC
*	*	8	$\Box^{irr}\, q$	5, 7, PC (m.p.)
	*	9	$p \rightarrow q$	2, PC (E$\wedge$)
*		10	p	3, PC (E$\wedge$)
*	*	11	q	9, 10, PC (m.p.)
*	*	12	$\Box^{irr}\, q \wedge q$	8, 11, PC (I$\wedge$)
	*	13	$(\Box^{irr}\, p \wedge p) \rightarrow (\Box^{irr}\, q \wedge q)$	3, 12, kond.
	*	14	$\Box^{refl}\, p \rightarrow \Box^{refl}\, q$	13, Def. $\Box^{refl}$
		15	$\Box^{refl} (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box^{refl}\, p \rightarrow \Box^{refl}\, q)$	1, 14, kond.

(c) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \Box^{refl}\, \alpha \rightarrow \alpha \urcorner$ ist herleitbar:

*	1	$\Box^{refl}\, p$	Annahme
*	2	$\Box^{irr}\, p \wedge p$	1, Def. $\Box^{refl}$
*	3	p	2, PC
	4	$\Box^{refl}\, p \rightarrow p$	1, 3, kond.

(d) Jede Formel der Gestalt $\ulcorner \Box^{refl}\, \alpha \rightarrow \Box^{refl}\, \Box^{refl}\, \alpha \urcorner$ ist herleitbar:

*	1	$\Box^{refl}\, p$	Annahme
*	2	$\Box^{irr}\, p \wedge p$	1, Def. $\Box^{refl}$
*	3	$\Box^{irr}\, p$	2, E$\wedge$
*	4	p	2, E$\wedge$
	5	$\Box^{irr}\, p \rightarrow \Box^{irr}\, \Box^{irr}\, p$	(T-$\Box^{irr}$)
*	6	$\Box^{irr}\, \Box^{irr}\, p$	3, 5, PC (m.p.)
*	7	$\Box^{irr}\, \Box^{irr}\, p \wedge \Box^{irr}\, p$	3, 6, I$\wedge$
*	8	$\Box^{irr} (\Box^{irr}\, p \wedge p)$	7, mit T-K5
*	9	$\Box^{irr} (\Box^{irr}\, p \wedge p) \wedge \Box^{irr}\, p \wedge p$	2, 8, I$\wedge$
*	10	$\Box^{irr}\, \Box^{refl}\, p \wedge \Box^{refl}\, p$	9, Def. $\Box^{refl}$
*	11	$\Box^{refl}\, \Box^{refl}\, p$	10, Def. $\Box^{refl}$
	12	$\Box^{refl}\, p \rightarrow \Box^{refl}\, \Box^{refl}\, p$	1, 11, kond.

S4.2-Fall:
Zusätzlich zum S4-Fall ist nur noch zu zeigen, dass gilt:
$\ulcorner \Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} \alpha \rightarrow \Box_1^{irr} \Diamond_1^{irr} \alpha \urcorner$ impliziert, zusammen mit K_t + Transitivität, $\ulcorner \Diamond_1^{refl} \Box_1^{refl} \alpha \rightarrow \Box_1^{refl} \Diamond_1^{refl} \alpha \urcorner$.
Das lässt sich zeigen wie folgt:

*	1	$\Diamond_1^{irr} (\Box_1^{irr} p \wedge p) \vee \Box_1^{irr} p \wedge p$	Annahme
	2	$\Diamond_1^{irr} (\Box_1^{irr} p \wedge p) \rightarrow \Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \wedge \Diamond_1^{irr} p$	mit K
	3	$\Diamond_1^{irr} (\Box_1^{irr} p \wedge p) \vee \Box_1^{irr} p \wedge p \rightarrow \Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \wedge \Diamond_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p \wedge p$	2, PC
*	4	$\Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \wedge \Diamond_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p \wedge p$	1,3, PC (m.p.)
*	5	$(\Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p) \wedge (\Diamond_1^{irr} p \vee p)$	4, PC
	6	$\Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \rightarrow \Box_1^{irr} \Diamond_1^{irr} p$	S4.2-Axiom für „$\Box_1^{irr}$“
	7	$(\Diamond_1^{irr} \Box_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p) \rightarrow (\Box_1^{irr} \Diamond_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p)$	6, PC
*	8	$\Box_1^{irr} \Diamond_1^{irr} p \vee \Box_1^{irr} p$	5, 7, PC (m.p.)
*	9	$\Box_1^{irr} (\Diamond_1^{irr} p \vee p)$	8, mit K
*	10	$\Diamond_1^{irr} p \vee p$	5, PC
*	11	$\Box_1^{irr} (\Diamond_1^{irr} p \vee p) \wedge (\Diamond_1^{irr} p \vee p)$	9, 10, PC
	12	$(\Diamond_1^{irr} (\Box_1^{irr} p \wedge p) \vee \Box_1^{irr} p \wedge p) \rightarrow \Box_1^{irr} (\Diamond_1^{irr} p \vee p) \wedge (\Diamond_1^{irr} p \vee p)$	1, 11, kond.
	13	$\Diamond_1^{refl} (\Box_1^{irr} p \wedge p) \rightarrow \Box_1^{refl} (\Diamond_1^{irr} p \vee p)$	12, Def. $\Box_1^{refl}$
	14	$\Diamond_1^{refl} \Box_1^{refl} p \rightarrow \Box_1^{refl} \Diamond_1^{refl} p$	13, Def. $\Box_1^{refl}$, QED.

B2

Müller formuliert die Wahrheitsbedingungen für die ISL im zweiten Schritt so:[1]

> „Eine Wff ϕ ist aus meiner Perspektive erfüllt ($\models \phi$) unter folgenden Umständen:
> E1‘. Ist ϕ eine atomare Formel ξ, so gilt $\models \phi$ genau dann, wenn ξ aus meiner momentanen Perspektive wahr ist. [...]
> E4‘. Ist $\phi = \ulcorner$ [T] $\psi \urcorner$, so gilt $\models \phi$ genau dann, wenn nach Transformation meiner momentanen Perspektive um *T* gilt, daß $\models \psi$.“

Es soll also hier der metasprachliche Ausdruck „$\models$“ rekursiv definiert werden. Es ist nicht ganz klar, ob „aus meiner Perspektive“ dasselbe heißen soll wie „aus meiner *momentanen* Perspektive“. Es ist freilich schwer zu sehen, was *meine* Perspektive anderes sein soll als meine *momentane* Perspektive, wenn ich von *meinem* Standpunkt aus relativ darauf Formeln bewerten soll. Ist das so, dann dreht der Transformations-Operator aber leer. Denn E4‘ heißt dann ausbuchstabiert: „Ist $\phi = \ulcorner$ [T] $\psi \urcorner$, so gilt ϕ *aus meiner momentanen Perspektive* genau dann, wenn nach Transformation meiner momentanen Perspektive um *T* gilt, dass *aus meiner momentanen Perspektive* ψ gilt.“ In diesem Fall kann man das Transformieren auch sein lassen. denn ob aus meiner momentanen Perspektive ψ gilt, ist unabhängig davon, was mit irgendeiner Transformation davon ist. Schließlich ist eine *Transformation* meiner momentanen Perspektive (i.d.R.) gerade nicht mehr meine *momentane* Perspektive. Man könnte versuchen, die Definition zu reparieren, indem man E4‘ formuliert als: „Ist $\phi = \ulcorner$[T] $\psi \urcorner$, so gilt ϕ *aus meiner evtl. bereits durch Transfomationen erreichten Perspektive* genau dann, wenn nach Transformation meiner momentanen Perspektive um *T* gilt, dass *aus dieser Perspektive* ψ gilt.“ Nur fügt sich das schlecht in die rekursive Definition ein: Man hat dann in E4‘ nichts mehr, was sich mit „$\models$“ abkürzen ließe. Der Punkt scheint mir kein notationstechnischer, sondern ein fundamentaler zu sein.

B3

Wäre „F_k^M“ derselbe Operator wie „F_k“, so müsste sich auch der zu duale „F_k^M“ Operator „$\sim F_k^M \sim$“ (kurz: „G_k^M“) so verhalten wie „$\sim F_k \sim$“ (kurz: „G_k“). Wieso ist dies nicht der Fall? Definieren wir:

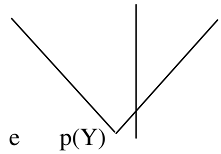
$\ulcorner F_k^M \alpha \urcorner$ ist wahr an e gdw für alle S gilt: $\ulcorner F\alpha \urcorner$ ist wahr an e.
$\ulcorner F_k \alpha \urcorner$ ist wahr an e gdw gilt: Es gibt ein e‘ im ZLK von e, so dass α wahr ist an e‘.

[1] Müller, a.a.O., S.271.

Angenommen, „F_k^M“ sei derselbe Operator wie „F_k“. Wir erhalten aus den Definitionen:
$\ulcorner{\sim}F_k^M{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e gdw *nicht* für alle S gilt: $\ulcorner F{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e.
$\ulcorner{\sim}F_k\alpha{\sim}\urcorner$ ist wahr an e gdw für manches S gilt *nicht*: $\ulcorner F{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e.
$\ulcorner{\sim}F_k\alpha{\sim}\urcorner$ ist wahr an e gdw für manches S gilt: $\ulcorner{\sim}F{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e.
$\ulcorner{\sim}F_k\alpha{\sim}\urcorner$ ist wahr an e gdw für manches S gilt: $\ulcorner G\alpha\urcorner$ ist wahr an e.

$\ulcorner{\sim}F_k{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e gdw gilt: Es gibt kein e'im ZLK von e, so dass $\sim\alpha$ wahr ist an e'.
$\ulcorner{\sim}F_k{\sim}\alpha\urcorner$ ist wahr an e gdw für alle e'im ZLK von e gilt: α ist wahr ist an e'.

Wir betrachten folgendes Modell:



„p“ soll nur falsch bzw. „~p“ soll nur wahr sein am angegebenen S_0-Ort Y, dort aber durchgängig. Wir erhalten für e: $\sim{\sim}F_k{\sim}$ p(Y) $\wedge$ $\sim F_k^M\sim$ p(Y), also F_k ~p(Y) $\wedge$ $\sim F_k^M\sim$p(Y), also laut Annahme den Widerspruch F_k^M ~p(Y) $\wedge$ $\sim F_k^M\sim$p(Y). Kurz: Für die Wahrheit von reicht $\ulcorner{\sim}F_k^M{\sim}\alpha\urcorner$ schon ein durchgängiger α-Ort relativ auf S_0, für die Wahrheit von $\ulcorner{\sim}F_k{\sim}\alpha\urcorner$ dagegen erst ein kompletter α-Vorwärtslichtkegel.

Begründungen zu Teil III, Kapitel 2

B1

Dies ergibt eine *korrekte* Axiomatisierung. Denn würde in Klausel 4.(vi) der Zusatz „wenn $t \cap s = t' \cap s'$“ fehlen, so hätte man einfach eine *Fusion* von S5 (für „$\times$“) und S5xK_{lin} vor sich.[2] In diesem Fall könnte man freilich mit dem „+“-Operator von jedem event zu jedem beliebigen anderen event gelangen: „+p“ wäre ja dann wahr, wenn für irgendeine Zeit und irgendeinen Ort irgendeines Bezugssystems „p“ wahr wird. Das lässt zwar keine interessante Deutung zu. Man mag aber nun die ^{Proto}Rel-Modelle als Teilmenge der Modelle der genannten Fusion auffassen, die eine Zusatzbedingung erfüllen. Was dann aber schon für *jedes* Fusions-Modell galt, muss erst recht für jedes ^{Proto}Rel-Modell gelten. Die Fusion wird aber durch bloßes Zusammenschütten der Axiome seiner Komponenten nicht nur korrekt, sondern sogar vollständig axiomatisiert.[3]

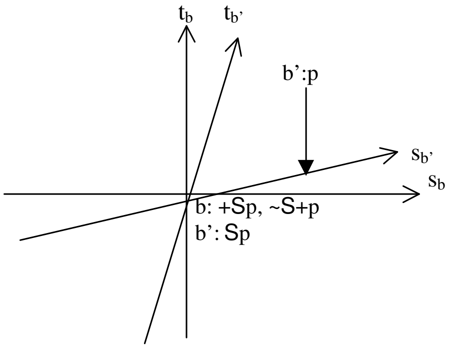
B2

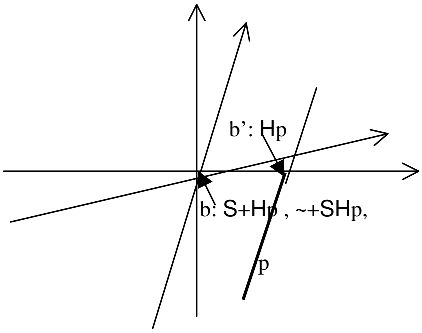
Angenommen $V(p, \langle t_b(e),s_b(e)\rangle) = 1$. So gilt $\beta(p,e) = 1$. Dann gilt für ein beliebiges b':
$V(p, \langle t_{b'}(e),s_{b'}(e)\rangle)=1$. Also gilt: $V(\times p, \langle t_b(e),s_b(e)\rangle)=1$. Also ist „$p \rightarrow \times p$“ ^{Proto}Rel-allgemeingültig.

B3

Auf s_b kann man lange nach einem Umschaltpunkt suchen, der einen auf ein „p“-event bringt. Und es ist zwar „S+p $\rightarrow$ +Sp“ für Satzbuchstaben in Ordnung (wenn man irgendwo direkt beim Umschalten auf ein „p“-event trifft, dann trifft man auch ohne Umschalten darauf), aber die Einsetzung „S+Hp $\rightarrow$ +SHp“ wird falsifiziert.

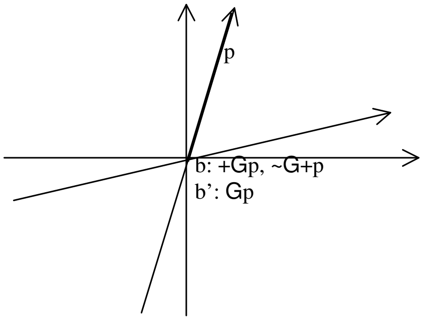
[2] Vgl. Kap I 1.2.2.1.
[3] Vgl. ebd.



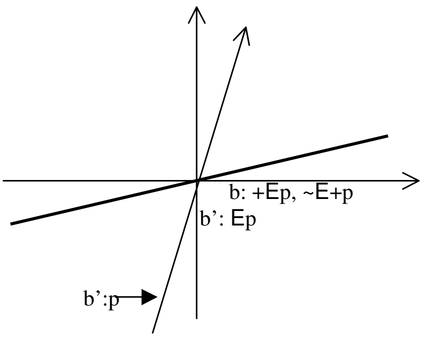


Auf der rechten Abbildung kann man von b aus in einiger Entfernung vom Ursprung auf die Neigung der „p"-Linie umschalten. Man kann aber nicht am Ursprung auf die richtige Neigung umschalten, ohne auch events in der Vergangenheit zu erhalten, die keine „p"-events sind. Und bleibt man im rechtwinkligen System, so kann man mit senkrechten Orten bestenfalls einen einzigen „p"-Punkt treffen.

B4



Gegenbeispiel zu „+Gp → G+p"



Gegenbeispiel zu „+Ep → E+p"

„+Hp → H+p" scheitert am Spiegelbild an s_b zum Gegenbeispiel zu „+Gp → G+p".

B5

Ich vermute aufgrund der Analogie von „×" in $^{\text{Proto}}$Rel und „N" in LF sowie aufgrund der Gegenbeispiele in III 1.7, dass die folgende Anpassung nötig und ausreichend ist:

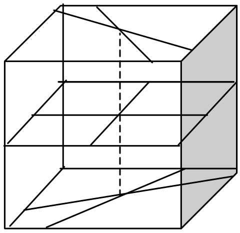
$$\times G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow +F+\alpha_{i+1}) \rightarrow +G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow F+\alpha_{i+1})$$

$$\times H_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow +P+\alpha_{i+1}) \rightarrow +H_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow P+\alpha_{i+1})$$

$$\times E \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow +S\Diamond\alpha_{i+1}) \rightarrow +E_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (+\alpha_i \rightarrow S+\alpha_{i+1}).$$

B6

Entscheidend ist, ob einzelnen Bezugssysteme so interpretiert werden können, dass sie jeweils subframes einer größeren Struktur bilden. Dies ist wahrscheinlich. Nehmen wir als Positionen aus W events-in-Koordinatensystemen an.



Ein subframe ist nun ein Tupel aus einer Teilmenge von W und den auf diese Teilmenge restringierten Zugänglichkeitsrelationen. Es ist klar, dass jede Schicht dieser Strukur, also jedes Bezugssystemsystem, mit den Bezugssystem-relativen Zugänglichkeitsrelationen einen subframe bildet. Ferner ist zu beachten, dass die Zugänglichkeiten *innerhalb* jeder Schicht der Struktur dem vollständig axiomatisierbaren[4] $S5xK_{lin}$ entsprechen.

B7

(t1) besagt, dass zwei verschiedene t-Werte paarweise disjunkt sind. (t2) besagt, dass jedes event zu seinem eigenen t-Wert gehört. Da *jedem* event ein t-Wert zugeordnet ist, muss die Vereinigung aller t-Werte wieder W ergeben. Gerade das charakterisiert eine Partition.[5] Völlig analog argumentiert man für die s-Funktion.

B8

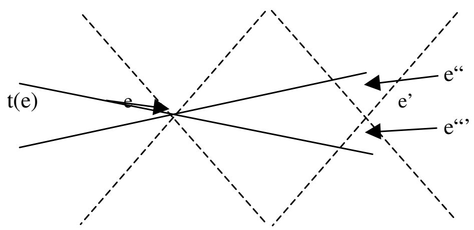
Auf jeder Partition ist die Relation "gehört zum selben Element wie" eine Äquivalenzrelation.[6] Wenn e zu t(e') gehört, so gehört e zum selben Element der t-Partition wie e'; denn laut (t2)[7] gehört e' selbst zu t(e'). Dann gehört aber auch t' zum selben Element der t-Partition wie e. e gehört zu t(e). Also gilt: e' gehört zu t(e). Für den s-Fall argumentiert man analog.

B9

Im Fall der t-Transitivität argumentiert man: e' gehört laut (t2) ebenso zu t(e') wie e. Es muss aber gelten: t(e') = t(e"). Denn e" gehört zu t(e") und e' auch, beide also zum selben Zeitpunkt. Dann ist aber auch t(e) = t(e"). Für den s-Fall argumentiert man analog.

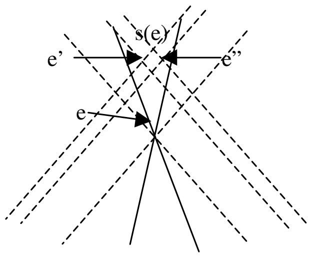
B10

Der angedachte Fall müsste aussehen wie folgt:



[4] Vgl. B23 zu I 2.
[5] Vgl. z.B. Wölfl, „Kombinierte Zeit- und Modallogik", S.126.
[6] Vgl. Wölfl, a.a.O., S.126.
[7] Man beachte, dass diese Forderung verschieden ist von der Reflexivität der Äquivalenzrelation „gehört zum selben Zeitpunkt wie".

Angenommen, bei t(e) handele es sich selbst um einen immer breiter werdenden Kegel. So würden sowohl e’, als auch e“ und e“’ zu t(e) gehören, mithin gehören e, e“ und e“’ zum selben Zeitpunkt, und e und e’ gehören zum selben Zeitpunkt. Für jede Partition ist die Relation „gehört zum selben Element wie“ eine Äquivalenzrelation,[8] mithin auch transitiv und symmetrisch. Es gehört also auch e zum selben Zeitpunkt wie e“. Gehört e’ zum selben Zeitpunkt wie e und gehört e zum selben Zeitpunkt wie e“, so gehört auch e’ zum selben Zeitpunkt wie e“, also e“ zum selben Zeitpunkt wie e’. Gleiches gilt für e“’. e“ und e“’ liegen aber in der echten kausalen Vergangenheit oder Zukunft von e’. Sie können deshalb, laut (t1), nicht zum selben Zeitpunkt wie e’ gehören. Entsprechend argumentiert man für Orte im Sinne der folgenden Darstellung:



Hier liegen, weil s(e) ein Kegel ist, e’ und e“ raumartig zueinander. e’ liegt also im Raumartigen von e“. Das ist jedoch unmöglich, wenn e’ und e“ zum selben Ort gehören sollen.

B11

Seien e und e’ gegeben. Laut (t/s) ist t(e) $\cap$ t(e’) nichtleer. Sei e“ ein Element von t(e) $\cap$ t(e’). Es fragt sich, ob t(e) $\cap$ s(e’) noch andere Elemente enthalten kann. In Frage kommen dafür natürlich nur Elemente von s(e’). s(e’) enthält laut (s2) nur Elemente von $\rangle\langle$(e’). Jedes weitere Element müsste also in der kausalen Zukunft oder kausalen Vergangenheit von e’ liegen. Nun müsste ein solches Element, ebenso wie e“, auch zu t(e) gehören. t(e) ist aber mit t(e“) identisch. t(e“) enthielte also sowohl e“ als auch ein weiteres Element des Lichtkegels von e“. Das ist durch (t2) ausgeschlossen. Also ist e“ einziges Element von t(e) $\cap$ t(e’).

B12

(a) Angenommen e $\prec_b$ e’. So gilt per def.: e $\in$ Δ^-(e’). Dann gilt, nach den oben festgestellten Asymmetrie-Aussagen für Δ^- nicht: e $\in$ Δ^-(e’). Damit e’ $\prec_b$ e, müsste dies aber gelten. Also gilt: Wenn e $\prec_b$ e’, dann nicht e’ $\prec_b$ e.

(b) Angenommen e $\prec_b$ e’ und e’ $\prec_b$ e“. So gilt per def.: e $\in$ Δ^-(e’) und e’ $\in$ Δ^-(e“). Nach der oben festgestellten Transitivitäts-Aussage für Δ^- gilt dann auch e $\in$ Δ^-(e“). Außerdem gilt per def.: e $\in$ s(e’) und e’ $\in$ s(e”). Dann gilt (vgl. oben 2.) auch e $\in$ s(e”). Also gilt: e $\prec_b$ e“.

(c) Die Irreflexivität folgt unmittelbar aus der Asymmetrie und Transitivität. Vgl. B19 und B20 zu Kap. I 1.

(d) *Wenn* s(e) = s(e’) und e $\neq$ e’, so gilt zwar klarerweise e $\prec_b$ e’ oder e’ $\prec_b$ e. Denn dann sind nach (s2) e und e’ Element von $\rangle\langle$(e). Ist e’ $\neq$ e, so kann entweder e’ in Δ^-(e) oder in ∇^-(e’) liegen. Im ersten Fall gilt, da s(e) = s(e’), e’ $\prec_b$ e; im zweiten Fall gilt wegen Def. (∇^-): e $\in$ Δ^-(e’) und also, da s(e) = s(e’), e $\prec_b$ e’. Doch es kann sein, dass s(e) $\neq$ s(e’), und dann muss e’ nicht in $\rangle\langle$(e) liegen.

[8] Vgl. nochmals Wölfl, a.a.O., S.126.

B13

Entscheidend ist hierfür die Phalanx-Bedingung. Aus ihr folgt mit der Definition von $\prec_b$ nämlich sofort, dass, wenn *ein* event aus t(e) und eines aus t(e’) lokal als früher und später geordnet sind, dies, in gerade derselben Richtung, für *jedes* event aus t(e) und sein gleichortiges Gegenstück aus t(e’) gilt. Nun gibt es eine Eins-zu-eins-Zuordnung der events auf t(e) und auf t(e’): Es gibt keinen Ort für ein event aus t(e), der nicht auch einer für ein event aus t(e’) wäre, und umgekehrt. Denn nach (t/s1) schneidet sich jeder Zeitpunkt mit jedem Ort. Man kann deshalb sagen:

(a’) Angenommen t(e) $<_b$ t(e’). So liegt, nach (t/s1) und (t/s2), *jedes* event e“ aus t(e) im Vergangenheitslichtkegel seines gleichortigen Gegenstücks s(e“)°t(e’) aus t(e’). Damit liegt kein gleichortiges Gegenstück irgendeines t(e)-events aus t(e’), mithin *überhaupt kein event aus t(e’)*, im Vergangenheitslichtkegel irgendeines events aus t(e). Also kann t(e’) $<_b$ t(e) sicher nicht der Fall sein. Denn dazu müsste dies *jedes* tun.

(b’) Angenommen t(e) $<_b$ t(e’) und t(e’) $<_b$ t(e“). So gilt für *jedes* e“ aus t(e), dass es im der $\prec_b$-Relation zu seinem gleichortigen Gegenstück aus t(e’) steht. Außerdem gilt für *jedes* e“’ aus t(e’), dass es im der $\prec_b$-Relation zu seinem gleichortigen Gegenstück aus t(e“) steht. Die $\prec_b$-Relation ist transitiv. Also gilt für *jedes* e“ aus t(e), dass es im der $\prec_b$-Relation zu seinem gleichortigen Gegenstück aus t(e“) steht. Also gilt: t(e’) $<_b$ t(e“).

(c’) Die Irreflexivität folgt unmittelbar aus der Asymmetrie und Transitivität. Vgl. B19 und B20 zu Kap. I 1.

(d’) Angenommen t(e) ≠ t(e’). So gilt für jedes event aus t(e) *und sein gleichortiges Gegenstück* aus t(e’), wie soeben nebenbei unter (d) gezeigt, dass diese in der einen oder anderen Reihenfolge in der $\prec_b$-Relation zueiander stehen. Die Reihenfolge ist dabei für zwei beliebige Paare von gleichortigen events aus t(e) und t(e’) wegen der Phalanx-Bedingung dieselbe. Also gilt dann entweder t(e) $<_b$ t(e’) oder t(e’) $<_b$ t(e).

B14

(e) (i) Angenommen t(e) $<_b$ t(e’). So liegt e im Vergangenheitslichtkegel von t(e’)°s(e). Nun gibt es nach (Δ6) ein weiteres event zwischen e und t(e’)°s(e), das im VLK von t(e’)∩s(e) liegt und in dessen VLK e liegt. Sei e“ ein solches event. So gibt es ein t(e“). Nach der Phalanx-Bedingung gilt für jedes event aus t(e“) und sein gleichortiges Gegenstück aus t(e’), dass das erste im VLK des zweiten liegt. *Jedes* event aus t(e“) liegt also im VLK eines events aus t(e’), und kein event aus t(e’) im VLK eines events aus t(e“). Damit gilt zunächst: t(e“) $<_b$ t(e’). Ferner gilt: t(e)°s(e“) liegt im VLK von e“. Daraus ergibt sich analog: t(e) $<_b$ t(e“).

(ii) Angenommen e $\prec_b$ e’. So gilt, wie gezeigt, nach der Phalanx-Bedingung t(e) $<_b$ t(e’). Dann gibt es, wie soeben unter (i) gezeigt, ein e“, so dass t(e) $<_b$ t(e“) und t(e“) $<_b$ t(e’). Dann gibt es auch t(e“)°s(e). Nun gilt, dass t(e“)°s(e) im VLK von e’ ist. Denn ist s(e) nach Annahme mit s(e’) identisch, und *jedes* event eines früheren Zeitpunkts ist im VLK seines gleichortigen späteren Gegenstücks. Außerdem gilt analog, dass e im VLK von t(e“)°s(e) ist. Alle drei events sind gleichortig, also sind sie sicher paarweise gleichortig. Es gilt also sowohl e $\prec_b$ t(e“)°s(e) als auch t(e“)°s(e) $\prec_b$ e’.

(f) (i) Sei e ein event und t(e) dessen Zeitpunkt. So gilt nach (Δ4), dass der echte VLK von e nichtleer ist. Sei e’ ein Element des echten VLK von e. So gibt es auch ein t(e’). Nach der Phalanx-Bedingung liegen alle gleichortigen Gegenstücke zu t(e)-events aus t(e’) im echten VLK ihres jeweiligen t(e)-Gegenstücks. Es gilt also: t(e’) $<_b$ t(e).

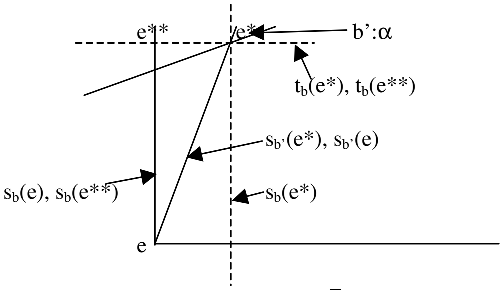
(ii) Sei e ein event und t(e) dessen Zeitpunkt. So gilt nach (Δ5), dass der echte ZLK von e nichtleer ist. Sei e’ ein Element des echten ZLK von e. So gibt es auch ein t(e’). Nach der Phalanx-Bedingung liegen alle gleichortigen Gegenstücke zu t(e’)-events aus t(e) im echten VLK ihres jeweiligen t(e’)-Gegenstücks. Es gilt also: t(e) $<_b$ t(e’).

(iii) Sei e ein event und t(e) dessen Zeitpunkt. So gilt nach (i), dass es ein e' gibt mit $t(e) <_b t(e')$. Dann gilt nach der Phalanx-Bedingung auch: $t(e')°s(e) \prec_b e$. Es gibt also ein e' mit $e' \prec_b e$. Für die Randlosigkeit von $\succ_b$ argumentiert man analog.

B15

Nämlich wenn $V_M = V_{M'}$, $\beta_M = \beta_{M'}$, $W_M = W_{M'}$ und schließlich $B_{M'}$ folgendermaßen beschaffen ist: $\{<_b, A_b\} \in B_{M'}$ gdw es ein $b = \langle t_b, s_b\rangle$ aus B_M gibt, so dass e A_b e' gdw $t_b(e) = t_b(e')$ und $<_b = \prec_b$.

B16



Angenommen, für ein Rel-Modell, $V(+F\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$. So gibt es ein b', so dass $V(F\alpha,\langle t_{b'}(e),s_{b'}(e)\rangle)=1$ mit $t_b(e)°s_b(e) = t_{b'}(e)°s_{b'}(e)$, nämlich e. Dann gibt es ein e' mit $t_{b'}(e) <_{b'} t_{b'}(e')$ und $V(\alpha,\langle t_{b'}(e'),s_{b'}(e)\rangle)=1$. Sei e* ein solches event. Klarerweise ist dann $e^* = t_{b'}(e^*)°s_{b'}(e)$ und auch $e^* = t_b(e^*)°s_b(e^*)$. Damit gilt, da $V(\alpha,\langle t_{b'}(e^*),s_{b'}(e)\rangle)=1$, auch: $V(+\alpha,\langle t_b(e^*), s_b(e^*)\rangle)=1$. Was lässt sich dabei über $t_b(e^*)$ sagen?

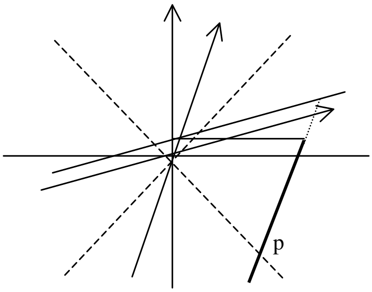
(1) $t_b(e^*)$ enthält das event e**, für das gilt: $e^{**}= t_b(e^*)°s_b(e)$.
Es gilt dabei: $V(S{+}\alpha,\langle t_b(e^{**}), s_b(e)\rangle)=1$. Denn mit $s_b(e^*)$ gibt es einen b-Ort, so dass an ihm zu $t_b(e^*)$ $\ulcorner +\alpha \urcorner$ wahr wird, und $t_b(e^*) = t_b(e^{**})$.

(2) $t_b(e) <_b t_b(e^*)$, also auch $t_b(e) <_b t_b(e^{**})$.
Denn: $s_{b'}(e^*) = s_{b'}(e)$, $s_{b'}(e) \subseteq \rangle\langle(e)$ (vgl. (s2)), also $e^* \in \rangle\langle(e)$, und zwar, weil $t_{b'}(e) <_{b'} t_{b'}(e^*)$, $e^* \in \nabla^-(e)$. Demnach gilt (Konverse): $e \in \Delta^-(e^*)$. Demnach gilt (wegen der Phalanx-Bedingung) für alle events aus $t_b(e)$, dass sie im echten VLK ihres gleichortigen Gegenstücks aus $t_b(e^*)$ liegen. Demnach gilt nach Def. $<_b$, dass $t_b(e) <_b t_b(e^*)$.

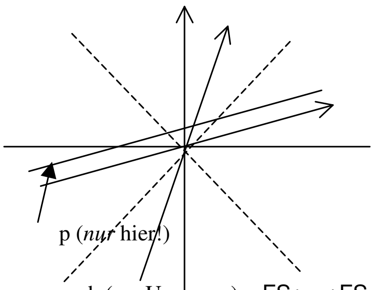
(3) Klarerweise ist nach (1) $t_b(e^*) = t_b(e^{**})$. Also gilt: $t_b(e) <_b t_b(e^{**})$. Es gibt demnach mit $t_b(e^{**})$ einen b-Zeitpunkt nach $t_b(e)$, so dass (vgl.(1)) für $s_b(e)$ und diesen Zeitpunkt $\ulcorner S{+}\alpha \urcorner$ wahr wird. Es gilt also: $V(FS{+}\alpha,\langle t_b(e), s_b(e)\rangle)=1$.

(4) Für $\ulcorner +P\alpha \rightarrow PS{+}\alpha \urcorner$ argumentiert man analog.

B17



b (am Ursprung): $FS{+}Hp$, $\sim{+}FSHp$, $\sim{+}FHp$



b (am Ursprung): $\sim FS{+}p$, $+FSp$

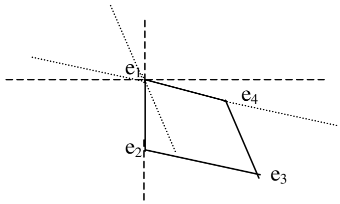
B18

(1)	1. $+Fp \rightarrow FS{+}p$	(Rel-Axiom)
	2. $FS{+}p \rightarrow SF{+}p$	(com)
	3. $+Fp \rightarrow SF{+}p$	1, 2, MP
(2)	1. $+Fp \rightarrow SF{+}p$	(1)
	2. $S{+}Fp \rightarrow SSF{+}p$	1., K-DR 3
	3. $SSF{+}p \rightarrow SF{+}p$	S5 für S (S4 in S5)
	4. $S{+}Fp \rightarrow SF{+}p$	2, 3, MP
(3)	1. $+Fp \rightarrow \times{+}Fp$	S5 für $\times$
	2. $+Fp \rightarrow FS{+}p$	(Rel-Axiom)
	3. $\times{+}Fp \rightarrow \times FS{+}p$	2., K-DR 1
	4. $+Fp \rightarrow \times FS{+}p$	1, 3, MP
(4)	1. $+F{+}p \rightarrow FS{+}{+}p$	Rel-Axiom (α=+p)
	2. $++p \rightarrow +p$	S5 für + (S4 in S5)
	3. $S{+}{+}p \rightarrow S{+}p$	2, K-DR 3
	4. $FS{+}{+}p \rightarrow FS{+}p$	3, K-DR 3
	5. $+F{+}p \rightarrow FS{+}p$	1, 4, MP
	6. $\times{+}F{+}p \rightarrow \times FS{+}p$	5, K-DR 1
	7. $+F{+}p \rightarrow \times{+}F{+}p$	S5 für $\times$
	8. $+F{+}p \rightarrow \times FS{+}p$	6, 7, MP
(5)	1. $Fp \rightarrow +Fp$	S5 für $\times$ (T in S5)
	2. $+Fp \rightarrow \times FS{+}p$	(3)
	3. $Fp \rightarrow \times FS{+}p$	1, 2, MP

B19

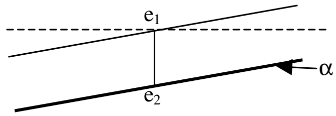
(1) $\ulcorner P \times S\,\alpha \rightarrow \times S\,P\alpha \urcorner$

Angenommen, $\ulcorner P{\times}S\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ (b_1 ist rechtwinklig dargestellt). So gibt es ein e, etwa e_2, so dass gilt: $\ulcorner \times S\,\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_2), s_{b1}(e_2)\rangle$, $s_{b1}(e_1) = s_{b1}(e_2)$ und $t_{b1}(e_2) <_{b1} s_{b1}(e_1)$. Dann gilt für jedes b, etwa auch für b_2: $\ulcorner S\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$. Dann gibt es ein e', etwa e_3, so dass gilt: α ist wahr für $\langle t_{b2}(e_3), s_{b2}(e_3)\rangle$ und $t_{b2}(e_2) = t_{b2}(e_3)$. Sei $e_4 = t_{b2}(e_1)°\ s_{b2}(e_3)$ (die Existenz ist durch die Partitionseigenschaft sichergestellt). So gilt (Phalanx!): $t_{b2}(e_3) <_{b2} s_{b2}(e_1)$ und, da $e_4 \in s_{b2}(e_4)$, auch $s_{b2}(e_3) = s_{b2}(e_4)$. Also gilt: $\ulcorner P\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_4), s_{b2}(e_4)\rangle$, d.h. an $t_{b2}(e_1)°s_{b2}(e_3)$. Also gilt: $\ulcorner SP\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$. b_2 war beliebig gewählt. Also gilt: $\ulcorner SP\alpha \urcorner$ ist wahr für jedes b an $t_b(e_1)°\ s_b(e_1)$. Also gilt: Also gilt: $\ulcorner \times SP\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$.



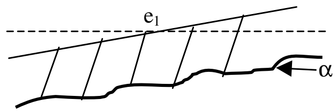
(2) Für $\ulcorner F \times S\ \alpha \rightarrow \times S\ F\alpha \urcorner$ argumentiert man analog.

(3) $\ulcorner P +E\ \alpha \rightarrow +E\ P\alpha \urcorner$
Angenommen, $\ulcorner P{+}E\ \alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ (b_1 ist rechtwinklig dargestellt). So gibt es ein e, etwa e_2, so dass gilt: $\ulcorner +E\ \alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_2), s_{b1}(e_2)\rangle$, $s_{b1}(e_1) = s_{b1}(e_2)$ und $t_{b1}(e_2) <_{b1} t_{b1}(e_1)$. Dann gibt es ein b, etwa b_2, so dass gilt $\ulcorner E\ \alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$. Dann gilt für *jedes* e mit $t_{b2}(e) = t_{b2}(e_2)$: α ist wahr für $\langle t_{b2}(e), s_{b2}(e)\rangle$. Sei nun e_3 ein event mit $t_{b2}(e_1) = t_{b2}(e_3)$. So gilt deshalb: $\ulcorner P\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_3), s_{b2}(e_3)\rangle$. Also gilt für jedes e mit $t_{b2}(e_1) = t_{b2}(e)$: $\ulcorner P\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e), s_{b2}(e)\rangle$. Also gilt: $\ulcorner EP\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$. Also gilt: $\ulcorner +EP\alpha \urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$.



(4) Für $\ulcorner F +E\ \alpha \rightarrow +E\ F\alpha \urcorner$ argumentiert man analog.

(5) Gegenbeispiel zu $\ulcorner P \times S\ \alpha \rightarrow \times S\ P\alpha \urcorner$: Vgl. im Haupttext.
Gegenbeispiel zu $\ulcorner F \times S\ \alpha \rightarrow \times S\ F\alpha \urcorner$: analog zum Gegenbeispiel zu (5) im Haupttext.
Gegenbeispiel zu $\ulcorner +E\ P\alpha \rightarrow P\ +E\ \alpha \urcorner$ (Gegenbeispiel zu $\ulcorner +E\ F\alpha \rightarrow F\ +E\ \alpha \urcorner$ analog):



B20

(a) Es ist noch nicht ausgeschlossen, dass sich mit der Neigung der t-Achse auch die Neigung der s-Achse ändern muss, auch wenn das in SR-Modellen sicher so ist; man erhält also auch Zwei-Bezugssystem-Modelle mit je derselben Achsenneigung für s-Achsen.

(b) Es ist nicht gesagt, dass genug „Platz zur Seite“ vorhanden ist. Das extrem isolierte Rel-Modell kann zu jeder Seite einen „letzten Ort“ aufweisen.

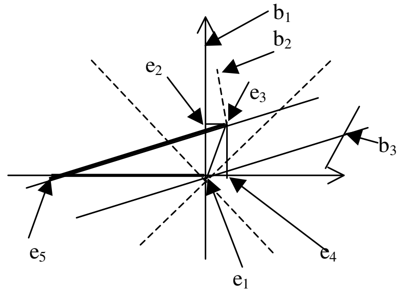
B21

Die (Rietdijk-)Bedingungen lauten:
$\forall b,b', e,e'\ [t_b(e) <_b t_b(e')\ \&\ s_b(e)=s_b(e') \Rightarrow \exists b'',e''[t_{b'}(e)=t_{b'}(e'')\ \&\ t_{b''}(e'')=t_{b''}(e')]]$
$\forall b,b', e,e'\ [t_b(e) >_b t_b(e')\ \&\ s_b(e)=s_b(e') \Rightarrow \exists b'',e''[t_{b'}(e)=t_{b'}(e'')\ \&\ t_{b''}(e'')=t_{b''}(e')]]$.
Begründung
(1) Wenn $\ulcorner +F\alpha \urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr wird, so gilt, wegen des typischen Rel-Schemas: $\ulcorner FS{+}\alpha \urcorner$ ist für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr. Damit $\ulcorner FS{+}\alpha \urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr ist, muss es ein e geben, so dass $s_{b1}(e) = s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1) <_{b1} t_{b1}(e)$ und $\ulcorner S{+}\alpha \urcorner$ ist für $\langle t_{b1}(e), s_{b1}(e)\rangle$ wahr. Sei e_2 ein solches event. Dann muss es ein e' geben, so dass gilt $\ulcorner +\alpha \urcorner$ ist für $\langle t_{b1}(e'), s_{b1}(e')\rangle$ wahr und $t_{b1}(e') = t_{b1}(e_2)$. Sei e_3 ein solches event. Dann muss es ein b', etwa b_2, geben, so dass gilt: α ist für $\langle t_{b2}(e_3), s_{b2}(e_3)\rangle$ wahr.

Außerdem gilt, da $t_{b1}(e_3) = t_{b1}(e_2)$: $t_{b1}(e_1) <_{b1} t_{b1}(e_3)$. Sei $e_4 = t_{b1}(e_1)°s_{b1}(e_3)$. So gilt, da $t_{b1}(e_1) = t_{b1}(e_4)$, dass $t_{b1}(e_1) <_{b1} t_{b1}(e_4)$. Nun gilt: $t_{b1}(e_4) <_{b1} t_{b1}(e_3)$ und $s_{b1}(e_3)=s_{b1}(e_4)$, also nach der Rietdijk-Bedingung:

$$\exists b'',e''[t_{b1}(e_4)=t_{b1}(e'') \;\&\; t_{b''}(e'')=t_{b''}(e_3).$$

Sei b_3 ein solches b'' und e_5 ein solches e'', so dass also gilt: $t_{b1}(e_4)=t_{b1}(e_5)$ & $t_{b3}(e_5)=t_{b3}(e_3)$.
Weil α für $\langle t_{b2}(e_3), s_{b2}(e_3)\rangle$ wahr ist, ist $\ulcorner +\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b3}(e_3), s_{b3}(e_3)\rangle$ wahr. Dann ist, weil $t_{b3}(e_5)= t_{b3}(e_3)$, $\ulcorner S{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b3}(e_5), s_{b3}(e_5)\rangle$ wahr. Dann ist $\ulcorner +S{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_5), s_{b1}(e_5)\rangle$ wahr. Dann ist, weil $t_{b1}(e_4)=t_{b1}(e_5)$, $\ulcorner S{+}S{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_4), s_{b1}(e_4)\rangle$ wahr. Dann ist, da $t_{b1}(e_1) = t_{b1}(e_4)$, $\ulcorner SS{+}S{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr. Dann ist, wegen S5 für „S“, $\ulcorner S{+}S{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr.



(2) Für den „P“-Fall argumentiert man analog.

B22

Sei von einem *vollen* Modell die Rede. Wenn $\ulcorner +F{+}F\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr wird, dann gibt es ein b', etwa b_2, so dass gilt: $\ulcorner F{+}F\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$ wahr. Dann gibt es ein e', etwa e_2, mit $s_{b2}(e_1) = s_{b2}(e_2)$ und $t_{b2}(e_1) <_{b2} s_{b2}(e_2)$, so dass $\ulcorner +F\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$ wahr wird. Dann gibt es ein b“, etwa b_3, so dass gilt: $\ulcorner F\alpha\urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b3}(e_2), s_{b3}(e_2)\rangle$. Dann gibt es ein e“, etwa e_3, mit $s_{b3}(e_2) = s_{b3}(e_3)$ und $t_{b3}(e_2) <_{b3} s_{b3}(e_3)$, so dass α für $\langle t_{b3}(e_3), s_{b3}(e_3)\rangle$ wahr wird. Weil $s_{b2}(e_1) = s_{b2}(e_2)$ und $t_{b2}(e_1) <_{b2} s_{b2}(e_2)$, lässt sich festhalten, dass $e_1 \in \nabla^-(e_2)$. Und weil $s_{b3}(e_2) = s_{b3}(e_3)$ und $t_{b3}(e_2) <_{b3} s_{b3}(e_3)$, lässt sich festhalten, dass $e_2 \in \nabla^-(e_3)$. Also gilt: $e_1 \in \nabla^-(e_3)$, also $e_3 \in \Delta^-(e_1)$, also a fortiori $e_3 \in \rangle\langle(e_1)$. Nun gilt es nach der Definition des vollen Modells für beliebige e, e': Wenn $e \in \rangle\langle(e')$, dann gibt es ein b“‘, so dass gilt: $s_{b'''}(e) = s_{b'''}(e')$. Also gibt es ein b““, etwa b_4, so dass gilt: $s_{b4}(e_1) = s_{b4}(e_3)$. Zugleich gilt, wegen der Phalanx-Bedingung, $t_{b4}(e_1) <_{b3} s_{b4}(e_3)$. Weil es mit b_3 ein Bezugssystem gibt, so dass α für $\langle t_{b3}(e_3), s_{b3}(e_3)\rangle$ wahr wird, gilt: $\ulcorner +\alpha\urcorner$ ist für $\langle t_{b4}(e_3), s_{b4}(e_3)\rangle$ wahr. Mithin gilt: $\ulcorner F{+}\alpha\urcorner$ ist für $\langle t_{b4}(e_1), s_{b4}(e_1)\rangle$ wahr. Somit gilt: $\ulcorner +F{+}\alpha\urcorner$ ist für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ wahr.

B23

Man spiegele einfach die Abbildung im Haupttext nach “B22” nach unten und ersetze “F” durch “P”.

B24

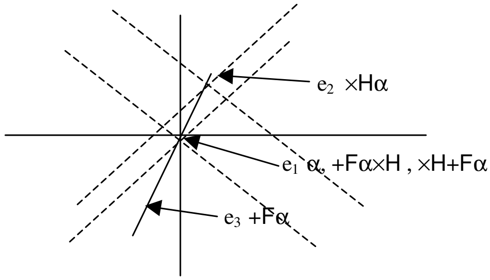
(1) 1. $\sim \times G \sim p \equiv \sim \times \sim \sim G \sim p$ PC
2. $\sim \times G \sim p \equiv + \sim G \sim p$ 1. Def. +
3. $\sim \times G \sim p \equiv + F\, p$ 2. Def. F für “P” und “H” analog.

(2) 1. $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$ K-G
2. $\times G(p \rightarrow q) \rightarrow \times(Gp \rightarrow Gq)$ K-DR 1 ×
3. $\times(Gp \rightarrow Gq) \rightarrow (\times Gp \rightarrow \times Gq)$ K-×
4. $\times G(p \rightarrow q) \rightarrow (\times Gp \rightarrow \times Gq)$ 2, 3, PC für “P” und “H” analog.

(3) Dies ergibt sich sofort durch sukzessive Anwendung von NEC-H bzw. NEC-G und NEC-×.

Die Eigenschaften wären übrigens auch bei der reinen Fusion schon gegeben, von der sich $^{\mathrm{Proto}}$Rel durch die Allgemeingültigkeit von „p → ×p“ (mit Satzbuchstaben) unterscheidet.

B25



(1) Angenommen, ⌜+F×H α⌝ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ (b_1 ist rechtwinklig dargestellt). Dann gibt es ein b', etwa b_2, so dass gilt: ⌜F×H α⌝ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$. Dann gibt es ein e', etwa e_2, so dass gilt: ⌜×H α⌝ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$, wobei $s_{b2}(e_2) = s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_2)$. Dann ist für *jedes* b ⌜Hα⌝ wahr für $\langle t_b(e_2), s_b(e_2)\rangle$, also für jedes e“ mit $t_b(e“) <_b t_b(e_2)$ und $s_b(e“)=s_b(e_2)$, somit auch für $t_b(e_1)°s_b(e_1)$ α wahr. Denn da $s_b(e_1)=s_b(e_2)$ und $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_2)$ gilt: $e_1 \in \Delta^{-}(e_1)$ und deshalb wegen der Phalanx-Bedingung bei beliebigem b: $t_b(e_1) <_b t_b(e_2)$. Sei nun e_3 ein beliebiges event, für das gilt: Es gibt ein b“, etwa b_3, so dass gilt: $t_{b3}(e_3) <_{b3} t_{b3}(e_1)$ und $s_{b3}(e_3) = s_{b3}(e_1)$. So gilt, was für *jedes* b gilt, auch für b_3. α ist also für $\langle t_{b3}(e_1), s_{b3}(e_1)\rangle$ wahr. Deshalb gilt: ⌜+Fα⌝ ist wahr für $\langle t_{b3}(e_3), s_{b3}(e_3)\rangle$. Denn mit b_3 selbst gibt ein Bezugssystem und mit $t_{b3}(e_1)$ einen b_3-Zeitpunkt nach $t_{b3}(e_3)$ mit $s_{b3}(e_3) = s_{b3}(e_1)$, so dass α für $\langle t_{b3}(e_1), s_{b3}(e_1)\rangle$ wahr ist. Von t_{b3} war nur verlangt, dass $t_{b3}(e_3) <_{b3} t_{b3}(e_1)$ und b_3 war beliebig gewählt. Also ist für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ ⌜×H+Fα⌝ wahr.

(2) Für den P/G-Fall argumentiert man analog.

(3) An der unumgänglichen Erwähnung der Phalanx-Bedingung in der Begründung sieht man, dass die diskutierten Schemata noch nicht $^{\mathrm{Proto}}$Rel-allgemeingültig sind.

B26

1	~ ×G× ~ p		
2	~ × ~ ~ G ~ ~ × ~ p	1, PC	
3	+ ~ G ~ + p	2, Def. +	
4	+ F + p	3, Def. F	”P/H”-Fall analog.

Die Umformungen sind äquivalent. Sofort herleitbar ist auch „~ + F + p ~ ≡ × G × p“.

B27

(1)	1. × (p → q) → (×p → ×q)	K-×	
	2. G × (p → q) → G (×p → ×q)	1, K-DR 1 G	
	3. G (×p → ×q) → (G×p → G×q)	K-G	
	4. G × (p → q) → (G×p → G×q)	2, 3, PC	
	5. ×G× (p → q) → ×(G×p → G×q)	4, K-DR 1 ×	
	6. ×(G×p → G×q) → (×G×p → ×G×q)	K-×	
	7. ×G× (p → q) → (×G×p → ×G×q)	5, 6, PC.	für “P” und “H” analog.

(2) Dies ergibt sich wieder sofort durch sukzessive Anwendung von NEC-H bzw. NEC-G und NEC-×.

B28

Die charakteristischen K_t-Axiome für die „k“-Operatoren Rel-allgemeingültig, *wenn* sie es für die zuvor betrachteten Operatoren-Sequenzen sind. *Dass* sie dies sind, ist aber in B25 schon semantisch gezeigt worden.

1	$+ Fp \rightarrow \times + Fp$	S5 für $\times$	
2	$\times H + Fp \rightarrow \times H \times + Fp$	1, K-DR 1 für H und $\times$ sukzessiv	
3	$\times H + F + p \rightarrow \times H \times + F + p$	2, Subst +p / p	
4	$+F \times H\ p \rightarrow \times H + F\ p$	wie semantisch gezeigt (B25)	
5	$+F \times H\ +p \rightarrow \times H + F\ +p$	4, Subst +p / p	
6	$+F \times H\ +p \rightarrow \times H \times + F\ +p$	5, 3, PC	
7	$+ \times H + p \rightarrow \times H + p$	S5 für $\times$	
8	$+F + \times H + p \rightarrow +F \times H + p$	7, K-DR 3 für F und + sukzessiv	
9	$\times p \rightarrow +p$	S5 für $\times$ (T in S5)	
10	$\times H \times p \rightarrow \times H + p$	9, K-DR 1 für H und $\times$ sukzessiv	
11	$+F + \times H \times p \rightarrow +F + \times H + p$	10, K-DR 3 für F und + sukzessiv	
12	$+F + \times H \times p \rightarrow +F \times H + p$	11, 8, PC	
13	$+F + \times H \times p \rightarrow \times H \times + F + p$	12, 6, PC	für “P” und “H” analog.

B29

(1)	1. $Gp \rightarrow Fp$	allg.gültig	
	2. $G \times p \rightarrow F \times p$	1, Subst	
	3. $\times G \times p \rightarrow \times F \times p$	2, K-DR 1	
	4. $\times F \times p \rightarrow +F \times p$	3, S5 für $\times$ (T in S5)	
	5. $\times p \rightarrow +p$	S5 (T in S5)	
	6. $+F \times p \rightarrow +F + p$	5, K-DR 3 sukkzessiv	
	7. $\times G \times p \rightarrow +F \times p$	3, 4, PC	
	8. $\times G \times p \rightarrow +F + p$	7, 6, PC.	
	9. $G_k p \rightarrow F_k p$	8, Def G_k/F_k	P/H-Fall analog.
(2)	1. $Fp \rightarrow FFp$	allg.gültig	
	2. $\times Gp \rightarrow Gp$	S5 für $\times$ (T in S5)	
	3. $G(\times Gp \rightarrow Gp)$	2, NEC-G	
	4. $G \times Gp \rightarrow GGp$	3, mit K-G	
	5. $GGp \rightarrow Gp$	1, mit K_{lin}	
	6. $G \times Gp \rightarrow Gp$	4, 5, PC	
	7. $\times G \times Gp \rightarrow \times Gp$	6, K-DR 1 für G.	
	8. $+Fp \rightarrow +F+Fp$	7, mit K	
	9. $+F+p \rightarrow +F+F+p$	8, Subst	
	10. $+F+F+p \rightarrow +F++F+p$	S5	
	11. $+F+p \rightarrow +F+ +F+p$	9, 10, PC	
	12. $F_k p \rightarrow F_k F_k p$	11, Def. F_k	P-Fall analog.

B30

Das charakteristische S4-Axiom ist für die „k“-Operatoren Rel^{pl}-allgemeingültig, wenn es dies für die zuvor diskutierten Operatoren-Sequenzen *mit hinzugefügtem* "+" *als "Rückschalthebel"* ist. Das ist aber schon gezeigt worden (B22, B23).

1	$+F+Fp \rightarrow +F+p$	wie semantisch gezeigt
2	$+F + F+p \rightarrow +F ++ p$	1, Subst
3	$+F ++ F+p \rightarrow +F + p$	2, mit S5.

B31

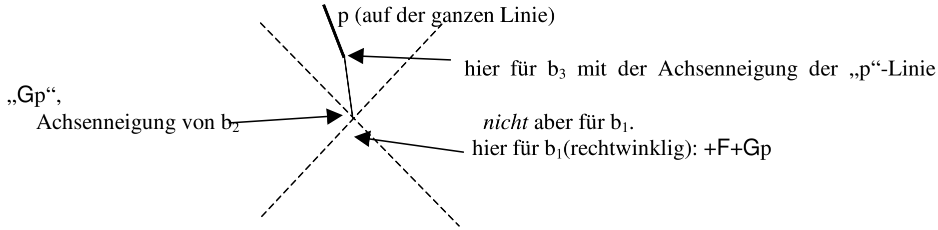
Die Begründung dafür ist unmittelbar Goldblatts in Kap. III 2.3 zitierter Motivation zu entnehmen. Das „Zurückschalten“ findet dabei am erreichten event von der starken zur mittelstarken Achsenneigung statt. Vgl. die Abbildung dort.

B32

(1) Angenommen, $V(\alpha, \langle t_{b1}(e_2), s_{b1}(e_2)\rangle) = 1$ und $e_2 \in \Delta^-(e_1)$. Dann gilt wegen b_1 selbst: $V(+\alpha,\langle t_{b1}(e_2), s_{b1}(e_2)\rangle) = 1$. Nun gilt wegen der Bedingung für das volle Modell: Es gibt ein b, so dass $s_b(e_1) = s_b(e_2)$. Sei b_2 ein solches Bezugssystem, so dass also gilt: $s_{b2}(e_1) = s_{b2}(e_2)$. So gilt auch, da $e_2 \in \Delta^-(e_1)$, wegen der Phalanx-Bedingung: $t_{b2}(e_2) <_{b2} s_{b2}(e_1)$, mithin: $V(P{+}\alpha,\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle) = 1$. Also gilt: $V(+P{+}\alpha,\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle) = 1$.

(2) Für den „F"-Fall argumentiert man analog.

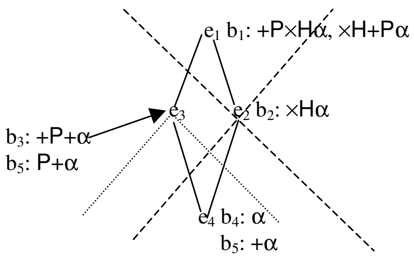
B31



B34

Wir zeigen zunächst semantisch: $\ulcorner{+}P{\times}H\alpha \rightarrow {\times}H{+}P{+}\alpha\urcorner$ ist allgemeingültig, wenn ($\Delta 8$) gefordert wird. Dies ist das S4.2-Schema für die zunächst diskutierten Operatoren-Sequenzen mit *einem* Rückschalthebel.

(1)



(i) Angenommen, $\ulcorner{+}P{\times}H\alpha\urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$. Dann gibt es ein b', etwa b_2, so dass gilt: $\ulcorner P{\times}H\,\alpha\urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$. Dann gibt es ein e', etwa e_2, so dass gilt: $\ulcorner{\times}H\,\alpha\urcorner$ ist wahr für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$, wobei $s_{b2}(e_2) = s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_2) <_{b2} t_{b2}(e_1)$. Dann ist für *jedes* b $\ulcorner H\alpha\urcorner$ wahr für $\langle t_b(e_2), s_b(e_2)\rangle$, also für jedes e" mit $t_b(e'') <_b t_b(e_2)$ und $s_b(e_2)=s_b(e'')$: α.

(ii) Kann es nun sein, dass $\ulcorner{\times}H{+}P{+}\alpha\urcorner$ für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ falsch ist? Sei b_3 ein beliebiges Bezugssystem und e_3 ein event, so dass $s_{b3}(e_3) = s_{b3}(e_1)$ und $t_{b3}(e_3) <_{b3} t_{b3}(e_1)$. Nach ($\Delta 8$) (!) ist $\Delta(e_2)\cap\Delta(e_3) \neq \emptyset$. Daraus folgt: $\Delta^-(e_2)\cap\Delta^-(e_3) \neq \emptyset$. Denn wenn $e_2 \neq e_3$, so kann der nichtleere Schnitt nur aus $\Delta^-(e_2)\cap\Delta^-(e_3) \neq \emptyset$ sein. Und wenn $e_2=e_3$, dann ist nach ($\Delta 4$) sowohl $\Delta^-(e_2)$ als auch $\Delta^-(e_3)$ nichtleer, nun aber natürlich $\Delta^-(e_2)=\Delta^-(e_3)$.

(iii) Sei e_4 ein beliebiges event aus $\Delta^-(e_2)\cap\Delta^-(e_3)$. Nun gilt, im vorauszusetzenden vollen Modell: Es gibt ein b", etwa b_4, so dass $s_{b4}(e_2)=s_{b4}(e_4)$. Außerdem gilt nach (ii): $e_4\in\Delta^-(e_2)$. Also gilt, wegen der Phalanx-Bedingung: $t_{b4}(e_4) <_{b4} t_{b4}(e_2)$. Nun gilt nach (i) auch für b_4: $\ulcorner H\alpha\urcorner$ ist wahr für b_4 an $t_{b4}(e_2)°s_{b4}(e_2)$, also für jedes e" mit $t_{b4}(e'') <_{b4} t_{b4}(e_2)$ und $s_{b4}(e_2)=s_{b4}(e'')$: α. Also gilt für e_4: α ist wahr für b_4 an $t_{b4}(e_4)°s_{b4}(e_4)$.

(iv) Es gilt außerdem, im vorauszusetzenden vollen Modell: Es gibt ein b“, etwa b_5, so dass $s_{b5}(e_3)=s_{b5}(e_4)$. Weil α wahr ist für ⟨$t_{b4}(e_4)$, $s_{b4}(e_4)$⟩, ist ⌈+α⌉ wahr für ⟨$t_{b5}(e_4)$, $s_{b5}(e_4)$⟩. Nun gilt: $e_4 \in \Delta^-(e_3)$. Also gilt, wegen der Phalanx-Bedingung: $t_{b5}(e_4) <_{b5} t_{b5}(e_3)$. Somit gilt: ⌈P+α⌉ ist wahr für ⟨$t_{b5}(e_3)$, $s_{b5}(e_3)$⟩. Also gilt: ⌈+P+α⌉ ist wahr für ⟨$t_{b3}(e_3)$, $s_{b3}(e_3)$⟩.

(v) b_3 und e_3 waren als Bezugssystem und als mit e_1 gleichortiges event vor e_1 beliebig gewählt. Also gilt: ⌈×H+P+α⌉ ist wahr für ⟨$t_{b1}(e_1)$, $s_{b1}(e_1)$⟩.

(2) Für den F/G-Fall argumentiert man analog.

Anmerkung: *Keines* der beiden Schemata ist bereits Rel^{pl}-allgemeingültig. Das sieht man an der unumgänglichen Erwähnung von (Δ8) in (1,ii).

(3) Wir stricken nun die fehlenden „+“ und „×“ in das erreichte Ergebnis hinein:

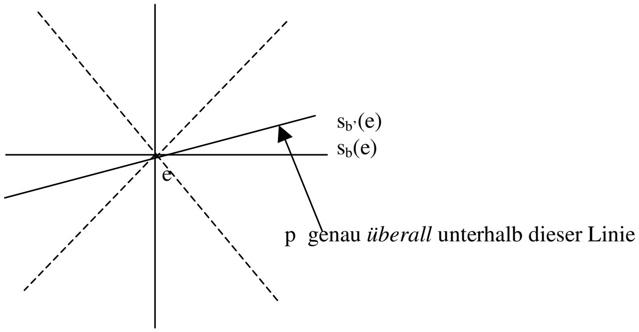
1 ×p → p	T für ×
2 G ×p → G p	1, DR 1 für G
3 ×G×p → ×G p	2, DR 1 für ×
4 +×G×p → ×G× p	S5 für ×
5 +×G×p → ×G p	3,4 PC (m.p.)
6 F+×G×p → F×G p	5, DR 3 für F
7 +F+×G×p → +F×G p	6, DR 3 für +
8 +F×G p → ×G +F+ p	wie unter (2) semantisch gezeigt
9 +F+×G×p → ×G +F+ p	7, 8, PC (m.p.)
10 +F+ p → ×+F+ p	S5 für ×
11 G +F+ p → G ×+F+ p	10, DR 1 für G
12 ×G +F+ p → ×G ×+F+ p	11, DR 1 für ×
13 +F+ ×G×p → ×G× +F+ p	9, 12, PC (m.p.)

Begründungen zu Teil III, Kapitel 3

B1

	1 T	Def. T	
	2 G T	1, NEC-G	
	3 G T → S G T	S5 für „S“	
	4 S G T	2, 3, MP	
	5 × S G T	4, NEC-×	„×SH“-Fall analog
	6 G T → F T	Randlosigkeit	
	7 F T	2, 6, MP	
...	11 × S F T	10, analog zu 2 – 5	„×SP“-Fall analog
	12 + S G T	4, S5 für ×	„+SH“-Fall analog
	13 + S F T	10, S5 für ×	„+SP“-Fall analog
	14 T → S T	S5 für „S“	
	18 S T	1, 14, MP	

B2



Für b, $s_b(e)$, $s_b(e)$: $\sim SPEp$, $+ \sim SPEp$, $+ \sim SP\sim Ep$, $\sim\times SPEp$, $\sim\times SP\sim Ep$, $\sim\times SP\ Ep$, $\sim\times SP\sim Ep$,
aber, weil „$Ep \vee \sim Ep$“ allgemeingültig ist: $\times SP\ (Ep \vee \sim Ep)$
Für b', $s_{b'}(e)$, $s_{b'}(e)$: $\sim SP\sim Ep$.

Für “ $\times SF$” und “ $\times S$” argumentiert man analog.
Also sind die folgenden Formeln nicht allgemeingültig:
$\times SP(Ep \vee \sim Ep) \rightarrow (\times SP\ Ep \vee \times SP \sim Ep)$,
$\times S(Ep \vee \sim Ep) \rightarrow (\times S\ Ep \vee \times S \sim Ep)$,
$\times SF(Ep \vee \sim Ep) \rightarrow (\times SF\ Ep \vee \times SF \sim Ep)$.

Immerhin lässt sich festhalten, dass „$\times SP$“, „$\times S$“ und „$\times SF$“ die folgenden Transitivitäts-Schemata allgemeingültig machen: $\ulcorner \times SP\ \alpha \rightarrow \times SP \times SP\ \alpha \urcorner$, $\ulcorner \times S\ \alpha \rightarrow \times S \times S\ \alpha \urcorner$, $\ulcorner \times SF\ \alpha \rightarrow \times SF \times SF\ \alpha \urcorner$.

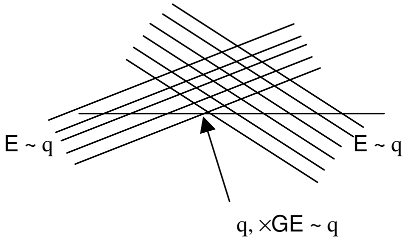
Begründung

1	$FFp \rightarrow Fp$	K_{lin}
2	$SSFFp \rightarrow SSFp$	1, K-DR 3 2x
3	$SSFp \rightarrow SFp$	S5 für „S“
4	$SSFFp \rightarrow SFp$	2, 3 MP
5	$SFFp \equiv FSFp$	(com)
6	$SSFFp \equiv SFSFp$	5, K-DR 3 beidseitig
7	$SFSFp \rightarrow SFp$	4, 6, äquival. Ersetzung
8	$\times SFp \rightarrow SFp$	S5 für $\times$
9	$F\times SFp \rightarrow FSFp$	8, K-DR 3 für F
10	$SF\times SFp \rightarrow SFSFp$	9, K-DR 3 für S
11	$\times SF\times SFp \rightarrow \times SFSFp$	10, K-DR 1für $\times$
12	$\times SFSFp \rightarrow \times SFp$	7, K-DR 1für $\times$
13	$\times SF\times SFp \rightarrow \times SFp$	11, 12, PC

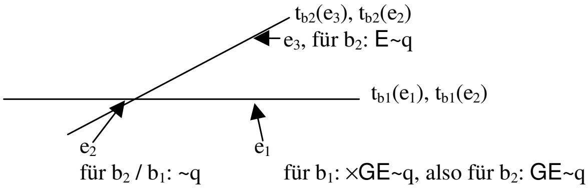
„P“-Fall und „S“-Fall analog (der „S“-Fall ist sehr redundant, aber Hauptsache, er funktioniert!).

B3

Warum ist das so? Zunächst folgt aus „$\times(HE \sim q \wedge q \wedge GE \sim q)$“ Bedingung abgeschwächt „$HE \sim q \wedge q \wedge GE \sim q$“. „$HE \sim q$“ stellt sicher, dass, relativ zum gerade benutzten Bezugssystem, zu jedem früheren Zeitpunkt überall „$\sim$ p“ vorliegt; „$GE \sim q$“ stellt dies für jeden späteren Zeitpunkt überall sicher. Dies lässt die Möglichkeit offen, dass „p“ außer an der gegenwärtigen Position auch noch an beliebigen entfernten Orten zur selben Zeit wahr sein kann. Fordert man aber „$\times(HE \sim q \wedge q \wedge GE \sim q)$“, so ist dies ausgeschlossen. Daraus folgt nämlich (mit K) „$\times HE \sim q$“, das für Satzbuchstaben harmlose „$\times q$“ und „$\times GE \sim q$“. „$\times HE \sim q$“ und „$\times GE \sim q$“ können aber nur wahr werden, wenn auch zur selben Zeit nirgendwo anders “q” vorliegt. Denn in vollen Modellen gibt es immer zum benutzten Koordinatensystem b ein weiteres, etwa b', so dass die Zeitpunkte von b' die Zeitpunkte von b schräg durchqueren. Man kann deshalb mit Hilfe von b' die Raumzeit gleichsam noch einmal schräg übertünchen, um zuvor noch nicht ganz abgedeckte Stellen ebenfalls zu erreichen.



Natürlich lässt sich das auch weniger pittoresk *in abstracto* ausführen (die Grundidee wäre jedoch ohne die Illustration vermutlich kaum zu verstehen): Es sei an $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ „×HE ~q" und „×GE ~q" wahr (b_1 rechtwinklig dargestellt). Sei e_2 ein event, so dass gilt: $e_2 \in t_{b1}(e_1)$ und $e_1 \neq e_2$. Die Bedingung (2) für volle Modelle lautet: Für jedes b aus B, e, e' mit $e' \in t_b(e)$ gilt: Es gibt ein b' aus B und ein e" aus W, so dass $\{e'\} = t_b(e) \cap t_{b'}(e")$. Also gilt: Es gibt ein b' aus B und ein e" aus W, so dass $\{e_2\} = t_{b1}(e_1) \cap t_{b'}(e")$. Sei b_2 ein solches Bezugssystem und e_3 ein solches event, so dass also gilt: $\{e_2\} = t_{b1}(e_1) \cap t_{b2}(e_3)$.



Zunächst lässt sich festhalten, da $e_1 \neq e_2$, dass e_1 nicht in $t_{b2}(e_3)$ enthalten sein kann. Denn sonst müsste man auch e_1 in $t_{b1}(e_1) \cap t_{b2}(e_3)$ finden, da e_1 natürlich in $t_{b1}(e_1)$ enthalten ist. Es ist also $t_{b2}(e_3) \neq t_{b2}(e_1)$. Wegen der Linearität von $<_{b2}$ gilt daher: $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_3)$ oder $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_3)$. Nun ist für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ „×HE ~q" und „×GE ~q" wahr, also für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1)\rangle$ „HE ~q" und „GE ~q". Also gilt sowohl im Falle von $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_3)$ als auch im Falle von $t_{b2}(e_1) <_{b2} t_{b2}(e_3)$ für $\langle t_{b2}(e_3), s_{b2}(e_3)\rangle$: E~q. Da $t_{b2}(e_2) = t_{b2}(e_3)$, ist also für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$ „~ q" wahr. Da „q" ein Satzbuchstabe ist, ist für $\langle t_{b2}(e_2), s_{b2}(e_2)\rangle$ dann „× ~ q" wahr, also auch für b_1 an $\langle t_{b1}(e_2), s_{b1}(e_2)\rangle$ „~ p". Somit gilt: *Nur* wenn e identisch mit e_1 ist, kann gelten: Für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1)\rangle$ ist „p" wahr.

Begründungen für Teil IV, Kapitel 2

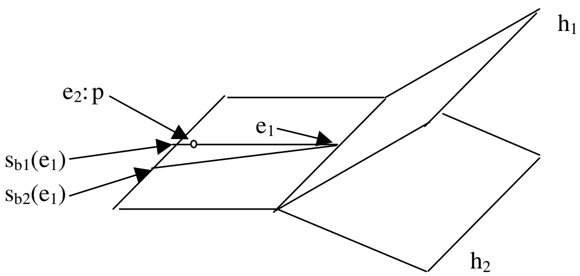
B1

Korrektheit der fragmentarischen Axiomatik für LFxRel.

1. Die Axiom-Schemata unter (a) i) – iii), (b), (c), (d), (e) (außer (Dichte), da LFxS5 keine explizite Dichteforderung enthält) sind wegen des Einschlusses von LFxS5 in LFxRel ohne weiteres LFxRel-allgemeingültig.
   Denn: Man beginnt einen Beweis für ein Schema immer für ein Tupel $\langle t_b(e), s_b(e), h \rangle$ eines beliebigen LFxRel-Modells M, also unter Voraussetzung eines bestimmten Bezugssystems b aus B_M. Solange man im Beweis für ein Schema kein anderes Bezugssystem als b erwähnen muss, entspricht M, abgesehen von der Definition der Verinselungsfreiheit, einem LFxS5-Modell M' mit b als Koordinatensystem und denselben Interpretationsfunktionen etc. Für M' sind die genannten Schemata wahr, denn sie sind ein korrekte fragmentarische Axiomatik für LFxS5 und also LFxS5-allgemeingültig. Nun muss man aber für den Beweis der LFxRel-Allgemeingültigkeit eines dieser Schemata nie ein anderes Bezugssystem als b erwähnen. Für ihre Allgemeingültigkeit ist der „×"-Operator ja irrelevant. Also sind die genannten Schemata LFxRel-allgemeingültig.
2. Die Axiomen-Schemata unter (a) iv), (b), (c) und (f) (einschließlich (Dichte)) sind wegen des Einschlusses von Rel in LFxRel ohne weiteres LFxRel-allgemeingültig.
   Denn: Man beginnt einen Beweis für ein Schema immer für ein Tupel $\langle t_b(e), s_b(e), h \rangle$ eines beliebigen LFxRel-Modells M, also unter Voraussetzung eines bestimmten Weltblatts h aus H_M. Solange man im Beweis für ein Schema kein anderes Weltblatt als h erwähnen muss, entspricht M einem Rel-Modell M' mit h als Interpretationsfunktion. Für M' sind die genannten Schemata wahr, denn sie sind eine korrekte fragmentarische Axiomatik für Rel und also Rel-allgemeingültig. Nun muss man aber für den Beweis der LFxRel-Allgemeingültigkeit eines dieser Schemata nie ein anderes Weltblatt als h erwähnen. Für ihre Allgemeingültigkeit sind der „N"-Operator und die Box ja irrelevant. Also sind die genannten Schemata LFxRel-allgemeingültig.
3. Die Herleitungsregeln erhalten unproblematisch die Allgemeingültigkeit.

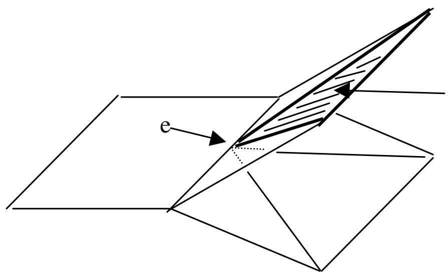
B2

1. Gegenbeispiel zu $\ulcorner N\,\alpha \rightarrow \times\,\alpha \urcorner$ mit α = „Pp".



Einzig an e_2 sei „p" wahr. Es ist nun „Pp" für $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ sowohl in h_1 als auch h_2 wahr. Also ist für $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_1 „NPp" wahr. Es ist aber, für h_1 wie für h_2, „Pp" für $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ falsch: $s_{b2}(e_1)$ zielt am „p"-event vorbei, denn b_2 koordiniert e_2 nicht als gleichortig mit e_1. Also ist für „×Pp" für $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_1 falsch. Also ist dafür „NPp ∧ ~×Pp" wahr und „NPp → ×Pp" falsch.

2. Gegenbeispiel zu $\ulcorner \times \alpha \rightarrow \mathrm{N}\,\alpha \urcorner$ mit α = „Fp“:

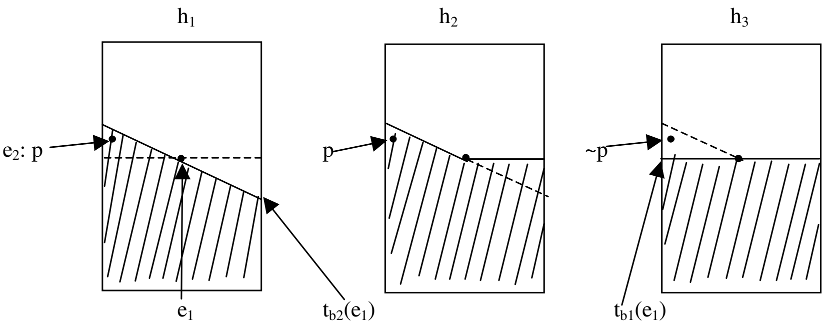


Im gesamten Zukunftslichtkegel von e in h_1 soll „p“ wahr sein. Deshalb ist, bei beliebig gewähltem b, an $t_b(e)$ und $s_b(e)$ für h_1 „×Fp“ wahr. Es ist aber für h_2 nirgends „p“ wahr. Es ist als für h_2 an an $t_b(e)$ und $s_b(e)$ „Fp“ falsch. Also ist für h_1 an an $t_b(e)$ und $s_b(e)$ „NFp“ falsch und „~NFp“ wahr. Also ist h_1 an an $t_b(e)$ und $s_b(e)$ „×Fp ∧ ~NFp“ wahr und „×Fp → NFp“ falsch.

B3

In den folgenden Gegenbeispielen sind drei Weltblätter eines LFxRel-Modells auseinander gelegt dargestellt.

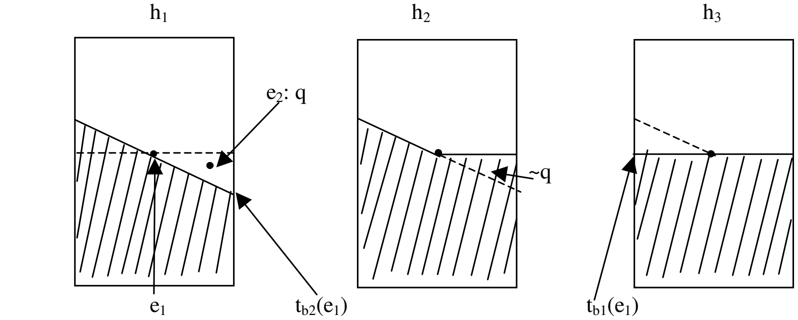
1. Gegenbeispiel zu (chr +N) $\ulcorner$+Nα → N+$\alpha\urcorner$ mit α = SPp



$h_1 \not A_{e1,b1} h_2$, $h_1 \not A_{e1,b1} h_3$, $h_2 A_{e1,b1} h_3$; $h_1 A_{e1,b2} h_2$, $h_1 \not A_{e1,b2} h_3$, $h_2 \not A_{e1,b2} h_3$.

„p“ sei, wenn überhaupt, an e_2 wahr. An $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ ist in h_1 und h_2 „SPp“ wahr. Es gilt, zusätzlich zur Selbstzugänglichkeit von Alternativen, allein: $h_1 A_{e1,b2} h_2$. Also ist an $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ in h_2 „NSPp“ wahr. Also ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „+NSPp“ wahr. An $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ ist in h_3 „SPp“ falsch (Das „p“-event ist zwar vorhanden, liegt aber nach b_1 noch in der Zukunft). Außerdem ist an $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ in h_3 „SPp“ falsch (in h_3 gibt es kein „p“-event). Es ist also an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_3 „+SPp“ falsch. Es gilt: $h_2 A_{e1,b1} h_3$. Deshalb ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „N+SPp“ falsch. Es ist also an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „+NSPp ∧ ~ N+SPp“ wahr und „+NSPp → N+SPp“ falsch.

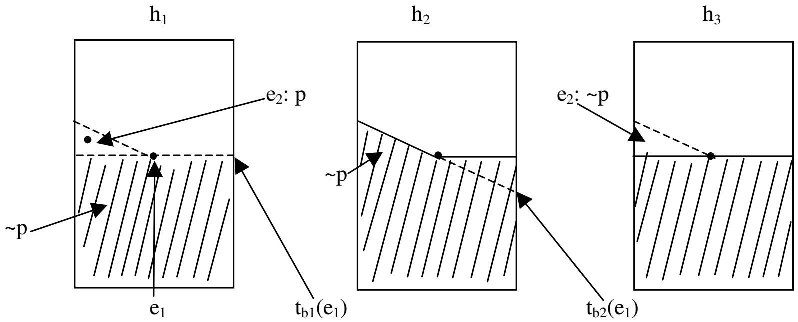
2.Gegenbeispiel zu (com +M) $\ulcorner$ +M$\alpha \rightarrow$ M+$\alpha \urcorner$ mit α = SFq



$h_1 \not A_{e1,b1} h_2$, $h_1 \not A_{e1,b1} h_3$, $h_2 A_{e1,b1} h_3$; $h_1 A_{e1,b2} h_2$, $h_1 \not A_{e1,b2} h_3$, $h_2 \not A_{e1,b2} h_3$.

„q“ sei, wenn überhaupt, an e_2 wahr, nicht wahr jedoch in h_2 und h_3. An $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ ist in h_1 „SFp“ wahr. Es gilt: $h_1 A_{e1,b2} h_2$. Also ist an $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ in h_2 „MSFp“ wahr. Also ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „+MSFp“ wahr. Bezüglich e_1 ist sowohl für b_1 als auch für b_2 sowohl in h_2 als auch in h_3 „SFp“ falsch. Es ist also sowohl an $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ in h_2 als auch in h_3 „+SFp“ falsch. Es gilt für b_1 zusätzlich zur Selbstzugänglichkeit allein $h_2 A_{e1,b1} h_3$. Also ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „M+SFp“ falsch. Es ist also an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „+MSFp $\wedge$ ~ N+SFp“ wahr und „+NSFp $\rightarrow$ N+SFp“ falsch.

3. Gegenbeispiel zu (com M+) $\ulcorner$ M+$\alpha \rightarrow$ +M$\alpha \urcorner$ mit α = SPp

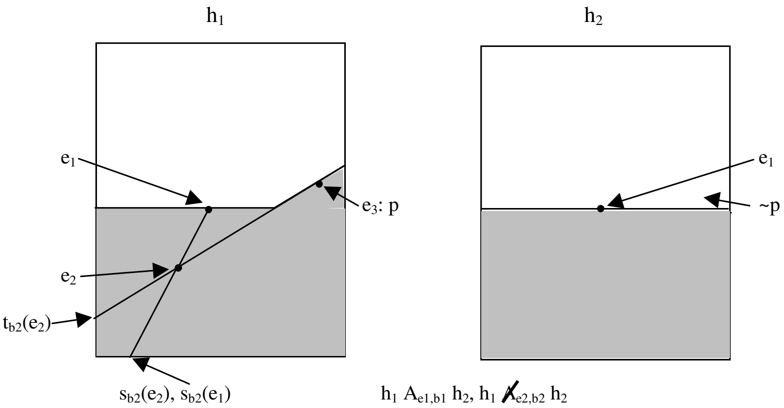


$h_1 A_{e1,b1} h_2$, $h_1 A_{e1,b1} h_3$, $h_2 A_{e1,b1} h_3$; $h_1 \not A_{e1,b2} h_2$, $h_1 \not A_{e1,b2} h_3$, $h_2 \not A_{e1,b2} h_3$.

„p“ sei, wenn überhaupt, an e_2 wahr, nicht wahr jedoch in h_2 und h_3. An $s_{b2}(e_1)$ und $t_{b2}(e_1)$ ist in h_1 „SPp“ wahr. Also ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ ist in h_1 „+SPp“ wahr. Es gilt: $h_1 A_{e1,b1} h_2$. Also ist an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_3 „M+SPp“ wahr. An $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ ist in h_1, h_2 und h_3 „SPp“ falsch (in h_1 deshalb, weil das „p“-event für b_1 noch in der Zukunft liegt, ansonsten, weil es keines gibt). Es ist also an $s_{b1}(e_1)$ und $t_{b1}(e_1)$ in h_3 „MSPp“ falsch. Außerdem ist an $s_{b2}(e_1)$, $t_{b2}(e_1)$ in h_2 und h_3 „SPp“. h_1 ist, wegen er Divergenz von p und ~p an e_2, von h_3 aus über b_2 nicht zugänglich. Es ist also auch an $s_{b2}(e_1)$, $t_{b2}(e_1)$ in h_3 „MSPp“ falsch. Damit ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_3 „+MSPp“ falsch. Es ist also an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_3 „M+SPp $\wedge$ ~ +MSPp“ wahr und „M+SPp $\rightarrow$ +MSPp“ falsch.

B4

(a) Das Gegenbeispiel ähnelt den auseinander gelegten Modellen in B3.



$h_1\ A_{e1,b1}\ h_2$, $h_1\ \cancel{A}_{e2,b2}\ h_2$

An $s_{b2}(e_3)$, $t_{b2}(e_3)$ in h_1 ist „p“ wahr, also an $s_{b2}(e_2)$, $t_{b2}(e_2)$ in h_1 „Sp“. Nur h_1 ist an e_2 über b_2 von h_1 aus zugänglich. Also ist an $s_{b2}(e_2)$, $t_{b2}(e_2)$ in h_1 „NSp“ wahr. Also ist an $s_{b2}(e_1)$, $t_{b2}(e_1)$ in h_1 „PNSp“ wahr. Also ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_1 „+PNSp“ wahr. An $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „PSp“ offensichtlich ebenso falsch wie an $s_{b2}(e_1)$, $t_{b2}(e_1)$. Also ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_2 „+PSp“ falsch. Nun ist h_2 an e_1 über b_1 von h_1 aus zugänglich. Also ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_1 „N+PSp“ falsch. Es ist also an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_1 „+PNSp $\wedge$ ~ N+Pp“ wahr und „+PNSp $\rightarrow$ N+Pp“ falsch.

(b)
“$\times$p $\equiv$ Np”: Man hat ja aus der Rel-Komponente “p $\equiv$ $\times$p” für Satzbuchstaben, aus der LF-Komponente “p $\equiv$ Np”.
“$\times$Pp $\rightarrow$ NPp”: Aus der Rel-Komponente hat man “$\times$Pp $\rightarrow$ Pp”. Für “Pp” muss “p”-event am gleichen Ort in der Vergangenheit vorliegen. Das macht “ NPp” wahr. (NB: Der zweite Schritt geht nicht mit “Fp” statt “p”!)
Nicht “NPp $\rightarrow$ $\times$Pp“: Dass man mit dem Ausgangssystem in der Vergangenheit zufällig mal ein gleichortiges „p“-event trifft, heißt noch lange nicht, dass das für *jede* Achsenneigung so ist.
“NPp $\rightarrow$ $\times$PSp“: Wenn man mit dem Ausgangssystem in der Vergangenheit ein gleichortiges „p“-event trifft, muss sich das „p“-event im Vergangenheitslichtkegel liegen. Dann trifft man dieses event für jedes Koordinatensystem in der Vergangenheit – freilich außer im Ausgangssystem nicht am geichen Ort („S“!).

B5

Da die Zugänglichkeitsrelation für die Box die universelle Relation auf der Alternativenmenge H ist und die Zugänglichkeitsrelation für „$\times$“ die universelle Relation auf der Menge der Bezugssysteme B, macht die Reihenfolge der Anwendung der Operatoren keinen Unterschied:

1. (chr +$\Box$) $\ulcorner +\Box\alpha \rightarrow \Box+\alpha \urcorner$
Angenommen, $\ulcorner +\Box\alpha \urcorner$ sei wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_1\rangle$. Dann gibt es ein b aus B, etwa b_2, so dass , $\ulcorner \Box\alpha \urcorner$ wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h_1\rangle$. Dann gilt für alle h aus H, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h\rangle$. Sei h_2 ein Element aus H. So gilt, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h_2\rangle$. Dann ist $\ulcorner +\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_2\rangle$. h_2 war beliebig gewählt, also ist auch $\ulcorner \Box+\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_1\rangle$.

2. (com +$\Diamond$) $\ulcorner +\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond+\alpha \urcorner$
Angenommen, $\ulcorner +\Diamond\alpha \urcorner$ sei wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_1\rangle$. Dann gibt es ein b aus B, etwa b_2, so dass , $\ulcorner \Diamond\alpha \urcorner$ wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h_1\rangle$. Dann gibt es ein h aus H, so dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h\rangle$. Sei h_2 ein Element aus H. So gilt, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1), s_{b2}(e_1), h_2\rangle$. Dann ist $\ulcorner +\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_2\rangle$. Also ist $\ulcorner \Diamond+\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1), s_{b1}(e_1), h_1\rangle$.

3. (com ◊+) $\ulcorner\Diamond{+}\alpha \rightarrow {+}\Diamond\alpha\urcorner$
Angenommen, $\ulcorner\Diamond{+}\alpha\urcorner$ sei wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_1\rangle$. Dann gibt es ein h aus H, etwa h_2, so dass , $\ulcorner{+}\alpha\urcorner$ wahr ist für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_2\rangle$. Dann gibt es ein b aus B, so dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h_2\rangle$. Sei b_2 ein Element aus B. So gilt, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h_2\rangle$. Dann ist $\ulcorner\Diamond\alpha\urcorner$ wahr für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h_1\rangle$. Also ist $\ulcorner{+}\Diamond\alpha\urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_1\rangle$.

B6

1. „N_Δ"
Für die Zugänglichkeitsmenge für „N_Δ" Δ_e war in Kap. II 3.3.2.1 Folgendes gefordert:
a) Sie muss e selbst enthalten (im Falle des Dreiecks: als Spitze);
b) Sie ist Teilmenge von $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$.
c) Für alle e, e': Wenn $t_{e'} < t_e$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \Delta_e$ (maximale Rückerstreckung)
d) Für alle e, e': Wenn $e' \in \Delta_e$, dann $\Delta_{e'} \subseteq \Delta_e$. (Rückwärts-Kegelinklusion).

3NxLF-Modelle basieren auf normalen Lichtkegel-Strukturen im Sinne von Kap. III 2. Es ist zu zeigen, dass der Vergangenheitslichtkegel eines events einer normalen Lichtkegel-Struktur die genannten Forderungen für *jedes* darauf definierte Koordinatensystem erfüllt. Es muss also gelten:
a') $e \in \Delta(e)$
b') Für jedes Koordinatensystem b gilt: $\Delta(e) \subseteq \{e' \mid t_b(e') \leq_b t_b(e)\}$;
c') Für alle b, e, e': Wenn $t_b(e') < t_b(e)$ und $s_b(e') = s_b(e)$, dann $e' \in \Delta(e)$;
d') Für alle b, e, e': Wenn $e' \in \Delta(e)$, dann $\Delta(e') \subseteq \Delta(e)$.

Zu a') Dies ist gefordert als (Δ1).

Zu b') Für ein beliebiges b gilt: $\{e' \mid t_b(e') \leq_b t_b(e)\}$ besteht aus $t_b(e)$ und $\{e' \mid t_b(e') <_b t_b(e)\}$. Nach Forderung (t2) überschneiden sich $t_b(e)$ und sein Vergangenheitslichtkegel in e selbst. e gehört also zu $t_b(e)$. Es bleibt zu fragen ob $\Delta^-(e)$ Teilmenge von $\{e' \mid t_b(e') <_b t_b(e)\}$ ist. Angenommen, e' sei in $\Delta^-(e)$ enthalten. So gibt es ein e'', so dass $t_b(e'') = t_b(e')$ und $s_b(e'') = s_b(e)$. Dann gilt: $e'' \prec_b e$. Denn e'' ist nach (s2), ebd., als mit e gleichortiges event im Lichtkegel von e enthalten. Dann gilt aber nach der Definition von $<_b$ auch: $t_b(e') <_b t_b(e)$.

Zu c') Dies folgt direkt aus den Definitionen von $<_b$ und $\prec_b$.

Zu d') Dies folgt sofort aus der Forderung (Δ3).

2. „N_∇"
Für die Zugänglichkeitsmenge für „N_∇" ∇_e war in Kap. II 3.3.2.1 Folgendes gefordert:
a) ∇_e besteht aus $\{e' \mid t_{e'} \leq t_e\}$ vereinigt mit einer echten Teilmenge von $\{e' \mid t_e < t_{e'}\}$;
b) Für alle e, e': Wenn $t_e < t_{e'}$ und $s_{e'} = s_e$, dann $e' \in \nabla_e$ (maximale Vorwärtserstreckung);
c) Für alle e, e': Wenn $e \in \nabla_{e'}$, dann $\nabla_e \subseteq \nabla_{e'}$ (Vorwärts-Kegelinklusion).

3NxLF-Modelle basieren auf normalen Lichtkegel-Strukturen im Sinne von Kap. III 2. Es ist zu zeigen, dass der Vergangenheitslichtkegel eines events einer normalen Lichtkegel-Struktur die genannten Forderungen für *jedes* darauf definierte Koordinatensystem erfüllt. Es muss also für ein beliebiges Bezugssystem b gelten:
a') ∇_e besteht aus $\{e' \mid t_b(e') \leq_b t_b(e)\}$ vereinigt mit einer echten Teilmenge von $\{e' \mid t_b(e) <_b t_b(e')\}$;
b') Für alle b, e, e': Wenn $t_b(e) < t_b(e')$ und $s_b(e') = s_b(e)$, dann $e' \in \nabla(e)$;
c') Für alle b, e, e': Wenn $e \in \nabla(e')$, dann $\nabla(e) \subseteq \nabla(e')$.

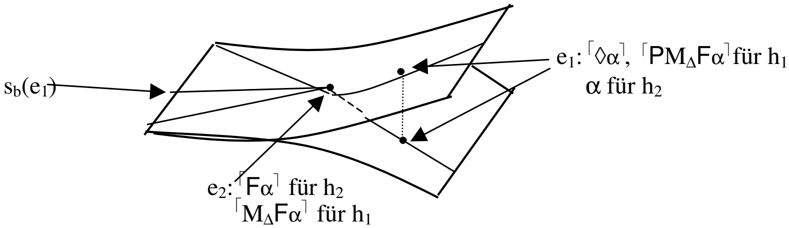
Zu a') Dies ist offensichtlich wahr: Die echte Teilmenge, von der die Rede ist, ist der obere Teil der „wings" ab $t_b(e)$, $\{e' \mid t_b(e') \leq_b t_b(e)\}$ ist $\Delta(e)$ vereinigt mit dem unter $t_b(e)$ liegenden Teil der „wings" und $t_b(e)$ selbst.

Zu b') Der Beweis ist analog zum Beweis zu b') unter 1.

Zu c‘) Vgl. (Δ3) und B7 zu Kap. III 2.

B7

(a) Angenommen, $\ulcorner\Diamond\alpha\urcorner$ sei an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ ist in h_1 wahr. Dann gibt es ein h aus H, so dass gilt: α ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ ist in h wahr. Sei h_2 ein solches h. So gilt: α ist an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ ist in h_2 wahr. Nun gilt nach der Bedingung für die Verinselungsfreiheit: Es gibt zu h_1, h_2, e_1 und b_1 ein event e, so dass $s_{b1}(e_1)= s_{b1}(e)$, $t_{b1}(e) <_{b1} t_{b1}(e)$ und für alle e“ mit e“ $\in \Delta$(e‘) gilt: $h_1(\alpha$,e“) = $h_2(\alpha$,e“). Sei e_2 ein solches event. So gilt für alle e“ mit e“ $\in \Delta(e_2)$: $h_1(\alpha$,e“) = $h_2(\alpha$,e“). Also gilt (a): $h_1A^{N\Delta}_{e2}\ h_2$. Außerdem gilt (b): $t_{b1}(e_2) <_{b1} t_{b1}(e_1)$. Es ist wegen (b) an $s_{b1}(e_2)$, $t_{b1}(e_2)$ in h_2 $\ulcorner F\alpha\urcorner$ wahr. Deshalb ist, wegen (a), an $s_{b1}(e_2)$, $t_{b1}(e_2)$ in h_1 $\ulcorner M_\Delta F\alpha\urcorner$ wahr. Deshalb ist, wieder wegen (b) an $s_{b1}(e_1)$, $t_{b1}(e_1)$ in h_1 $\ulcorner PM_\Delta F\alpha\urcorner$ wahr.



Nicht genügt hätte es, wenn man für die Verinselungsfreiheit lediglich gefordert hätte, dass zwei Alternativen (1) auf einem einzigen event oder (2) auf dem Vergangenheitslichtkegel eines einzigen events gleich beschriftet sein müssen. Die zweite Forderung ist höchstens für eine Kombination mit Rel^{root} angemessen, weil dort gefordert ist, dass sich wie beliebige Vergangenheitslichtkegel irgendwann überschneiden. Der zu beachtende Extremfall ist, dass Rel völlig isolierte Lichtkegel-Strukturen zulässt, die gleichsam aus lauter nebeneinander liegenden Schwarzen Löchern bestehen, so dass kein Licht von einem Ort zum andern gelangt.

Man beachte, dass in der Zeichnung $h_1A^N_{e2,b1}\ h_2$ nicht vorliegt und, wenn man sich die Blätter verbreitert und verlängert vorstellt, nie vorgelegen hat, dort aber ein ganz respektables Modell angegeben ist. Die Zeichnung ist damit auch ein Gegenbeispiel für die Behauptung, $\ulcorner\Diamond\alpha \to PMF\alpha\urcorner$ sei 3NxRel- oder auch nur LFxRel-allgemeingültig.

(b)

„$\times$NPp $\to$ N_ΔPp“: Wenn für jede Achsenneigung mit entsprechender Verzweigungskante ein „p“-event in der Vergangenheit als gleichortig koordinierbar ist („$\times$NPp“), so auch sicher im Ausgangssystem („Pp“). Als gleichortig liegt es im Vergangenheitslichtkegel und ist deshalb in allen Alternativen vorhanden, die mit der Bewertungs-Alternative auf dem Vergangenheitslichtkegel gleich beschriftet sind („N_ΔPp“).

„N_ΔPp $\to$ $\times$NPSp“: Wenn auf allen mit der Bewertungs-Alternativen auf dem Vergangenheitslichtkegel des Bewertungs-events gleich beschrifteten ein als gleichortig koordiniertes „p“-event zu finden ist, dann ist es auch bei beliebiger Achsenneigung mit entsprechender Verzweigungskante dort zu finden – nur nicht unbedingt am gleichen Ort („S“!).

„+NPp $\to$ N_ΔPSp“: Wenn überhaupt für eine Achsenneigung mit entsprechender Verzweigungskante ein „p“-event in der Vergangenheit als gleichortig koordinierbar ist („+NPp“), so liegt es auch im Ausgangssystem im Vergangenheitslichtkegel, nur nicht unbedingt gleichortig („PSp“). Deshalb liegt es auch in allen Alternativen vorhanden, die mit der Bewertungs-Alternative auf dem Vergangenheitslichtkegel gleich beschriftet sind, im Vergangenheitslichtkegel, nur nicht unbedingt gleichortig („N_ΔPSp“).

„$\times$p $\equiv$ N_Δp“: Man hat ja aus Rel “p $\equiv$ $\times$p” für Satzbuchstaben, aus der 3N-Komponente “p $\equiv$ N_Δp”.

„$\times$p $\equiv$ N_∇p“: Man hat ja aus Rel “p $\equiv$ $\times$p” für Satzbuchstaben, aus der 3N-Komponente “p $\equiv$ N_∇p”.

B8

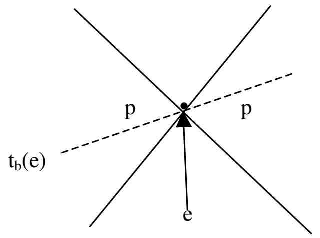
Die Beweise für „M_Δ“ / „N_Δ“ sind ganz regelmäßig und völlig analog zu B5. Es genügt daher als Beispiel das (chr)-Gesetz.

(chr $+N_2$) $\ulcorner +N_\Delta\alpha \rightarrow N_\Delta+\alpha \urcorner$
Angenommen, $\ulcorner +N_\Delta\alpha \urcorner$ sei wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_1\rangle$. Dann gibt es ein b aus B, etwa b_2, so dass , $\ulcorner N_\Delta\alpha \urcorner$ wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h_1\rangle$. Dann gilt für alle h aus H mit h $A^{N\Delta}{}_{e1}$ h_1, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h\rangle$. Sei h_2 ein Element aus H mit h_2 $A^{N\Delta}{}_{e1}$ h_1. So gilt, dass α wahr ist für $\langle t_{b2}(e_1),s_{b2}(e_1),h_2\rangle$. Dann ist $\ulcorner +\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_2\rangle$. h_2 war beliebig unter den Alternativen mit h_2 $A^{N\Delta}{}_{e1}$ h_1 gewählt. Also ist $\ulcorner +\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h\rangle$ für jedes h mit h_2 $A^{N\Delta}{}_{e1}$ h_1. Also ist $\ulcorner N_2+\alpha \urcorner$ wahr für $\langle t_{b1}(e_1),s_{b1}(e_1),h_1\rangle$.

Die Beweise für „M_∇“ / „N_∇“ sind ganz dieselben, nur mit „M_∇“ / „N_∇“ statt mit „M_Δ“ / „N_Δ“.

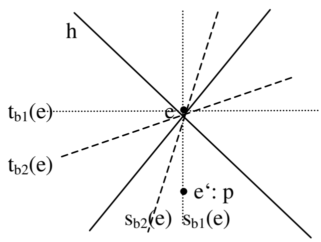
B9

1. Gegenbeispiel zu $\ulcorner \times N\,\alpha \rightarrow N_\Delta\,\alpha \urcorner$ mit α = SPp



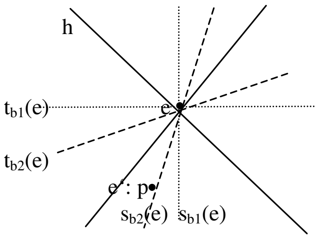
Vorausgesetzt sei ein volles Modell. Genau in den ganzen „wings“ von e in h sei „p“ wahr. Es ist dann (z.B.) für b „SPp“ an $t_b(e)$, $s_b(e)$ für b in h wahr. Dies gilt auch für alle mit h bis einschließlich $t_b(e)$ gleich beschrifteten Alternativen. Also ist „NSPp“ an $t_b(e)$, $s_b(e)$ in h wahr. Nun war b beliebig gewählt. Es gilt also für jedes b‘: „NSPp“ an $t_{b'}(e)$, $s_{b'}(e)$ in h wahr. Also ist „$\times$ N SPp“ an $t_b(e)$, $s_b(e)$ in h wahr. Außerdem sei eine zwar nicht bis einschließlich $t_b(e)$, aber auf dem ganzen Vergangenheitslichtkegel von e mit h gleiche Alternative h_2 so beschaffen, dass in ihr nirgends „p“ wahr ist. Dann gilt für h_2 klarerweise: „SPp“ ist an $t_b(e)$, $s_b(e)$ in h_2 falsch. Also gilt für $t_b(e)$, $s_b(e)$ in h: „N_ΔSPp“ ist falsch. Damit ist an $t_b(e)$, $s_b(e)$ in h „$\times$NSPp $\wedge$ ~N_ΔSPp“ wahr und „$\times$NSPp $\rightarrow$ N_Δ SPp“ falsch.

2. Gegenbeispiel zu $\ulcorner N_\Delta\,\alpha \rightarrow \times N\,\alpha \urcorner$ mit α = Pp



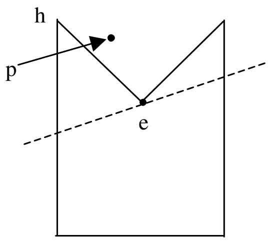
An $t_{b1}(e)$, $s_{b1}(e)$ ist in h „N_ΔPp“ wahr. Es ist auch „NPp“ wahr, nicht aber „$\times$NPp“. Denn für jedes andere Bezugssystem b‘ liegt e‘ nicht auf $s_{b'}(e)$.

3. Gegenbeispiel zu $\ulcorner + \mathrm{N}\,\alpha \rightarrow \mathrm{N}_\nabla\,\alpha \urcorner$



An $t_{b2}(e)$, $s_{b2}(e)$ ist in h „NPp“ wahr. Also ist an $t_{b1}(e)$, $s_{b1}(e)$ und h „+NPp“ wahr. Es ist aber an $t_{b1}(e)$, $s_{b1}(e)$ und h „N_∇Pp“ falsch. Denn e‘ liegt nicht auf $s_{b1}(e)$.

4. Gegenbeispiel zu $\ulcorner \mathrm{N}_\nabla\,\alpha \rightarrow + \mathrm{N}\,\alpha \urcorner$ mit α = SFp



„p“ ist („zufällig“) in allen auf der mit h auf der „N_∇“-Zugänglichkeitsfläche gleich beschrifteten Alternativen wahr. Also ist an $t_b(e)$, $s_b(e)$ und h „N_3 SFp“ wahr. Aber es gibt für jedes b‘ in Menge der nur bis zu einschließlich $t_{b'}(e)$ so beschrifteten Alternativen immer eine, in der „p“ nirgends wahr ist (*diese* Alternativenmenge ist für jedes b‘ größer als die Alternativenmenge für „N_∇“!). Also ist an $t_b(e)$, $s_b(e)$ und h „+ N SFp“ falsch.

B10

Die Definition mit Hilfe von $A_{N\Delta}$ lautet:

h $A^{N}_{e,b}$ h‘ gdw für jedes e‘ aus W mit e‘ $\in t_b(e)$ gilt: h $A^{N\Delta}_{e'}$ h‘.

Mit der Definition von $A^{N\Delta}$ ausbuchstabiert heißt das, dass h $A^{N}_{e,b}$ h‘ gerade dann vorliegt, wenn gilt:

Für jedes e‘ aus W mit e‘ $\in t_b(e)$, jede atomare Formel α und jedes e“ aus W gilt:
Wenn e“ $\in \Delta$(e‘), dann h(α,e“) = h‘(α, e“).

Die Definition ist angemessen: (1) e_1 sei aus W. Die A^N-Zugänglichkeitsfläche bis einschließlich $t_b(e_1)$ ist offensichtlich die Menge aller e, für die gilt: Es gibt ein e‘ aus $t_b(e_1)$, $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e) \leq t_b(e')$. (2) Für ein beliebig gewähltes e_2 aus $t_b(e_1)$ gilt klarerweise: $\Delta(e_2)$ enthält alle e“ mit $s_b(e_2) = s_b(e)$ und $t_b(e) \leq t_b(e_2)$. Nach Voraussetzung gilt: $t_b(e_2) = t_b(e_1)$. Alle Vergangenheitslichtkegel aller events aus $t_b(e_1)$ zusammen enthalten also alle e, für die überhaupt gilt: Es gibt ein e‘ aus $t_b(e_1)$, $s_b(e') = s_b(e)$ und $t_b(e) \leq t_b(e')$. (3) Sie enthalten aber auch nicht *mehr* events, denn für jedes event e“, für das *nicht* gilt, dass es ein e‘ aus $t_b(e_1)$, $s_b(e') = s_b(e'')$ und $t_b(e'') \leq t_b(e')$ gibt, gilt: $t_b(e'') < t_b(e_1)$. Damit kann e“ nicht in der Menge der events enthalten sein, die zu einem *Vergangenheits*lichtkegel eines events auf $t_b(e_1)$ gehören. (4) Also ist die Menge aller Vergangenheitslichtkegel aller events aus $t_b(e_1)$ zusammen identisch mit der A^N-Zugänglichkeitsfläche. (5) Die ausbuchstabierte Definition im Haupttext zeigt aber auch: Die dort definierte Zugänglichkeitsfläche ist gerade die Menge aller events, die zu einem

Vergangenheitslichtkegel eines events aus $t_b(e_1)$ gehören. (6) Also ist die dort definierte Zugänglichkeitsfläche gerade die A^N-Zugänglichkeitsfläche.

Begründungen zu Teil IV, Kap. 3

B1

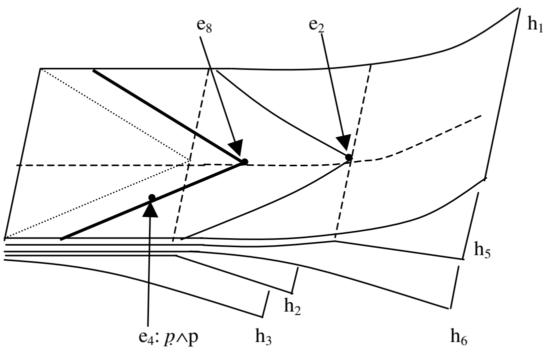
(a) Def. S: Sei M = ⟨W, Δ, B, H, V⟩ ein 3NxRel-Modell. S ist eine Funktion, die einer wohlgeformten Formel α für ein Bewertungstupel $\langle t_b(e),s_b(e),h\rangle$ bezüglich M einen Wert aus {1,0} zuordnet, *falls* für beliebige h, h' aus mit h $A^N_{e,b}$ h' gilt, dass $V(\alpha,\langle t_b(e),s_b(e),h\rangle) = V(\alpha,\langle t_b(e),s_b(e),h'\rangle)$, wobei gilt:
$S(\alpha, \langle t_b(e),s_b(e),h\rangle)=1$ gdw für jedes h' mit h A^N h' gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e),s_b(e),h'\rangle)=1$.
$S(\alpha, \langle t_b(e),s_b(e),h\rangle)=0$ gdw für jedes h' mit h A^N h' gilt: $V(\alpha,\langle t_b(e),s_b(e),h'\rangle)=0$.

(b) Def. S^Δ lautet wie Def. S, außer dass statt „$A^N_{e,b}$" steht: „$A^{N\Delta}_e$".

B2

Überraschend ist der Wahrheitswert-Wechsel beim ehemaligen *contingens praeteritum*. Dieser ist aber, bei genauerer Betrachtung, allein der weit vorgerückten Position von e_2 geschuldet: Vor e_2 liegen auf $s_b(e_2)$ bereits events, an denen e_4 bereits in den Vergangenheitslichtkegel eingetreten ist. Nennt man dasjenige event auf $s_b(e_2)$, zu dem e_4 gerade in den Vergangenheitslichtkegel der C's eintritt, e_8, so lässt sich festhalten:

$V(\mathbf{P}_\Delta\mathbf{P}_\Delta S(p\wedge p),\langle t_b(e_8), s_b(e_8),h_1\rangle) = 0$



B3

Man erhält für „$S(q\wedge q)$" und „$S(q\wedge q) \rightarrow NS(q\wedge q)$" sowie für „$PS(p\wedge p)$" und „$PS(p\wedge p) \rightarrow NPS(p\wedge p)$" im „spacefight"-Szenario den S-Wert „wahr", und erst recht im Sinne von P für „$S(q\wedge q)$" und „$S(q\wedge q) \rightarrow NS(q\wedge q)$" sowie für „$PS\ (p\wedge p)$" und „$PS\ (p\wedge p) \rightarrow NPS\ (p\wedge p)$" den V-Wert „wahr". Man beachte, dass im Skopus der Operatoren nur eine aussagenlogische Verbindung eines Satzbuchstaben und einer Datumsangabe steht, die man wie einen Satzbuchstaben behandeln kann. Das entsprechende *Schema*, also $\ulcorner S(q\wedge\alpha) \rightarrow NS(q\wedge\alpha)\urcorner$, gilt nicht, z.B. nicht für α = „Fq".

B4

Man hat $S^\Delta(\sim PN_\Delta S(q\wedge q),\langle t_b(e_2), s_b(e_2),h_1\rangle) = 1$ (man darf durchaus aus dem Vorliegen des S^Δ-Werts 0 für α auf das Vorliegen des S^Δ-Werts 1 für $\ulcorner\sim\alpha\urcorner$ schließen; nur aus einer S^Δ-Wert*lücke* dürfte man diesen Schluss nicht ziehen). Demnach hat man auch $S^\Delta(H\sim N_\Delta S(q\wedge q),\langle t_b(e_2), s_b(e_2),h_1\rangle) = 1$.

B5

Man erhält plausiblerweise: $\mathsf{V}(\mathrm{M}{+}\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}`\wedge r`),\langle t_b(e_1), s_b(e_1),h_1\rangle)=1$, aber $\mathsf{V}(\mathrm{M}{+}\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}\wedge r),\langle t_b(e_1), s_b(e_1),h_1\rangle)= 0$ (ebenso als S^{Δ}-Werte):

(a) $\mathsf{V}(\mathrm{M}{+}\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}`\wedge r`),\langle t_b(e_1), s_b(e_1),h_1\rangle)=1$: Es ist mit h_1 selbst eine über $\{e \mid t_b(e) \leq_b t_b(e_1)\}$ h_1-zugängliche Alternative und mit b selbst ein Bezugssystem vorhanden, so dass man erhält: $\mathsf{V}(\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}`\wedge r`), \langle t_b(e_1), s_b(e_1),h_1\rangle)=1$. S^{Δ}-Wert: h_1 ist auch über $\Delta(e_1)$ h_1-zugänglich.

(b) $\mathsf{V}(\mathrm{M}{+}\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}`\wedge r`), \langle t_b(e_1), s_b(e_1),h_1\rangle)=0$: Es ist keine h_1-zugängliche Alternative vorhanden (weder über $\{e \mid t_b(e) \leq_b t_b(e_1)\}$ noch über $\Delta(e_1)$), so dass sich dafür ein Bezugssystem finden ließe, das e_1 mit e_6 als gleichortig koordiniert. Nur in diesem Fall könnte aber „$\mathsf{F}(\underset{\cdot}{r}`\wedge r`)$“ 1 werden.

Begründungen zu Teil IV, Kap. 4

B1

Man macht sich das analog zu B10 zu Kap. IV 2 klar.

B2

Egal wie weit man an e_7 gekommen ist, so ist es doch auch nachträglich *für b_2* nicht hinzubekommen, dass „p“ und „q“ *gleichzeitig* vorlagen. Für b_1 liegt dieser Fall dagegen mit $t_{b1}(e_1)$ vor.

Anhang 1: Überblick über die Diskussion des Problems der „wings“ von 1966 bis 1990

1. Die Initiatoren: Rietdijk und Putnam

Den Auftakt zur informalen Diskussion des „problem of the wings“ bildet der bereits in Kap. III 2 erwähnte Aufsatz Rietdijks „A rigorous proof of determinism derived from the special theory of relativity” (1966) zusammen mit Putnams „Time and Physical Geometry“ (1967). Beide Autoren plädieren dafür, dass SR und Indeterminismus inkompatibel sind und dass deshalb, da die SR wahr ist, der Determinismus wahr sein muss. Putnams Argument ist nicht ganz so simpel gestrickt wie das Argument Rietdijks, diesem aber im Prinzip recht ähnlich.

Rietdijk benutzt (vgl. Kap. III 2.3.2.3) als Prämisse die Transitivität der Gleichzeitigkeit, ohne überhaupt zu beachten, dass diese Bezugssystem-intern gilt, nicht aber in Absehung vom Bezugssystem (Es gilt *nicht*: Wenn e b-gleichzeitig mit e’ ist und e’ b’-gleichzeitig mit e“, dann ist e’ b-gleichzeitig mit e“). Putnam dagegen stellt sich als Aufgabe das Auffinden einer Relation R, in der zu einem beliebig gewählten Beobachter O an e („me-now“) genau die Tatsachen („things“) stehen, die für O an e als „real“ und damit determiniert zu gelten haben. R soll – sinngemäß – die folgende Bedingung („III“, „No Privileged Oberservers“)[1] erfüllen:

> Für beliebige Beobachter O, O’, Tatsachen x und events e gilt: Wenn es für O an e eine Tatsache ist, dass O’ an e real ist, und wenn x für O’ an e real ist, so ist x auch für O an e real, steht also (bezüglich e) in der Beziehung R zu O.

Auch dies ist, wie unschwer zu sehen ist, eine Art Transitivitäts-Forderung. Vorausgesetzt ist, dass es an e zwei unterschiedliche Beobachter mit verschiedenen Koordinatensystemen tatsächlich gibt.[2] Putnam zeigt zunächst[3] das Folgende: Angenommen, dass alles, was in der O-Zukunft an e liegt, noch nicht real ist, so kann R *nicht* definiert sein im Sinne von:

> Def. 1: x R (O,e) gdw es zu O ein O’ und ein e’ gibt, so dass e’ in der O’-Gegenwart oder O’-Vergangenheit an e liegt und x an e’ vorliegt.

Denn manches in der O’-Vergangenheit liegt ja in der O-Zukunft. R kann aber auch nach Putnam *nicht* definiert sein als:

> Def. 2: x R (O,e) gdw es ein e’ gibt, so dass e’ in der O-Gegenwart oder O-Vergangenheit an e liegt und x an e’ vorliegt.

---

[1] Vgl. S.241 (III).
[2] Vgl. S.240 (I, II).
[3] Vgl. S.242 f.

Denn das würde O für die Bestimmung dessen, was real ist, unfairerweise privilegieren.[4] Nun kann man die Annahme, dass alles, was in der O-Zukunft von e liegt, noch nicht real ist, natürlich auch aufgeben und Def.1 verwenden. Dann hat man die O-zukünftigen Ereignisse in den „wings“ von e bezüglich O an e für real erklärt. Streng genommen besagt dies noch nichts über den Zukunftslichtkegel von e, so dass Putnams Anwendung des Arguments auf das Seeschlacht-Problem zunächst nicht gerechtfertigt ist, wenn die Gelegenheit zur Seeschlacht im Zukunftslichtkegel angesiedelt ist.[5] Doch Putnams Beispiel des Beobachters Oscar, „whose whole world-line is outside of the light-cone of me-now“[6] macht deutlich, dass er auch an von O räumlich entfernte Beobachter denkt. Da deren „wings“ sich mit dem Zukunftslichtkegel von O an e überschneiden können, ist der Zukunftslichtkegel von O an e mit ins Determinierte einbezogen.[7] Putnam stellt folgende Überlegungen zu den Wahrheitswerten von Aussagen im Raumartigen an:

1. Putnam bemerkt, dass Aussagen über die (Bezugssystem-relative) Zukunft im Sinne der traditionellen Interpretation von Aristoteles’ De int. 9 keinen Wahrheitswert haben.[8] Er argumentiert, dass dann eine Aussage über einen „space-fight“ im zur O-Zukunft, aber zur O’-Vergangenheit gehörenden Teil des Raumartigen von e nach Ansicht von O’ einen Wahrheitswert an e hat, nach Ansicht von O aber keinen. Da beide Ansichten gleichberechtigt sind, ist das ein Widerspruch. Also ist festzuhalten: „Aristotle was wrong“.[9]
2. Putnam sieht, dass eine Relativierung der Wahrheitswerte auf Bezugssysteme ein denkbarer Weg ist, um dieses Argument zu blockieren. Doch er lehnt eine solche Relativierung (in einer nicht sonderlich klaren Fußnote) ab.[10] Er argumentiert dabei mit verschachtelten Aussagen über Wahrheitswerte („it is true-for-me that the statement in question is true-for-you...“). Hier ist meiner Ansicht nach ohne eine reglementierte formale Semantik, wie sie in Teil IV ausgearbeitet wurde, keine Klarheit zu gewinnen. Mit ihr erfolgt die Zuweisung von Wahrheitswerten Bezugssystem-relativ, es ist aber durch die Bezugssystem-Operatoren eine Perspektive auch auf andere Bezugssysteme in kontrollierter Weise möglich.

---

[4] Vgl. S.242: „but simultaneity-in-*my*-coordinate-system is not admissable as a choice of R, because it depends on the coordinate system”.

[5] In *diesem* Punkt ist Rietdijks Argument sauberer ausgearbeitet. Schon Harris bemerkt ganz richtig (“Simultaneity and the Future”, S.256): „...even if Professor Putnam’s argument were admissable, it would not affect the ‚reality’ or determinability of events in the upper portion of the light cone – the absolute future – of any observer...”.

[6] Putnam, S.246.

[7] Das Prinzip „No Privileged Observers“ müsste also streng genommen ausgeweitet werden zu: Für beliebige Beobachter O, O’, Tatsachen x und events e, e’ gilt: Wenn es für O an e eine Tatsache ist, dass O’ an e’ real ist, und wenn x für O’ an e’ real ist, so ist x auch für O an e real, steht also (bezüglich e) in der Beziehung R zu O. Die Nähe von Putnam zu Rietdijk wird in dieser Formulierung recht deutlich.

[8] Diese wurde nach Erscheinen von Putnams Papier von Thomason formalisiert, vgl. Kap. II 1.

[9] Putnam, S.244.

[10] Putnam, S.246f, Fußnote 1.

3. Putnam sieht die Möglichkeit, Aussagen über die „wings“ eines events e überhaupt keinen Wahrheitswert zuzuweisen. Das entspricht einem Ausschluss der „wings“ aus dem Determinierten. Putnam bringt dagegen zwei Punkte vor:
   (a) Das würde e für die Bestimmung dessen, was (nicht) real ist, unfairerweise privilegieren: „Why should a statement's having or not having a truth value depend upon the relation of the events referred to in the statement to just one special human being, *me*?“.[11] Das, so Putnam, ist absurd.

   (b) Wenn die Nachricht von Oscars Tod[12] im Raumartigen zu e den Beobachter O an e erreicht, so muss er zugeben, dass die Aussage „Oscar existed“ nunmehr wahr ist, obwohl die Aussage „Oscar exists now“ nie wahr war: „Things could come to have been, without its ever having been true that they are!“.[13] Das, so Putnam, ist absurd.

Deshalb ist nach Putnams Meinung der Weg, Aussagen über die „wings“ als wahrheitswertlos zu konzipieren, nicht gangbar. Beide Beobachtungen sind wertvoll. In Kap. IV 3 und IV 4 wurde jedoch ausgeführt, dass (b) nicht wirklich absurd, sondern vielmehr als Folge der SR zu akzeptieren ist. Auch der Herausforderung durch Beobachtung (a) wurde begegnet.

2. Die Debatte bis 1976: Stein, Lango, Fitzgerald, Harris, Weingard, Landsberg, nochmals Rietdijk

Die Reaktion auf Rietdijk und Putnam ist – begonnen mit einem ersten Aufsatz Howard Steins zum Thema („On Einstein-Minkowski Space-Time“ (1968)) – überwiegend kritisch. John W. Lango und Paul Fitzgerald plädieren in Artikeln aus dem Jahr 1969[14] für eine Art Kompromiss, indem sie den Vergangenheitslichtkegel für „directly real“[15] bzw. „first-grade reality“,[16] das Raumartige dagegen für „indirectly real“[17] bzw. „second-grade reality“[18] erklären, jedoch ohne diese Etiketten besonders überzeugend zu motivieren.[19]

---

[11] Putnam, S.246.
[12] Dass das Beispiel am genauesten so zu formulieren ist, bemerkt wiederum Harris, a.a.O. S.256.
[13] Putnam, S.246.
[14] Lango, “The Logic of Simultaneity” (1969); Fitzgerald, “The Truth about Tomorrow's Sea Fight” (1969).
[15] Lango, a.a.O., S.349.
[16] Fitzgerald, a.a.O., S.327.
[17] Lango, a.a.O. S.349.
[18] Fitzgerald, a.a.O. S.327.
[19] Stein merkt an („A Note...“ (1970), S.294): „I certainly have no objection to Lango's attribution of ‘indirect reality’ to causally alien events [nor to similar proposals made ... by Paul Fitzgerald] ... What one says ‘is real’ surely depends ... upon what one means by ‘real’”. Das ist nicht zu bestreiten, und darum geht es philosophisch eigentlich. Leider macht Stein hierzu selbst keinen Vorschlag.

Fitzgeralds Artikel ist offenbar eine - im Ergebnis leider etwas unentschlossene - Studie, die er, in den frühen 60er Jahren unabhängig von Rietdijk und Putnam begonnen,[20] nun in die Debatte einspeist. Fitzgerald verbindet Seeschlacht-Problem und Problem des Raumartigen deutlich und hat das Verdienst, Wahrheitswerte von konkreten Aussagen in der gebotenen Ausführlichkeit zu diskutieren (seine Gegenstücke zu Al und Bert bzw. $Oscar_1$ und $Oscar_2$ heißen übrigens Max und Moritz). Wie allerdings datierte „statements“ und „meta-statements“ im Rahmen einer dreiwertigen Logik bewertet werden sollen („solution I“), kann einen das Fürchten lehren. Vor einer Relativierung auf Bezugssysteme („solution II“) schreckt Fitzgerald letztlich zurück („c-systems bear far too heavy a metaphysical burden“),[21] ebenso vor wahren Vergangenheits-Aussagen ohne wahre präsentische Gegenstücke.[22] „Solution III“ besteht – wenig konsequent – in einem Einschluss der „wings“[23] bei gleichzeitiger Zuweisung des Wahrheitswerts „unbestimmt“ für Aussagen darüber.[24] „Solution IV“ entspricht dem Ausschluss der „wings“, „solution V“ ist der Kompromissvorschlag mit Graden der Realität. Es ist freilich nicht immer einfach zu sehen, welche Lösung Fitzgerald nur austestet und welche er selbst befürwortet. Er scheint „solution V“ jedenfalls für die beste zu halten, die „Non-Full-Theorists“, also Gegnern einer komplett determinierten und bereits zeitlos „angefüllten“ Raumzeit, zur Verfügung steht. Sie führt seiner Ansicht nach zu einer fünfwertigen Logik – einen Vorschlag, den er offenbar selbst nicht wirklich ernst nehmen kann.[25]

Details von Langos Vorgehen werden (zu Recht) von Stein kritisiert („A Note on Time and Relativity“ (1970)). Während Stein sehr klar macht, was er ablehnt, ist weniger klar, was er befürwortet. Von anderen Autoren wird er oft als Befürworter des Einschlusses des Vergangenheitslichtkegels und Ausschlusses der „wings“ aus dem Determinierten angesehen;[26] doch in seiner Replik auf Lango lehnt er diese Zuschreibung ab, da er die Frage nach der Determiniertheit des Raumartigen insgesamt als unsinnig abweist.[27] Auch wenn die Option des Ausschlusses der „wings“ als Missverständnis von Steins Position in die Debatte gekommen ist, ist sie damit als theoretisch mögliche Lösung in der Diskussion.

In gewisser Form vertreten wird der Ausschluss der „wings“ in dem ebenfalls zur ersten Runde der kritischen Reaktionen auf Rietdijk und Putnam gehörenden, wenig beachteten Dreiseiter „Simultaneity and the Future“ (1969) von Errol Harris:[28]

[20] Vgl. Fitzgerald, a.a.O., Fußnote 1, S.207.
[21] A.a.O. S.319.
[22] Vgl. a.a.O. S.320.
[23] Vgl. a.a.O. S.324.
[24] Vgl. a.a.O. S.322.
[25] Fitzgeralds Artikel schließt (!) mit der Bemerkung (S.329): “...a five valued truth-functional logic has 25^5 distinct binary operators. Think of the pleasant hours we can spend trying to figure out which operator should be used to render an English statement of the form ‘Either p or q’!”
[26] Vgl. z.B. Lango, a.a.O. S.349, und sogar noch Maxwell, “Discussion: On Relativity Theory and Openness of the Future” (1993), S.344.
[27] Vgl. Stein, “A note...” (1970), S.294: „I want to correct an erroneous impression of my views on the ‚reality‘ of past, present, and future. Lango says... that, according to me, only the [causal] past is real. In fact, I do not regard the issue as at all clearly posed, and I therefore have no such opinion.”
[28] Harris, a.a.O. S.256.

> „Special relativity, so far from decreasing the indeterminacy of the future extends it likeweise to the distant".

Doch Harris trennt nicht scharf zwischen ontischer und epistemischer (In)determiniertheit, und so formuliert er auch den wichtigen Vorschlag, dass das Determinierte in der SR im Sinne des Vergangenheitslichtkegels *positionsabhängig* verstanden werden sollte, leider unglücklich mit verifikationistischen Elementen („determina*bility*"!) vermengt:

> „The ‚reality' or determinability of events depends not only on their futurity, presentness or pastness, but also on their relative position in space".[29]

Harris schlägt vor, Putnams Problem durch eine – von Putnam abgelehnte – Relativierung auf Bezugssysteme zu lösen.[30]

Robert Weingard versucht 1972 wenig erfolgreich, Putnams These durch Verzicht auf den Bezug auf Koordinatensysteme zu stützen.[31] Weingard versucht zunächst, *direkt* zu motivieren, weshalb die gesamten „wings" zu e an e als real einzustufen sind, indem er sie als Analogon zur Gegenwart der klassischen Raumzeit erklärt:

> „in terms of actual physical or experimental facts, it is the class of events that can be considered simultaneous to an event [e] that plays the role in special relativity that the class of events simultaneous to [e] plays in Newtonian space-time. In each they are the class of events that are not causally connectable with [e]."[32]

In einem zweiten Schritt bezieht er dann auch den Zukunftslichtkegel von e mit der Begründung ein, die events in ihm seien ja von anderen events (im Raumartigen zu e) aus real. Schon der erste Schritt ist zweifelhaft: Wenn man nicht zusätzlich eine endliche maximale Geschwindigkeit der kausalen Einflussnahme annimmt, so können events derselben klassisch konzipierten Gegenwart durchaus „causally connectable" sein. Nimmt man eine solche Geschwindigkeit an, so gibt es ausgedehnte „wings" im Sinne der kausalen Nichtverbundenheit schon in der klassischen Raumzeit (vgl. Kap. II 3), ohne dass dies an der Realität eines Teils davon und der Nichtrealität eines

---

29 Harris, "Simultaneity and the Future" (1969), S.256. Vgl. ebd. zum verifikationistischen bzw. rein epistemischen Verständnis von Determiniertheit ferner: "cannot be specified", "it would not be possible for O_1 to say", "unknowable", "It is ... known to Oscar". Darum geht es nicht.

30 Harris, a.a.O. S.256: "It is, of course, known to Oscar [...] that he exists. When they [O and O'] discover it, [O'] will date Oscar's existence differently from [O], so the statement 'Oscar exists at time t' will have different truth values for [O] and [O']...". Die skizzenhafte Bemerkung ist im Detail jedoch nicht gerade hilfreich: Harris verwendet als Beispielsatz eine datierte Aussage. Die ist – wegen der Datierung – im *atemporalen* Präsens gehalten (der Satz mit „exists" wird auch an anderen Zeiten als t wahr, selbst wenn Oscar nur zu t existiert). Der interessante Fall ist aber, wie Putnam richtig erkennt, die Vergangenheitsform. Außerdem wird die Datierung selbst („at time t") nicht problematisiert, was im Zusammenhang mit der SR unabdingbar ist. Auch hier hoffe ich, dass die Art, wie temporale Aussagen konsequent aufs Bezugssystem relativiert werden können, wie sie in Kap. IV 3 ausgeführt wurde, mehr Klarheit schafft.

31 Weingard, "Relativity and the Reality of Past and Future Events" (1972).

32 A.a.O., S.120.

anderen Teils davon hat zweifeln lassen. Man bedenke, dass die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit seit 1675 bekannt ist.

Bereits 1970 hatte P.T. Landsberg sich insgesamt kritisch zu Putnam und Rietdijk geäußert und versucht, das Raumartige (freilich mit magerer Motivation) insgesamt zur „indeterminate region“ zu erklären.[33]

In einer Replik auf Landsberg bekräftigt Rietdijk seine Position 1976 nochmals.[34] Diese Replik ist m.E. argumentativ stärker als das immer wieder zitierte Papier von 1966, das die Debatte ausgelöst hat. Denn sie enthält zwar kein neues positives Argument für den Determinismus, dafür aber einige herausfordernde Beobachtungen:

- Rietdijk besteht darauf, dass Determiniertheit nicht Bezugssystem-relativ sein kann.[35]
- Er kommt zu demselben Ergebnis wie Putnam, dass der Ausschluss der „wings“ ein Privilegierungs-Problem mit sich bringt:

> „[W]ould nature, for its supposed important boundary between what is determined and what is not, conform to my insignificant person, not reckoning with anyone else? That is not very probable.”[36]

- Rietdijk weist darauf hin, dass sich die Vergangenheitslichtkegel von im Raumartigen benachbarten events sehr weitgehend überschneiden und deshalb der Gedanke an ein raumweites Jetzt besonders naheliegt. Beobachter entlang einer „Vorderkante“ könnten sich an den Händen fassen und sich sagen:

> „We all know that the now-experiences of all the others besides us, on the x-axis of our common inertial system, are as legitimate and real as is our own, and that the past halves of all our light cones consist only of completely determined events. So we all know that far more events must be determined than those within the past half of my personal light cone.”[37]

Das Argument zielt nur darauf ab, den Ausschluss der *gesamten* „wings“ zu deplausibilisieren, und ist unabhängig von Rietdijks ursprünglichem Argument. Da die freie Wahl des Koordinatensystems die Konstruktion *beliebiger* Händchenhalte-Ketten durchs Raumartige erlaubt, würde das Argument letztlich zum *Einschluss* der gesamten „wings“ ins Determinierte führen.[38] Ob die Intuitionen auch bei

[33] Landsberg, „Time in Statistical Physics and Special Relativity”(1970), S.81. In dem langen Artikel sind für das Problem nur die kurzen Bemerkungen in Abschnitt 13, S.80f und der argumentativ nicht ertragreiche Appendix G, S.97f einschlägig. Landsberg motiviert die Indeterminiertheit des Raumartigen damit, dass dieses „not past, present or future“ (S.81) sei. Das stimmt freilich nicht Bezugsystem-relativ bei gewähltem Bezugssystem, und es ist ja gerade die Frage, was die temporale Einordnung in puncto Determiniertheit bedeutet. Der Hinweis ist also philosophisch gesehen question-begging.

[34] Rietdijk, “Special Relativity and Determinism” (1976).

[35] A.a.O. S.602.

[36] A.a.O. S.605f.

[37] A.a.O. S.606.

[38] Das kann Rietdijk, der überhaupt die ganze Raumzeit als determiniert nachweisen möchte, natürlich nur recht sein.

imaginären Menschenketten von einem halben Lichtjahr Länge noch so klar sind, wie Rietdijk suggeriert, darf man wohl bezweifeln. Dennoch fängt die in ihrer Direktheit lächerliche Illustration eine Intuition ein, die es, wenn möglich, zu berücksichtigen gilt. Ein Versuch dazu wird in Kap. IV 4 im Zusammenhang mit dem Konzept der „narrativen Determiniertheit“ unternommen.

- Schließlich formuliert Rietdijk das Argument, wenn man von einem Ereignis erfahre, so erfahre man doch, dass es stattgefunden *habe*.[39]

3. Die Debatte ab 1985: Maxwell und seine Kritiker (Dieks, nochmals Stein)

1985 erhält die Debatte einen neuen Impuls durch Nicholas Maxwell,[40] der den Indeterminismus und die SR wie Rietdijk und Putnam für unvereinbar erklärt. Allerdings befürwortet er, anders als die beiden Initiatoren der Debatte, den Indeterminismus (in der Form eines von ihm befürworteten „probabilism“ als Deutung der Quantentheorie) und lehnt deshalb die SR in ihrer gegenwärtigen Form ab.[41] Maxwells Argument ist sehr einfach: Unter „probabilism“ versteht er „the thesis that the universe is such that, at any instant, there is only one past, but many alternative possible futures“. Dies setze eine “physically real difference between past and future” voraus:

> “[P]robabilism requires that, at any instant, there be a universal, absolute, unambiguous distinction between past and future – to divide off the one past from the many alternative possible futures.”[42]

Maxwell macht klar, *wovon* die Unterscheidung zwischen Zukunft und Vergangenheit absolut sein soll: vom Bezugssystem. Gerade darin, dass eine solche Unterscheidung laut SR nicht mehr möglich ist, soll nämlich nach Maxwells Ansicht die Inkompatibilität von SR und „probabilism“ bestehen.

Maxwell motiviert nicht, *wieso* der Indeterminismus eine solche Unterscheidung verlangt; es kann gut sein, dass er dem Indeterminismus mit dieser Behauptung bei manchen, die vernünftigerweise die Relativitätstheorie befürworten, einen Bärendienst erwiesen hat. In der Tat muss man etwas tun, um einen Indeterminismus im Rahmen

---

[39] A.a.O. S.607f. Wenig überzeugend ist dagegen m.E. Rietdijks Argument gegen irregulär geformte Gegenwartsscheiben (S.604f), wie sie als Rakićs Vorschlag bereits in Kap. III 2 diskutiert wurden. Die metrischen Überlegungen wirken naiv und sind spätestens dann wirkungslos, wenn man, wie Rakić, A- und B-Ordnung voneinander unabhängig macht.

[40] Maxwell, “Are Probabilism and Special Relativity Compatible?” (1985).

[41] Vgl. Maxwell, „Discussion: Are probabilism and special relativity compatible“ (1988), S.641: “Wheras my aim is to establish that, granted SR, probabilism must be rejected, Rietdijk’s aim is to establish that, granted probabilism, SR must be rejected”.

[42] Maxwell, a.a.O. S.23. Ob er mit “instant” einen Momentanraum oder ein event meint, ist unklar, aber in diesem Fall m.E. auch egal. Dieks sieht hier bereits eine unzulässige Vorentscheidung zugunsten eines klassisch verstandenen Momentanraums. Vgl. Dieks, a.a.O. S.456-458.

der SR auszuarbeiten. Das ist ein Ziel des vorliegenden Buchs. Aber dafür, dass dies unmöglich ist, bietet Maxwell nicht das geringste Argument.

Interessanter als Maxwells Hauptthese ist seine Zurückweisung von vier denkbaren Einwänden im Sinne von Vorschlägen, wie sich SR und Indeterminismus *doch* vereinbaren lassen.[43] Denn diese könnte, wie Maxwell selbst bemerkt, ein *indirektes* Argument für seine These liefern – *falls* die behandelten Fälle die Möglichkeiten ausschöpfen und alle Gegenargumente überzeugend sind.[44]

- 1. Vorschlag: Relativierung der (In)determiniertheit auf Bezugssysteme.[45] Maxwell vertritt die Auffassung, dass die Determiniertheit eines entfernten Ereignisses keine Positions- und Bezugssystem-abhängige Eigenschaft sein kann. Er motiviert das damit, dass für ein als vergangen koordiniertes Ereignis keine Alternativen mehr offen stehen dürfen („devoid of real alternative possibilities“).[46] Zunächst dürfte man Maxwell hier intuitiv Recht geben. In Kap. IV 3 und 4 ließ sich zeigen, dass man letztendlich ein differenzierteres Bild befürworten sollte.
- 2. Vorschlag: Die Frage „Sind die ‚wings‘ determiniert?“ ist sinnlos, weil die Antwort nicht verifizierbar ist. Maxwell bemerkt zu Recht, dass es nicht um Verifikation geht.[47]
- 3. Vorschlag: Einschluss der „wings“. Maxwell argumentiert: Hieraus folgt, da der eigene Standpunkt selbst wieder in den „wings“ von events im Raumartigen dazu liegt, die Determiniertheit auch der eigenen kausalen Zukunft – in völligem Widerspruch zum Indeterminismus.[48] Dieses Argument setzt freilich voraus, dass Determiniertheit nicht positionsabhängig konzipiert wird.
- 4. Vorschlag: Ausschluss der „wings“. Maxwell ist der Meinung, „... this suggestion faces the fatal objection that it postulates not just future alternative *possibilities*, but present alternative *actualities*“.[49] Sein Argument dafür ist, mit zwei raumartig zueinander liegenden events, E_1 und E_2, formuliert:

> „If E_2 consists of many alternative possibilities from the standpoint of E_1, then similarly E_1 itself consists of many alternative possibilities from the standpoint of E_2 and thus from the standpoint of E_1 itself...“.[50]

Die Fortsetzung “...and thus from the standpoint of E_1 itself“ ist freilich nur gerechtfertigt, wenn zweierlei ausgeschlossen wird:
(a) eine Privilegierung von E_1, wie sie schon Putnam als absurd aufweist;
(b) eine Relativierung des Determinierten auf die Position.

---

[43] Maxwell a.a.O., Abschnitt 3 (S.25-28). Die restlichen Abschnitte seines Aufsatzes (S.28-41) sind m.E. für den hier wesentlichen Punkt nicht mehr von Belang.
[44] Der Abschnitt schließt (S.28) mit dem Fazit: „all suggestions as to how ontological probabilism and realistic special relativity are to be combined fail“.
[45] Maxwell, a.a.O. S.26.
[46] A.a.O. S.27.
[47] Ebd.
[48] Ebd.
[49] Ebd.
[50] A.a.O. S.27f.

Es könnte ja sein, dass es nichts ausmacht, wenn von E_2 aus mehrere Alternativen für E_1 offen stehen, solange nur an E_1 feststeht, was an E_1 der Fall ist. In der Tat wurde in Kap. IV 3 dafür plädiert, dass dies so ist und dass deshalb die von Putnam befürchtete willkürliche Privilegierung des eigenen Standpunkts beim Ausschluss der „wings“ aus dem Determinierten vermieden werden kann. Dabei ist freilich zu motivieren, warum es nicht weiter schlimm ist, wenn der eigene Zustand anderswo als *in*determiniert gelten muss, während es ein Problem wäre, wenn die eigene kausale Zukunft anderswo als determiniert gelten müsste.

Eine Kritik von Dieks an Maxwell erscheint 1988,[51] unmittelbar gefolgt von Maxwells Replik.[52] Dieks geht in seinem Vorschlag zur Kombination von SR und Indeterminismus von einem natürlichen „time-flow“ entlang jeder Weltlinie aus[53] und fragt sich, wie die „now-points“ auf verschiedenen Weltlinien zu koordinieren sind. Dies ist im Prinzip die richtige Frage, aber Dieks’ Antwort fällt unbefriedigend aus. Der einzige *constraint*, den er voraussetzt, ist: Ein „now-point“ darf nicht im Vergangenheitslichtkegel eines anderen „now-point“ liegen, wenn diese zu einem (raumweiten) Jetzt im „time-flow“ koordiniert werden sollen. Das ermöglicht freilich die Koordination zweier *beliebiger* raumartig zueinander liegender „now-points“. Jede der möglichen Koordinationen („space-time diagrams“ mit koordinierten Jetzten) soll berücksichtigt werden. Die Lösung soll darin liegen, dass in manchen dieser Diagramme von E_1 aus E_2 „definite“ ist und in anderen nicht, E_2 von E_1 aus „definite *or* indefinite“ ist. Das ist alles wohl nicht ganz falsch, aber zu unklar, um gutgeheißen zu werden.

Maxwells Replik beschäftigt sich denn auch gleich mit drei Lesarten von Dieks’ Vorschlag: (1) Dieks meint eigentlich (wie Maxwell), dass es nur *eine* realistische Möglichkeit der Koordination gibt;[54] (2) Dieks plädiert für den Ausschluss der „wings“, wogegen Maxwell sein Argument wiederholt;[55] (3) Dieks plädiert für jedes „space-time diagram“ als gleichberechtigte Perspektive. Letzteres hält Maxwell für eine exzentrische Interpretation der SR.[56] In Kap. IV 3 wurde dagegen dafür plädiert, dass beileibe nicht jede positionale Relativierung eine exzentrische Interpretation der SR ist, sondern dass sich in dem Moment, in dem man Alternativen berücksichtigt, die (von Maxwell und auch Rakić vertretene) Auffassung, Minkowski-Diagramme seien *aperspektivisch*, als unhaltbare Illusion herausstellt. Ferner wurde dafür plädiert, dass der Versuch, das für die SR klassische Tunnelbeispiel[57] im Sinne indeterministischer

---

[51] Dieks, “Special Relativity and the Flow of Time” (1988).
[52] Maxwell, “Discussion – Are Probabilism and Special Relativity Compatible?” (1988).
[53] Dieks, a.a.O. S.459.
[54] Dies scheint Wunschdenken von Maxwell zu sein, da Dieks seine Bedingungen bewusst schwach hält.
[55] Auch diese Position ist freilich bei Dieks kaum herauszulesen.
[56] Maxwell, “Discussion: Are Probabilism”, S.643: “In lacking one definite overall space-time structure common to all events ... SR in the Dieks’ universe is very different from SR as ordinarily understood. SR in the Dieks’ universe is somewhat reminiscent of Leibniz’ monadology: it might be called ‘monadological SR’”.
[57] Vgl. Kap. III 1.

Entscheidungen zu beschreiben, etwas ähnliches wie Dieks' Koordination von „now-points" nahelegt.

1991 reagiert Stein auf das Wiederaufleben der Debatte („On Relativity Theory and the Openness of the Future") und greift sowohl Maxwell als auch Dieks an. Stein betont die Relation „..liegt im Vergangenheitslichtkegel von..."[58] und bestreitet die Möglichkeit eines „distant present" in extremen Formulierungen, die den Eindruck entstehen lassen, die SR sei überhaupt keine Theorie über Koordinatensysteme, sondern *nur* eine Theorie über Lichtkegel.[59]

Der ausführliche Artikel von 1991 ist selbst für den auch sonst wenig zimperlichen Stein in ungewöhnlich scharfem Ton gehalten. Seine rhetorische Frage, wieso eigentlich überhaupt noch Gutachter von Fachzeitschriften Artikel zum Thema annehmen,[60] beantwortet er implizit mit langen allgemeinen Ausführungen: Die Gutachter brauchen eben seiner Ansicht nach ein wenig Nachhilfeunterricht in den Grundlagen der SR. Es kommt ihm nicht in den Sinn, dass die Gutachter eine weniger eingeschränkte Auffassung von der SR haben als er und deshalb ein interessantes Problem diskutiert sehen möchten. Dass eine „experience" einer raumweiten Gegenwart nicht möglich ist, ist geschenkt. Dass es aber eine „illegitimate metaphysical interpretation" der SR ist, zu sagen „an observer's state of motion imposes upon him a special view of the world's structure",[61] scheint mir übertrieben. Ob man das Wort „present" aufs Hier-und-Jetzt beschränkt und ansonsten den Ausdruck „contemporaneous" benutzt,[62] ist eine unwesentliche Frage der Terminologie (freilich ist es eine treffende Bemerkung Steins, wenn ein Soldat mit dem Wort „Present!" antrete, meine er nicht bloß, dass er noch am Leben, sondern auch, dass er „on the spot" sei). Steins phänomenologischer Klärung der Raumerfahrung ist zuzustimmen. Dass sie mit Teil III der vorliegenden Studie kompatibel ist, zeigt aber auch, dass sie gegen die Konzeption eines „distant present" nichts austrägt.

Ganz richtig weist Stein dagegen auf den Schwachpunkt in Maxwells Argument gegen den Ausschluss der „wings" hin, erklärt dieses Detail der Debatte aber auch zugleich zum entscheidenden Punkt:

> „... by what principle does one infer, from the indefiniteness with respect to one another of two events, that each must be indefinite from its own standpoint? [...] I see no compelling grounds for such an assumption; and against it, I see what seems to me a most compelling reason: that it renders the notion of becoming incompatible with the special theory of relativity."[63]

---

[58] Vgl. Stein, „On Relativity Theory and the Openness of the Future" (1991), S.148f.
[59] Vgl. a.a.O. S.152.
[60] Ebd.
[61] A.a.O., S.155.
[62] A.a.O., S.159.
[63] Stein, a.a.O. S.151.

Clifton und Hogarth liefern eine etwas erweiterte, rein technische Ausarbeitung von Steins Ansatz.[64] 1993 erscheint Maxwells unbeeindruckte Antwort.[65] Eine Verhärtung der Fronten ist nicht zu leugnen. Maxwell betont seine Intuition, dass ontologische Definitheit nicht Standpunkt-relativ sein kann: Wie kann, von zwei im Raumartigen „parallel" zueinander fliegenden Freunden in zwei Raumschiffen, der Zustand des einen für den *jeweils* anderen *ontisch* indeterminiert sein?[66] Tatsächlich ist das ja auch zunächst kontraintuitiv und verdient eine überzeugende Motivation, die ich in den allgemein gehaltenen Ausführungen Steins nicht finde.

4. McCalls „Universe Trees"

Storrs McCall vertritt – auch als Antwort auf Putnams und Rietdijks Vorschlag[67] – seit 1976 die Ansicht, die Grenze des Determinierten vom Indeterminierten sei aufs Bezugssystem zu relativieren und als bezugssystem-relative raumweite Vorderkante zu konzipieren (vgl. bereits „Objective Time Flow" (1976) und „A Model of the Universe" (1994)).[68] „Objective Time Flow" ist der früheste mir bekannte Beitrag, in dem modale Verzweigungen in der Raumzeit modelliert werden. Er enthält zudem eine direkte kritische Reaktion auf Putnam und Rietdijk.[69]

Da jede Verzweigung ein komplettes „picture of the universe at a time" darstellen soll, muss, so McCall, ein Koordinatensystem vorausgesetzt werden.[70] Den Einwand im Sinne Putnams, dann sei ja manches für den einen Beobachter schon geschehen und „real", was für den anderen noch in der Zukunft liege und unverwirklicht sei, handelt McCall in einem Atemzug mit der Feststellung Fitzgeralds ab,[71] es gebe dann ja keine „single tide of absolute becoming mehr":

> „[I]t is far from clear that a 'single tide' of becoming or time flow is something any philosopher could reasonably want. [...] suppose that the 'happening' of each event were represented by the switching on of a tiny light on the Minkowski diagram. Plainly, no random or incoherent pattern could represent time flow. The only acceptable representation would be an orderly progression of 'happenings' up the Minkowski diagram: a regimented march of becoming. But in order for such a march to be regimented, which requires that events be placed in simultaneity classes, a frame of reference is needed. No frame-invariant process of becoming could possibly represent time flow."[72]

[64] Clifton / Hogarth, "The Definability of Objective Becoming in Minkowski Spacetime" (1995).
[65] Maxwell, "Discussion: On Relativity and Openness of the Future" (1993).
[66] A.a.O., S.344f.
[67] Vgl. McCall, „Objective Time-Flow" (1976), S.351f.
[68] "Choice Trees" (1990) enthält keine Äußerungen zur spatialen Dimension.
[69] McCall, „Objective Time Flow" (1976), S.344f, S.351f.
[70] McCall, a.a.O. S.344f, entsprechend "A Model of the Universe", S.10f.
[71] Fitzgerald, a.a.O. S.319.
[72] McCall, "Objective Time Flow", S.345.

McCall beschreibt die wichtige Einsicht, dass die Ordnung von events in einer Front[73] eine Sache des Koordinatensystems ist, hier bewundernswert anschaulich. Dennoch ist das noch keine Antwort auf das Problem der Determiniertheit im Sinne Rietdijks und Putnams. Und auch bezüglich des Themas „time flow“ ist das beschriebene Bild nicht ganz befriedigend:

- McCall gibt damit keinen Grund für seine Behauptung an, für Verzweigungen von Alternativen könne die Unterteilung in Lichtkegel und Raumartiges nicht angemessen („appropriate“) sein.[74]
- Verzweigungen sind nicht mit einbezogen (welche Alternative stellt *das* genannte Minkowski-Diagramm dar?).
- Jemand, der an eine ontologisch bevorzugte Entwicklung einer absoluten „Vorderkante“ glaubt, wird das Bild nicht beeindrucken: Er wird darauf beharren, dass gerade die Entwicklung im Sinne des ausgezeichneten Bezugssystems ein Prozess ist, der „frame-invariant“ und für *den* Fluss der Zeit verantwortlich ist, ohne dass dafür irgendeine Bezugssystem-relative Koordination nötig ist; im Sinne der anderen Bezugssysteme konstruiere man hingegen nur Schein-Entwicklungen.

Was McCall also allenfalls erreicht, ist, zu zeigen, wie man eine raumweite zeitliche Entwicklung konzipieren kann, *falls* es keine ontologisch ausgezeichnete „Vorderkante“ gibt. Das ist wiederum kein kleiner Fortschritt. Denn damit zeigt er, dass – anders als von Stein behauptet – ein richtiges Verständnis der SR durchaus mit der Konzeption einer raumweiten Entwicklung kompatibel ist.[75] Wie Bezugssystem-relative Verzweigungen und Bezugssystem-relative Entwicklungen genau zusammenhängen und wie sie sich auf Verzweigungen an den Lichtkegel-Rändern zurückführen lassen, bleibt bei McCall unausgeführt. Dies ist in der vorliegenden Studie ein Schwerpunkt von Kap. IV 3 und IV 4.

Konkret weist McCall Putnams und Rietdijks Argument in „Objective Time Flow“ mit folgender Überlegung zurück:[76] In Bezugsysystem f_1 („frame 1“) steht 1976 (auf der Erde) nicht fest, ob es 2000 auf der Erde noch Öl gibt; wechselt man in das Bezugssystem f_2,[77] so erhält man einen f_2-Zeitpunkt f_2. Aber auch mit diesem System (mit „gekippter“ Ortskoordination) fängt man nicht den Zustand der Erde im Jahre 2000 als – feststehende – Gegenwart ein; schließlich enthält t* von f_2 das event, das man in f_1 als „die Erde im Jahre 1976“ ansprechen würde. Das Argument ist für einen Autoren vom Format McCalls überraschend schwach. Denn Putnam und Rietdijk haben nie behauptet, dass man events im *eigenen* Zukunftslichtkegel durch Wechsel des Koordinatensystems als gegenwärtig koordinieren kann. Wie McCall zuvor richtig referiert, machen sie sich Sorgen darüber, dass ein f_2-Beobachter *in der entfernten* Galaxie („crab nebula“) den Zustand der Erde „im Jahr 2000“ als gleichzeitig mit demjenigen Zustand der Galaxie koordinieren, den ein f_1-Benutzer als gleichzeitig mit

[73] Vgl. die „Phalanx-Bedingung“ in Kap. III 3.
[74] McCall, a.a.O. S.344.
[75] In der Ausführung gelingt ihm dies viel besser, weil präzisier, als Dieks a.a.O.
[76] McCall, a.a.O. S.351f.
[77] McCall schlägt vor „by accelerating briefly so that our motion parallels that of the crab nebula“. Das ist natürlich nur illustrativ zu verstehen. Denn wir können ohne jeden Aufwand einfach zu f_2 als Beschreibungsrahmen wechseln, indem wir die genannte Galaxie in Gedanken als ruhend *ansetzen*.

dem Zustand der Erde „im Jahr 1976“ koordiniert. Darauf geht aber McCalls Bemerkung überhaupt nicht ein und greift damit schlicht zu kurz.

In „A Model of the Universe“[78] bringt McCall als Argument gegen Putnam und Rietdijk Folgendes vor:

> “Relative to the spacelike hyperplane AB [‘our present’] the occurrence of the space-fight tomorrow is indefinite or indeterminate [...]. But relative to the hyperplane CD [f_2-Gegenwart in der entfernten Galaxie] the occurrence of the space-fight is not indefinite but ‘fixed’ [...] what is ‘actual’ depends on the choice of the hyperplane.”

Diesmal geht McCall also auf den Beobachter in der entfernten Galaxie ein. Aber es ist nicht zu sehen, wie die Relativierung der Determiniertheit aufs Bezugssystem, die ja intuitiv nicht gerade nahe liegt, motiviert sein soll. Man erhält nur eine These, nicht aber ein Argument. Und schon die Formulierung der These bietet Angriffsfläche: Was soll in einem indeterministischen Bild die Rede von *dem* Stattfinden *der* Seeschlacht? Und wie sind die Ausdrücke genau zu verstehen, die McCall in *shudder quotes* setzt? Solche Anführungsstriche sind Aufforderungen zur Präzisierung. In der endgültigen Formulierung einer These sind sie fehl am Platz, denn wenn man etwas behauptet, so sollte man zuvor klären, was.

So wäre die Rückfrage eines Anhängers der Position von Putnam oder Stein, was an einem „Time Flow“ im Sinne McCalls „objektiv“ sei, mehr als berechtigt. Darauf allerdings besteht McCall und kritisiert Stein dafür, dass er das Werden („becoming“) Beobachter-abhängig („observer-dependent“) mache.[79] In Kap. IV 4 wurde dagegen dafür plädiert, dass der Fluss der Zeit entlang einer Weltlinie Beobachter-unabhängig ist; dass raumweite Entwicklungsgeschichten in dem Sinne „objektiv“ sind, dass sie *gänzlich* Beobachter-unabhängig sind, soll dagegen nicht vertreten werden (die *Zutaten* der Geschichten sind Beobachter-unabhängig vorhanden, nicht aber die Erzählweise).[80]

---

[78] McCall, „A Model of the Universe“, S.33f.
[79] A.a.O. S.34, Fußnote 23.
[80] Die von McCall in „Objective Time Flow“ vorgeschlagene konkrete Semantik (vgl. Abschnitt 6, S.356-360) ist modelltheoretisch sehr unübersichtlich (das Modell ist ein Elfer-Tupel!) und arbeitet auf der Ebene der Sprache mit datierten und mit Positionsangaben versehenen Formeln. Modaloperatoren spielen keine Rolle. Für Aussagen mit Datierungen in der Zukunft des Bewertungskontexts schlägt er plausiblerweise eine Variante der Supervaluationstechnik im Sinne Thomasons vor (vgl. Kap. II 1). Die Modelldefinition in „A Model of the Universe“ (vgl. dort Appendix 2, S.295-297). ist deutlich übersichtlicher und stark an Belnaps Modelle aus “Branching Spacetime” angelehnt. Zusätzlich zu Belnaps Begriffen definiert McCall Bezugssystem-relevante Verzweigungskanten, die durch eine lineare Abfolge-Relation geordnet sind. Da er den Begriff der „spacelike hypersurface“ durch ein event (vgl. S.296) unanalysiert voraussetzt, findet sich jedoch keine explizite Entsprechung zur Phalanx-Bedingung in Kap. III 2.

Anhang 2: Tafel der Interaktionsgesetze der Form

$$\ulcorner \xi\, \chi\, \alpha \rightarrow \chi\, \xi\, \alpha \urcorner$$

χ \ ξ	F	P	G	H	S	E	M	N	◊	□	M_Δ	N_Δ	M_∇	N_∇	+	×
F	+	+	–	–	+	–	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–
P	+	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–
G	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	–
H	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	–	–	–
S	+	+	–	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–
E	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–
M	+	–	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–
N	–	+	–	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–
◊	+	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
□	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
M_Δ	+	–	–	–	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
N_Δ	–	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
M_∇	+	–	–	–	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
N_∇	–	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–
×	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+

Erläuterungen:
1. Bei der Betrachtung und Anwendung einer multidimensionalen Sprache kommt möglichen Vertausch- und Church/Rosser-Gesetzen besondere Bedeutung zu. Die reichste in dieser Studie untersuchte Sprache, 3N×Rel enthält acht primitive, Box-artige Modaloperatoren: G, H, E, N, □, N_Δ, N_∇, ×. auf deren Grundlage noch einmal acht Rauten-artige „~ ξ ~“-Operatoren definiert sind: F, P, S, M, ◊, M_Δ, M_∇, +. Die Tabelle stellt insgesamt die Verhältnisse für diese Sprache dar.

2. Rein rechnerisch sind bei sechzehn Operatoren 256 verschiedene mögliche Kombinations-Gesetze der Form $\ulcorner \xi\chi\alpha \rightarrow \chi\xi\alpha \urcorner$ möglich („ξ“ und „χ“ stehen hier für beliebige Modaloperatoren, „α“ steht für eine wff). Sie lassen sich in einer Tafel anordnen, aus der man eine Formel in der Reihenfolge „Spalte – Zeile“ abliest. Die Zelle, in der die zweite Spalte („P“) und die achte Zeile („N“) übereinkommen codiert z.B. das Schema $\ulcorner \mathsf{P}N\alpha \rightarrow N\mathsf{P}\alpha \urcorner$. Das „+“ zeigt an, dass dieses Schema 3N×Rel-allgemeingültig ist. Es ist das wichtigste Interaktionsgesetz der kombinierten Zeit- und Modallogik: das Historizitätsgesetz. Die Zelle, in der die erste Spalte („F“) und die achte Zeile („N“) übereinkommen codiert z.B. das Schema $\ulcorner \mathsf{F}N\alpha \rightarrow N\mathsf{F}\alpha \urcorner$. Das „–“ zeigt an, dass dieses Schema *nicht* 3N×Rel-allgemeingültig ist.

3. Von den kombinatorisch möglichen Schemata sind natürlich nicht alle gleich interessant:
a) Schemata der Form $\ulcorner \xi\ \xi\ \alpha \rightarrow \xi\ \xi\alpha \urcorner$ gelten trivialerweise. Die Diagonale durch die Tafel muss also eine „+“-Linie sein.
b) Schemata der Form $\ulcorner \xi_\Box\ \chi_\Diamond\ \alpha \rightarrow \chi_\Diamond\ \ \xi_\Box\,\alpha \urcorner$ gelten nie. Sie haben ja immer den Charakter eines Quantorendrehers, sowohl bei gleichartigen Operatoren (z.B. „S“ und „E“ als auch bei verschiedenartigen Operatoren (z.B. „F“ und „E“).
c) Ein Schema der Form hat immer $\ulcorner \xi_\Diamond\ \chi_\Box\ \alpha \rightarrow \chi_\Box\ \xi_\Diamond\,\alpha \urcorner$ dasselbe Ergebnis wie das entsprechende Schema für $\ulcorner \chi_\Diamond\ \xi_\Box\ \alpha \rightarrow \xi_\Box\ \chi_\Diamond\,\alpha \urcorner$. Und ein Schema der Form hat immer $\ulcorner \xi_\Diamond\ \chi_\Diamond\ \alpha \rightarrow\ \ \chi_\Diamond\ \xi_\Diamond\,\alpha \urcorner$ dasselbe Ergebnis wie das entsprechende Schema für $\ulcorner \chi_\Box\ \xi_\Box\ \alpha \rightarrow \xi_\Box\ \chi_\Box\,\alpha \urcorner$. Denn beide sind ja jeweils äquivalent.

4. Da 3N×Rel eine Reihe anderer Sprachen zusammenfasst, kann man die Tafel auch wie eine Anzahl von „Jahresringen“ um den links oben angeordneten „FPGH“-Block lesen:
a) Der „FPGH“-Block stellt die Verhältnisse für K_{lin} *mit* Randlosigkeit i.S. von Kap. I 3.2 dar (*nicht* aber für jede K_t-basierte Logik: die (chr)-Gesetze gelten nur für lineare Modelle, die (com)-Gesetze erst für lineare und randlose Modelle!).
b) Nimmt man die „SE“-Streifen (S5 als Raumlogik: Kap. I 1.3.3) dazu, so hat man eine Darstellung der Verhältnisse für K_{lin}×S5 aus Kap. I 2.3.3).
c) Nimmt man die „MN“-Streifen und die „□◊“-Streifen dazu (also S5 für alethische Modalitäten: Kap. I 1.3.1), so hat man eine Darstellung der Verhältnisse für die T×W eng verwandte *lingua franca* LF aus Kap. II 1.3.
d) Nimmt man sowohl „SE“-Streifen als auch „MN“-Streifen und die „□◊“-Streifen dazu, so hat man eine Darstellung der Verhältnisse für LF×S5 (Kap. II 3.2).
e) Nimmt man auch noch die „$M_\Delta N_\Delta$“- und „$M_\nabla N_\nabla$“-Streifen dazu, so hat man eine Darstellung der Verhältnisse für 3N aus Kap. II 3.3.2.
f) Nimmt man zum in b) erreichten Stand die „+×“-Streifen dazu, so erhält man eine Darstellung der Verhältnisse für Rel (Kap. III 2.3).
g) Nimmt man zum in d) erreichten Stand die „+×“-Streifen dazu, so erhält man eine Darstellung der Verhältnisse für LF×Rel (Kap. IV 2).

Bei den nicht selbstverständlichen Ergebnissen finden sich die Beweise bzw. Gegenbeispiele immer im Begründungsteil zum angegebenen Kapitel.

LITERATURVERZEICHNIS

I) Abkürzungen häufig zitierter oder erwähnter Texte (vollständige bibliographische Angaben unter II))

HC	=	Hughes, G.E., Cresswell, M.J.: A New Introduction to Modal Logic.
MDML	=	Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F., Zakharyaschev, M. (2003): Many-Dimensional Modal Logics, Theory and Applications.
ZuE	=	Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis.
BST	=	Belnap, N.: Branching space-time.
PPF	=	Prior, A.: Past, Present and Future.
IZL	=	Harada, K.: Indeterministische Zeitlogik

Philosophiehistorische Klassiker werden auf die übliche Art zitiert.

II) Bibliographische Angaben

Balbiani, P. et al. (Hrsg.): Advances in Modal Logic 4, London: King's College Publications 2003. Zugänglich unter http://www.aiml.net/volumes/volume4.

Belnap, N.: Branching space-time, in: Synthese 92 (1992), 385-434.

Belnap, N. / Perloff, M. / Xu, M.: Facing the Future, Oxford: Oxford University Press 2001.

Belnap, N. / Perloff, M.: Seeing to it That – A Canonical Form for Agentives, in: Theoria 54 (1988), 175-199.

Bochenski, J.M.: Formale Logik, Freiburg / München: Alber [4]1978.

Burgess, J.P.: Decidability for Branching Time, in: Studia Logica 39 (1980), 203-218.

Burgess, J.P.: The Unreal Future, in: Theoria 44 (1978), 157-179. Dt. Übersetzung von B. Kienzle als „Die unwirkliche Zukunft" in: Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis, Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 210-235.

Burgess, J.P.: Basic Tense Logic, in: Gabbay, D., Guenthner, F. (Hg.): Handbook of Philosophical Logic: Extensions of Classical Logic, Vol. II, Dordrecht: Reidel 1984, 89-133.

Broad, C.D.: Scientific Thought, London: Routledge 1923.

Čapek, M.: The Philosophical Impact of Contemporary Physics, Princeton: D. van Nostrand 1961.

Carnap, R.: Meaning and Necessity, Chicago / London: The University of Chicago Press 1947.

Cartwright, N.: Comments and Replies, in: Paul, M. (Hg.): Nancy Cartwright, Laws, Capacities and Science, Vortrag und Kolloquium in Münster 1998, Münsteraner Vorlesungen zur Philosophie Bd.2, Münster: Lit 1999, 88-109.

Cartwright, N.: Where Do Laws of Nature Come From? in: Dialectica 51 (1997), 65-78.

Castañeda, H.-N.: Indicators, in: ders.: Thinking and the Structure of the World – Hector-Neri Castañeda's epistemic ontology presented and criticized / Das Denken und die Struktur der Welt, hg. von K.Jacobi und H.Pape, Berlin: De Gruyter 1990.

Craig, W.L.: The Special Theory of Relativity and Theories of Divine Eternity, zugänglich unter: http://www.leaderu.com/offices/billcraig/docs/leftow.html

„Diamonds in Space“, Website der gleichnamigen von Yde Venema organisierten Tagung an der Universität Amsterdam am 10. Mai 1999: http://www.wins.uva.nl/~aiellom/diamonds99.html.

Di Maio, M.C. / Zanardo, A.: A Gabbay-rule free axiomatization of TxW-validity, in: Journal of Philosophical Logic 27, 435-487.

Dieks, D.: Special Relativity and the Flow of Time, in: Philosophy of Science 55 (1988), 456 – 460.

Earman, J.: A Primer on Determinism, Dordrecht: Reidel 1986.

Eccles, J.: How the Self Controls Its Brain, Berlin: Springer 1994.

Einstein, A.: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Braunschweig: Vieweg 1917. Zitiert nach der 23. Auflage, Braunschweig: Vieweg 1988.

Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, in: Annalen der Physik 17 (1905), 891-921. Zitiert nach: Lorentz, H.A., Einstein, A., Minkowski, H.: Das Relativitätsprinzip, Eine Sammlung von Abhandlungen, Leipzig/Berlin: Teubner, 5.Auflage 1923, 26-50.

Esfeld, M.: Einführung in die Naturphilosophie [Einführungen Philosophie hrsg. v. D.Schönecker und N.Strobach, Bd.1], Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 2002.

Festinger, L.: A Theory of Cognitive Dissonance, Stanford: Stanford University Press 1957.

Festinger, L. / Carlsmith, J.M.: Cognitive consequences of forced compliance, In: Journal of Abnormal and Social Psychology 58 (1959), 203-211.

Feynman, R.: QED – The Strange Theory of Light and Matter, Princeton: Princeton University Press 1985. Deutsche Ausgabe: “QED – Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie”, übers. von S.Summerer und G.Kurz, München: Piper 1988. Zitiert nach der 4. Auflage von 1992.

Feynman, R.: Six Not so Easy Pieces, Einstein’s Relativity, Symmetry and Space-Time, originally prepared for publication [1963] by R.B.Leighton and M.Sands, London: Penguin 1999.

Fitzgerald, P.: The Truth about Tomorrow’s Sea Fight, in: The Journal of Philosophy 66 (1969), 307 – 329.

Flew, A. (Hg.): A Dictionary of Philosophy, London: MacMillan 1979.

Forger, M., Römer, H.: Elementare Feldtheorie, Basel: VCH 1993.

Fraassen, B.C. van: Singular Terms, Truth-Value Gaps and Free Logic, in: Journal of Philosophy 63 (1966), 481-495.

Fraassen, B.C. van: Presupposition, Implication and Self-Reference, in: Journal of Philosophy 65 (1968), 136-152.

Fuhrmann, M.: Römische Rechtstexte / Exempla Iuris Romani, München: dtv 1987.

Gamut, L.T.F. [niederländisches Autorenkollektiv der Universitäten **G**roningen, **Am**sterdam und **Ut**recht]: Logic, Language and Meaning [Vol. 1: Introduction to Logic, Vol. 2: Intensional Logic and Logical Grammar], Chicago: The University of Chicago Press 1991.

Gabbay, D. und Shehtman, V.: Products of Modal Logics Part I, in: Journal of the IGPL 6 (1998), 73-146.

Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F., Zakharyaschev, M.: Many-Dimensional Modal Logics [MDML], Theory and Applications [Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 148], Amsterdam: Elsevier 2003.
Goldblatt, R.: Diodorean Modality in Minkowski Spacetime, in: Studia Logica(1980), 219-236.
Guckes, B.: Ist Freiheit eine Illusion?, Paderborn: mentis 2003.

Harada, K.: Indeterministische Zeitlogik [IZL, Dissertation Heidelberg 1993], veröffentlicht in: Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis, Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 236-376.
Harris, E.E.: Simultaneity and the Future, in: The British Journal for the Philosophy of Science 19 (1969), 254 – 256.
Hasle, P., Øhrstrøm, P.: Temporal Logic, From Ancient Ideas to Artificial Intelligence, Dordrecht: Kluwer 1995.
Hawking, S.: A Brief History of Time, London: Bantam 1988.
Hawking, S.: The Future of the Universe, Darwin Lecture given at the University of Cambridge in January 1991, in: ders.: “Black Holes and Baby Universes” and Other Essays, London / New York etc.: Bantam 1993, 127-141.
Henkin. L., Monk, J.D., Tarski, A.: “Cylindric Algebras”, Part II, Amsterdam: North Holland 1985.
Hirsch, R., Hodkinson, I.: Step by Step – building representations in algebraic logic, in: Journal of Symbolic Logic 62 (1997), 225 – 279.
Hughes, G.E., Cresswell, M.J.: A New Introduction to Modal Logic, London: Routledge 1996.
d’Inverno, R.: Introducing Einstein’s Relativity, Oxford: Oxford University Press 1992. Deutsche Ausgabe: “Einführung in die Relativitätstheorie”, übers. v. O.Richter, hrsg. v. G.Schäfer, Weinheim: VCH 1995.

Jansen, L.: Tun und Können, ein systematischer Kommentar zu Aristoteles‘ Theorie der Vermögen im neunten Buch der „Metaphysik“, Frankfurt/M.: Hänsel-Hohenhausen 2002.
Jedan, C. / Strobach, N.: Modalities by Perspective, Aristotle, the Stoics and a Modern Reconstruction, St. Augustin: Academia Verlag 2002.
Johnson, J.S.: Nonfinitizability of classes of representable polyadic algebras, in: Journal of Symbolic Logic 34 (1969), 344-352.

Kamp, H.: Formal Properties of „now“, in: Theoria 37 (1971), 227-273.
Kienzle, B.: Die Bestimmung des Janus, in Vorbereitung [Erscheinen geplant für 2007].
Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis [ZuE], Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 236-376.
Kretzmann, N.: Boethius and the truth about tomorrow’s seabattle, in: Ammonios: On Aristotle On Interpretation 9, translated by D.Blank with Boethius, On Aristotle On Interpretation 9, first and second commentaries, translated by N.Kretzmann with essays by N.Kretzmann, R.Sorabji and M.Mignucci, London: Duckworth 1998, 24-52.
Kripke, S.: Naming and Necessity, Oxford: Blackwell 1980 [zuerst veröffentlicht in: Harman, G., Davidson, D. (Hg.): Semantics of Natural Language, Dordrecht / Boston: Reidel 1972].
Kurucz, A. / Zakharyaschev, M.: A Note on Relativized Products of Modal Logics, in: Balbiani et al. (Hrsg.), 221-242.

Kutschera, F.v.: T×W-completeness, in: Journal of Philosophical Logic 26 (1997), 241-250.
Kutschera, F.v.: Bewirken, in: Erkenntnis 24 (1986), 253-281.
Kutschera, F.v.: Zwei modallogische Argumente für den Determinismus: Aristoteles und Diodor, in: Erkenntnis 24 (1986), 203-217.

Lango, J.W.: The Logic of Simultaneity, in: The Journal of Philosophy 66 (1969), 340 – 350.
Landsberg, P.T.: Time in Statistical Physics and Special Relativity, in: Studium Generale 23 (1970), 1108 – 1158; wieder abgedruckt in: Fraser, J.T. / Haber, F.C. / Müller, H. (Hg.): The Study of Time, Proceedings of the First Conference of the International Society for the Study of Time - Oberwolfach (Black Forest), Berlin / Heidelberg / New York: Springer 1972, 59 - 109.
Lenzen, W.: Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit, Wien / New York: Springer 1980.
Lewis, D.: Philosophical Papers, Vol. II Oxford: Oxford University Press 1987.
Lewis, D.: Causation, in: Journal of Philosophy 70 (1973), 556-567.
Lewis, D.: Counterfactuals, Oxford: Blackwell 1973.
Lewis, D.: "Whether" report, in: ders.: Papers in philosophical logic, Cambridge: Cambridge University Press 1987, 45-56, zuerst erschienen in der Festschrift "Philosophical Essays Dedicated to Lennart Åquist on his Fiftieth Birthday", Uppsala 1982.
Long, A. / Sedley, D.: The Hellenistic Philosophers, Cambridge: CUP 1987.
Lucas, J.R.: The Future, An Essay on God, Temporality and Truth, Oxford: Blackwell 1989.
Łukasiewicz, J.: Über den Determinismus (dt. Übersetzung von G. Patzig), in: Studia Leibnitiana 5 (1973), 5-25.

Massey, G.: Tense Logic! Why Bother?, in: Nous 3 (1969), 17-32.
Maxwell, N.: Are Probabilism and Special Relativity Compatible?, in: Philosophy of Science 52 (1985), 23 - 43.
Maxwell, N.: Discussion – Are Probabilism and Special Relativity Compatible? [Replik auf Dieks], in: Philosophy of Science 55 (1988), 640 – 645.
Maxwell, N.: Discussion - On Relativity and Openness of the Future [Replik auf Stein], in: Philosophy of Science 60 (1993), 341 – 348.
McCall, S.: A Model of the Universe, Oxford: Clarendon 1994.
McCall, S.: Choice Trees, in: A. Gupta / J.M. Dunn (Hg.), Truth or Consequences – Essays in Honor of Nuel Belnap, Dordrecht: Kluwer 1990, 231-244.
McCall, S.: Objective Time Flow, in: Philosophy of Science 43 (1976), 337-362.
McDowell, J.: Mind and World, Cambridge / Mass., London: Harvard University Press 1994.
McTaggart, J.M.E.: The Unreality of Time, in: Mind 18 (1908), 457-484.
Minkowski, H.: Raum und Zeit, Vortrag, gehalten auf der 80. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, 21.9.1908. Mit Anmerkungen von A.Sommerfeld (67-71) abgedruckt in: Lorentz, H.A., Einstein, A., Minkowski, H.: Das Relativitätsprinzip, Eine Sammlung von Abhandlungen, Leipzig/Berlin: Teubner, 5. Auflage 1923, 54-71.
Müller, T.: Arthur Priors Zeitlogik, eine problemorientierte Darstellung, Paderborn: mentis 2002.

Müller, T.: Branching space-time, modal logic, and the counterfactual conditional, in: T. Placek und J. Butterfield (Hg.), Non-locality and Modality, Dordrecht: Kluwer 2002, S. 273-291.
Müller, T., Placek, T.: Against a minimalist reading of Bell's theorem, in: British Journal for the Philosophy of Science 51 (2000), 445-475.

Nagel, T.: What Does It All Mean?, Oxford: Oxford University Press 1987.

Pilot, H.: Prolegomena zu einer kritischen Theorie der Erfahrung - Studien zu Popper und Kant, Univ. Diss. Heidelberg [unveröffentlicht], 1978.
Placek, Tomasz: Is Nature Deterministic? Krakau: Jagiellonian University Press 2000.
Plantinga, A.: The Nature of Necessity, Oxford: Oxford University Press 1974. Zitiert nach der Ausgabe in der Clarendon Paperbacks Series, Oxford 1982.
Prior, A.: Tense Logic and the Logic of Earlier and Later, in: ders.: Papers on Time and Tense, Oxford: Oxford University Press 1968, 116-134. Inzwischen auch in einer von P.Hasle et al. besorgten neuen Ausgabe: Oxford: OUP 2003. Dt. Übersetzung von B. Kienzle als „Zeitlogik und die Logik von Früher und Später" in: Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis, Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 101-123.
Prior, A.: The Syntax of Time Distinctions, in: Franciscan Studies 18 (1958), 105-120.
Prior, A.: Some Free Thinking about Time, Manuskript aus dem Nachlass, hg. v. P. Øhrstrøm in: Copeland, J. (Hg.): Logic and Reality, Essays on the Legacy of Arthur
Prior, Oxford: Oxford University Press 1996, 47-51.
Prior, A.: Past, Present and Future, Oxford: Uxford University Press 1967.
Prior, A.: Thank Goodness That's Over, in: Philosophy 34 (1959), 12-17, wieder abgedruckt in ders.: Papers on Logic and Ethics, hg. von P.T. Geach und A. Kenny, Amherst: University of Mass. Press 1976, 78-84.
Putnam, H.: Renewing Philosophy, Harvard: Harvard University Press 1992.
Putnam, H.: Time and Physical Geometry, in: The Journal of Philosophy 64 (1967), 240-247.

Quine, W.V.O.: On a so-called paradox, in: Mind 62 (1953), 65-67.
Quine, W.V.O.: Methods of Logic, Cambridge / Mass.: Harvard Univ. Press 1964 u.ö.
Quine, W.V.O.: Two Dogmas of Empiricism [1951]. Abgedruckt in: ders., From a Logical Point of View, Cambridge / Mass. (Harvard Univ. Press), 2. Aufl.1980, 20-46.

Rakić, N.: Common Sense Time and Special Relativity, Amsterdam: ILLC publications [Dissertation am Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdam] 1997.
Rakić, N.: Past, present, future and special relativity, in: British Journal for the Philosophy of Science 48 (1997), 257-280.
Rees, M.: Before the Beginning – Our Universe and Others, Cambridge / Mass.: Perseus Books 1998.
Rescher, N., Urquhart, A.: Temporal Logic, Wien, New York: Springer 1971. Dt. Übersetzung von Kap. 1 (1-67) von B. Kienzle als „Zeit und Zeitlogik" in: Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis, Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 27-97.

Reynolds, M.: A decidable temporal logic for parallelism, technical report TR-98-01, dept. of computer science, King's college London, Februar 1998, als ps.-Datei erhältlich unter: http://www.dcs.kcl.ac.uk/technical-reports/1998.html [Der Artikel desselben Autors mit dem gleichen Titel im Notre Dame Journal of Formal Logic 38 (1997), 419-436 enthält die Ergebnisse zur Semantik, nicht aber die Axiomatik mit Vollständigkeitsbeweis].

Reynolds, M.: An Axiomatization of Prior's Ockhamist Logic of Historical Necessity, in: Balbiani et al. (Hrsg.), 355-370.

Rietdijk, C.W.: A rigorous proof of determinism derived from the special theory of relativity, in: Philosophy of Science 33 (1966), 341-344.

Rietdijk, C.W.: Special Relativity and Determinism, in: Philosophy of Science 43 (1976), 598 – 609.

Ritter, J. (Hg.) u.a.: Historisches Wörterbuch der Philosophie [HWP], Basel [u.a.]: Schwabe 1971ff.

Schlick, M.: Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, Berlin: Julius Springer 1917. Der Text findet sich mit eingehendem Kommentar im von F.O. Engler et al. herausgegebenen Band 2 der Abt. 1 der Moritz-Schlick-Gesamtausgabe (Hrsg. F. Stadler und H.J. Wendel), Wien / New York: Springer 2006.

Segerberg, K.: A Note on the Logic of 'Elsewhere', in: Theoria 46 (1980), 183-187.

Segerberg, K.: "Somewhere Else" and "Some other Time", in: Mini essays in honor of Georg Henrik von Wright, Abo: Abo Akademi Forskningsinstitut 1976, 61-64.

Shehtman, V. / Shapirowski, I.: Chronological future modality in Minkowski spacetime, in: Balbiani et al. (Hrsg.), 437-459.

Sklar, L.: Space, Time and Spacetime, Berkeley / L.A.: University of California Press 1974.

Stein, H.: On Einstein-Minkowski Space-Time, in: Journal of Philosophy 65 (1968), 5-23.

Stein, H.: A Note on Time and Relativity Theory [Replik auf Lango], in: The Journal of Philosophy 67 (1970), 289 – 294.

Stein, H.: On Relativity Theory and the Openness of the Future, in: Philosophy of Science 58 (1991), 5-23.

Strobach, N.: Artikel „antiphasis" in Rapp, C., Horn, C. (Hg.): Wörterbuch der antiken Philosophie, München: Beck 2002.

Strobach, N.: The Moment of Change – A systematic History in the Philosophy of Space and Time, Dordrecht: Kluwer 1998.

Strobach, N.: Logik für die Seeschlacht – mögliche Spielzüge, in: Zeitschrift für philosophische Forschung 52 (1998), 106-119.

Strobach, N.: Rezension zu Ammonios: On Aristotle On Interpretation 9, translated by D.Blank with Boethius, On Aristotle On Interpretation 9, first and second commentaries, translated by N.Kretzmann with essays by N.Kretzmann, R.Sorabji an M.Mignucci, London: Duckworth 1998, in: Philosophische Rundschau 46 (1999), 242-253.

Strobach, N.: Einsteins Zug und logische Gesetze, in: Philosophia naturalis 34 / 1 (1997), 21-31.

Strobach, N.: The Invisible Lecturer – A Dream in Cartwrightian Metaphysics?, in: Paul, M. (Hg.): Nancy Cartwright, Laws, Capacities and Science, Vortrag und Kolloquium in Münster 1998, Münsteraner Vorlesungen zur Philosophie Bd.2, Münster: Lit 1999, 52-57.

Strobach, N.: Rezension zu: Thomas Müller, Arthur Priors Zeitlogik, in: Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie 35/2004, 403-411.

Strobach, N.: Was heißt es, eine archê in sich zu haben?, in: W.Kullmann (Hrsg.), "Aristotelische Handlungstheorie" (Aufsatzband zur Tagung in Blankensee im Juli 2004), erscheint demnächst.

Thomason, R.: Indeterminist Time and Truth-Value Gaps, in Theoria 36 (1970), 264-281. Dt. Übersetzung von B. Kienzle als „Indeterministische Zeit und Wahrheitswertlücken“ in: Kienzle, B. (Hg.): Zustand und Ereignis, Frankfurt/M.: Suhrkamp 1994, 190-209.

Thomason, R.: Combinations of Tense and Modality, in: Gabbay, D, Guenthner, F. (Hg.): Handbook of Philosophical Logic, Bd. 2: Extensions of Classical Logic, Dordrecht: Reidel 1984.

Weidemann, H.: Zwei Strategien der Kritik an einem Argument für den kausalen Determinismus, in: Damschen, G., Enskat, R., Vigo, A. (Hg.): Platon und Aristoteles – sub ratione veritatis, Festschrift für Wolfgang Wieland, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 2003, 304-333.

Weidemann, H.: Aristoteles Peri hermeneias, übersetzt und erläutert von H. Weidemann, 2., veränd. Aufl. – Berlin: Akademie-Verlag 2002.

Weingard, R.: Relativity and the Reality of Past and Future Events, in: The British Journal for the Philosophy of Science 23 (1972), 119 – 121.

Whitehead, A.N.: Process and Reality, Corrected Edition, hg. v. D.Griffin and D.Sherburne, New York: Free Press, 1978 [^{1}1929].

Wölfl, S.: Kombinierte Zeit- und Modallogik, Vollständigkeitsresultate für prädikatenlogische Sprachen, Berlin: Logos Verlag 1999.

Wright, G.H.v. [1979]: A Modal Logic of Place, in: ders.: Philosophical Papers Bd.2, Oxford: Clarendon 1983, 132-140.

Wright, G.H. v.: Time, Change and Contradiction, in: ders.: Philosophical Papers, Bd.2, Oxford: Clarendon 1983, 115-131.

Zanardo, A. / Goranko, V.: From linear to branching-time temporal logics: transfer of semantics and definability, noch nicht im Druck veröffentlicht. Zugänglich unter: http://www.math.unipd.it/~azanardo/#papers.

SACHREGISTER

Modaloperatoren

alphabetisch und dann in der Reihenfolge ihres Auftretens; zu allen Boxen existieren die entsprechenden Rauten.

E	xiv, 26
F	22
F	60f., 201
$\mathbf{F}_{\Delta}$	247
f	24, 201f.
F_k	152, 191-194
G	22
G	201
G_k	152, 191-194
g	201
H	22
H_k	152, 191-194
M	xv
M_{∇}	xv
M_{Δ}	xv
N	xv, 20f., 55
N_{Δ}	xv
N_{∇}	xv
O	40
P	22
P_k	152, 191-194
$\mathbf{P}_{\Delta}$	247, 296
P	247, 296
S	xiv, 26
S	247, 296
$\mathbf{S}_{\Delta}$	247, 296
T	40
$\Box$	8, 55
$\boxminus^{r}_{i}$	40
$\boxdot_1$, $\boxdot_2$	33
$\times$	xiv, 167f.
+	xiv, 167-169

Axiome bzw. Axiomenschemata, wichtige Formeln

alphabetisch

(ANF)	79, 335
(B-$\Box$)	9
(B-$\Box_{i/k}$)	15
(chr)	27, 29, 33
(chr-2)	30
(Cocchiarella)	313
(com)	27, 29, 33
(com-1)	27
(com-2)	27
(cub)	321, 339
(Dense-A)	19
(HN)	78, 335
(K-$\Box$)	9
(K4.3-$\Box$)	319
(K-$\Box_i$)	13
(K_t-1)	14
(Kont-1)	313
(Kont-2)	313
(Lin-1)	17, 311
(Lin-2)	17, 311
(MB)	78, 334
(PC)	9
(PN)	75
(Rel-1) bis (Rel 8)	235
(Reynolds-1)	311
(Reynolds-2)	311
(Rl-A_1)	20
(Rl-A_2)	20
(rom)	30, 110
(SK-A_1-Pr1)	311
(SK-A_2-Pr1)	311
(SK-A_1-Pr2)	311

(SK-A_2-Pr2)	311	(S5-□)	9
(SK-A_1-K/W)	311	(S5-$□_i$)	13
(SK-A_2-K/W)	311	(T-□)	12
(SvW)	324	(T-$□_i$)	13
(S4.2-□)	9	(T-K1) bis (T-K9)	302f
(S4.3-□)	9	(T-T1) bis (T-T6)	306
(S4-□)	9	(□/N)	75

Herleitungsregeln

(DR 1)	302	(LC)	79, 353
(DR 2)	302	(MP)	9
(DR 3)	302	(NEC-□)	9
(DR 4)	307	(R-$◊_i□_k$)	15
(DR S5)	307	(Subst)	9, 77-79, 169, 236

Sprachen und Sprachfamilien

fett: Modelldefinition, kursiv: Axiome

PC	3-5, **4**
PC 3	**6**
K	***8f***
K_{Prior}	***152***, 194, 196f
$K^{add(S4-□)}$	***11***
$K_t^{add(S4-□1)}$	***16***, 195
T	***10***
S4	***10***
S4.2	***10***
S4.3	***10***
S5	***10***
KuK	***14***
K_t	***14***
K_{lin}	17, ***18***
K_b	**17**
$S5^n$	**28**
$K_{lin}{}^n$	**318**
$S5^2$	**27**f, *29*, 31, 41
K^2	***29***
$K_{lin}{}^2$	*33*, **318**
$S5^3$	*36*, **28**
$K_{lin}{}^3$	*36*, **318**
$S5^4$	**28**, *38*
$K_{lin}{}^4$	*38*, 38-40, **318**
S5×K_{lin}	***41***f, *329*
TxW	51, 53f, **55**, *75-79*
LF	xxi, 52, 55-58, **57**, *75-79*
LF×S5	105-112, *108*f, **337,** *339*
3N	xxii, 105, 122-131, *131*f, **341**
^{Proto}Rel	165-174, **167**, *169-172*, 192
Rel	xxiii, 175-187, **183**, *183-187*
Rel^{pl}	***189***f
Rel^{root}	195-*197*, **196**, 237
SRel	166, 195-*197*, **196**, 237
LF×Rel	xxiii, 231-237, **234**f, *235-237*
3N×$Rel^{(pl)}$	xxiv, 237-241, **238**, *238*f

Aussagenlogische Junktoren

$\rightarrow$	4	$\sim$	4
$\wedge$	4	$\vee$	4
$\equiv$	4	∇	4

Definierte metasprachliche Notation

nach Reihenfolge des Vorkommens

Δ_e	122	$\nabla^{-}(e)$	175
∇_e	122	$\rangle\langle(e)$	175
$W \setminus \nabla_e$	122	∇	175
$A^{N\Delta}$	122, 238f, 374	$\circ$	181
$A^{N\nabla}$	122, 238	$\prec_b$	182
$H^{AN\Delta}$	124	$\succ_b$	182
R^{Δ}	125	$<_b$	182
R^{∇}	125	$>_b$	182
$t_b(e)$	167	A^N	233, 374
$s_b(e)$	167	P	249, 253
Δ	175	P^{Δ}	249, 253
$\Delta(e)$	175	S	249, 253
$\Delta^{-}(e)$	175	S^{Δ}	249, 253

Weitere Notation

$E\wedge$	$\wedge$-Eliminierung	$\subseteq$	Teilmenge von
Kond.	Konditionalisierung	$\subset$	echte Teilmenge von
Kontrapos., Kp.	Kontraposition	$\cap$	„geschnitten mit“
m.p.	modus ponens	$\cup$	„vereinigt mit“
PDN	doppelte Negation	$\varnothing$	leere Menge
$\{\ \}$	Mengenklammern	$\perp$	Falsum
$\{ \ldots \mid \ldots \}$	„Die Menge aller ..., für die gilt: ...“	$\forall$	„Für alle... “
		$\exists$	„Es gibt ein ...“
$\langle\ \rangle$	Tupel-Klammern	$\times$	Cartesisches Produkt

Begriffe

Ich habe nicht alle Stellen aufgeführt, an denen ein Ausdruck wieder verwendet wird, sondern oft nur die Stelle, an der er – entweder durch explizite Definition oder direkt im Kontext – eingeführt wird. Wendungen, die mit einem Adjektiv beginnen, wurden nicht auseinander gezogen und sind unter dem *ersten* Wort des Ausdrucks zu finden.

A-Ordnung 23, 154-156, 265, 292-294
Achse 32, 46f.
Äquivalenzrelation 10
Aktualismus 69, 209f., 254, 256
Aktualitäts-Operator 12, 63
aktueller Wahrheitswert 70
Alethische Modalitäten 20
Allgemeine Relativitätstheorie (AR) xxiii, 141-147, 197, 297f.
allgemeingültig 4
Alternation 5
Alternativen-Ockhamismus xi, xix, xxi, xxiii, 52, 58f., 67, 69f., 254-256, 291, 299
An-Kontext, Äußerungs-Kontext 63
Antiphasis xi f.
Antisymmetrie 11
ASL (Müller) 160-162
astit 89
Asymmetrie 11
Aufgehobensein (Hegel) 26, 169, 261
Ausschluss der wings siehe wings
Axiomatik, axiomatisieren 3, 75-79

B-Ordnung 23, 154-156, 292-294
B-Prinzip 4
Baumstruktur 24
Behauptungswert 74, 297
Beeinflussbarkeit 112-118, 275
Bewertungskontext 8, 63
Bezugssystem siehe raumzeitliches Koordinatensystem
Bezugssystem-Ockhamismus xi, xxiii, 208f., 210-212, 255, 299
Bivalenzprinzip 5
Blockuniversum xvi, 292
Box 8
branching xviii, 95, 274
branching spacetime xvii, 217-229
Brouwer-Axiom siehe (B-□)
Brücken-Prinzipien für A- und B-Ordnung 23, 294
Buridans Esel 87
busy chooser 86, 93, 233

choice cell 89
choice point 222
choice principle 222
contingentia futura 51
contingentia praesentia xxiv, 250-253, 259f., 266f.
contingentia praeterita xxiv, 250-253, 259f., 266f
corner quotes 3
cubifying property 321

defiziente Produktstruktur 37
deiktische Determiniertheit xxiv, 262, 271-273
Determinismus 56, 82
Dezision 274
Diamant siehe Raute
Dichte 19, 176, 187
Disjunktion 5, 290
Dreidimensionalität 26
dstit 89

EPR (Einstein-Podolsky-Rosen-Korrelation) 220
Entscheidung siehe Dezision
Entscheidung durch Geschehen 96, 104,199f.

Entscheidungspunkt 95 (siehe auch choice-point)
Entweder-oder-Prinzip 5
epistemische Alternative 116-118
epistemische Notwendigkeit 113
erfüllbar 4
Erleichterung xxv, 292-297
Erziehung 99, 103
event 39, 261f., 297f.
eventisierte Notwendigkeit 261, 299, 381

Fatalismus 82, 99-102
faules Argument 100
Feld einer Relation 317
Fluß der Zeit 299f., 387f.
formale Semantik 3
formale Sprache 3
Freiheit xix, 85-104
Für-Kontext 63
Fusion xx, 12f., 172

Gabbay-Regel 11, 75
Gegenwart xix, 155-160, 199-201, 225f., 258f., 268, 293, 296, 386
Gitter-Bedingung 178
Gleichberechtigung 87f., 224, 257, 264-266, 377, 379, 382
Gleichortigkeit 47
Gleichzeitigkeit 47, 141-144
globale historizistische Zugänglichkeit 107
Gnade 102
Goldblatt-Axiom 154, 166, 197, 237
Gott 82, 162f., 265, 336
gubernatio 86, 103

H-Gültigkeit 331
H-Wert 63, 330 f
Handlungstheorie xix, 81, 85-97
Haradianischer Ansatz 63-65, 67, 330
Hemiaktualismus 52, 61, 254f., 299
Herleitungsregeln 9
Herleitungsspiel 3 (siehe auch Axiomatik)
hinreichender Grund 83
Historiker-Perspektive xxiv, 277-284, 296
historische Notwendigkeit 58, 75-79
Historizität 52, 55-57, 107
Höhlengleichnis 299
Hoffnung 100
Horn-Axiomatisierbarkeit 29
hybrides Partitionsmodell 32, 317

Indeterminismus xvii, 56, 82
Indexikalia 148, 272, 289
Interaktionsgesetze xx, 390
irgendwo 25
Irreflexivität 11
ISL (Müller) 160, 163f.
Isochronie 55

J-Operator 63
jetzt siehe Indexikalia

KTM (kombinierte Zeit- und Modallogik) 51
kausale Operatoren xxiii, 148, 151-154, 191-194
kognitive Dissonanz 99
kommutieren 20
Konnexität 10, 304
Kontextmenge 8
Kontinuität 19
kontradiktorisch 4
Konvergenz 10, 176, 195-197, 220, 304
Koordinate 47
Koordinatensystem siehe raumzeitliches Koordinatensystem
Korrektheit 9
Korrespondenztheorie der Wahrheit xx, 5, 52, 71-75, 258, 297
Kutschera-Box 55, 233

LF (lingua franca) xxi
Längenkontraktion 141, 144
lakonische Antwort 289f.
Lasagna-Modell 347, 349
lichtartig 146
Lichtkegel-Struktur 175
Lichtkegel-Struktur, minimale, normale, SR- 178
Linearität 17, 195 (siehe auch starke Linearität)
lower cut 56, 95, 218, 274

MP 9
massive coincidence xxiv, 277, 280
Modell 3
Modell-Produkt 28
modus ponens siehe MP
Mögliche Welten 21, 53, 298
möglicher Weltverlauf 53

NEC 9
narrative Determiniertheit xxiv, 262, 273-289, 383
Nichtwiderspruchssatz 7, 144
nomological machine xxii, 84, 99, 103
Notwendigkeit 20f., 55, 58, 113

ob xxii, xxv, 132-135, 286f.
Ockhamismus siehe Alternativen-O., Bezugssystem-O.
oder$^{\&}$ 4
ontische Notwendigkeit 113
Ort 42, 45-47

PC-Allgemeingültigkeit 4
PC-Interpretationsfunktion 4
PRES (Rakić) 156-159
Parmenides-Formel 44
Partition 316, 354
Partitionsstruktur 32
Peirceanischer Ansatz xxi, 60f., 67, 71f., 206-208, 246, 254f., 259, 291, 296
Perspektivenwechsel 164, 351
Perspektivität der Diagramme 293, 385, 387f.
Phalanx-Bedingung 178, 181f., 356f., 388f.
Physikalismus 298
positionale Notwendigkeit 261
Positionsangaben 65f., 204, 243f., 365f.
possible point events 219, 232, 298
Präferenz 97f.
pragmatische Alternative 119
pragmatische Notwendigkeit 113, 297
prior choice principle xxiii, 221-229
Problem des Raumartigen xiii, 199, 217, 290
Produkt 27, 172, 297
produkt-allgemeingültig 28
Produktmodell 31

Quantentheorie 81, 84f., 383
Quantorendreher 44, 186, 211
quasi-universelle Relation 11

Ränder des Lichtkegels 194f., 229
Railroad-Dilemma 87
Randlosigkeit 19, 187
Rationalität 267
Raum als Erzählform 277, 281
raumartig xiii, 147
Raumlogik 25f.
Raumzeitlogik 26
raumzeitliches Koordinatensystem (= Bezugssystem) xiii, 47, 143
Raute 8
Realismus 5, 272
rebus sic stantibus xxiv, 70, 108, 253-260
Rechts- / Links-Unterscheidung 39

reduktives Partitionsmodell 32, 317
Reflexivität 9
region-connecting calculus (RCC) 25, 34
Reporter-Perspektive xxv, 284-289, 296
Rietdijk-Eigenschaft 187-189
Rietdijk-Schema 189
Rietdijk-Strukturen, Rietdijk-Modelle 189
Rückwärtslichtkegel 125

s-Funktion 178
S-Wert 62, 247
S^{Δ}-Wert 247, 296
S4-Reduktionsgesetze 306
S5-Reduktionsgesetze 306
$S5_i$-Achse 317
$S5^n$-artige Partitionierung 317
$S5^n$-artige Partitionsstruktur 317
$S5^n$-Produkt-Struktur 28
Satz vom ausgeschlossenen Dritten 7
Satz vom zureichenden Grund 83
Satz vom unzureichenden Hinderungsgrund xxii, 84
Schachbrett 12, 27
Schwarze Löcher 37, 297
Scheibigkeit 179
Seeschlachtproblem xi, 65-68, 71-75, 252, 290f.
Seeschlacht-Szenario 59-64, 268
Semantik siehe formale Semantik
semantisches Konsistenzprinzip 5
so 272
„spacefight“-Szenario 243, 268f.
spezielle Relativitätstheorie (SR) xxiii, 141-147
starke Linearität 18
STIT xix, 81, 87-94
Subst 9
Supervaluation xxi, xxiv, 61-63, 67, 72-74, 201, 246f., 254f., 259, 291, 296f., 299
Symmetrie 9, 304

t-Funktion 178
tempo-modale Positionen 25
Thomasonianischer Ansatz siehe Supervaluation
Transitivität 9, 303
trousers worlds 44f., 180, 297
Tunnelbeispiel xxiv, 143f., 273-284, 385
typische Rel-Schemata 184

überall 25
Überforderung 94
Unendlichkeit siehe Randlosigkeit
universe tree 387 f. (siehe auch Weltbuch)
universelle Relation 10
Unzerschlissenheit 36f., 44, 297f.
upper cut 56, 95, 218, 227f., 274
Urknall 101, 163, 178

Vergangenheitslichtkegel siehe Rückwärtslichtkegel
Verinselung 42, 318
Verinselungsfreiheit 55, 109
Vermeidbarkeit siehe Beeinflussbarkeit
Versprechen 99, 103
Verzweigung xviii, 17, 24, 54 (siehe auch branching)
volle Struktur, volles Modell 166, 189f.
Vollständigkeit 9, 34f., 329
Vorherwissen siehe Gott
Vorwärtslichtkegel 125
Vorwerfbarkeit 82, 97-99, 103

Wahrheitswertlücken siehe Supervaluation
Weltblatt xxii, 41, 107

Weltbuch xxii, 105f., 337
Weltgeschichte 300 (siehe auch möglicher Weltverlauf)
Weltlinie 146, 195, 262, 293
wings xiii, xxiv, 217, 252, 257, 262-269, 290, 384
Wissbarkeit 112-118

zeigen 271f.
Zeitachse 22
zeitartig 146
zeitlich-modales Kontinuum 25
Zeitstelle, Zeitpunkt 21, 42, 45-47
Zugänglichkeits-Relation 8
Zukunftslichtkegel siehe Vorwärtslichtkegel
Zwang 99, 102f.

PERSONENREGISTER

Aristoteles xi f., 21, 96, 99, 144

Belnap, N. xiii-xv, xvii-xix, xxiii, 24, 87-89, 148, 218-229, 232f., 261f., 274, 280, 389
Boethius 336
Burgess, J. 52, 61

Camus, A. 98
Čapek, M. xxv, 139, 146
Carnap, R. 21
Cartwright, N. xxii, 84, 103
Clarke, S. 163
Cocchiarella, N. 313
Craig, W.L. 163

Di Maio, M.C. 75
Dieks, D. 383, 385f
Diodoros Kronos 149

Eccles, J. 85f.
Einstein, A. 141f., 145, 179
Epikur 103
Esfeld, M. 85
Euklid 35

Festinger, L. 99
Feynman, R. 84
Fitzgerald, P. xiv, 217, 379f., 387
Fraassen, B.C.v. 52, 298

Gabbay, D. xv, 11, 29, 33, 75, 319
Galilei, G. 143
Goldblatt, R. xiii, 153f., 192, 197, 362
Goranko, V. 52
Guckes, B. 98

Hamblin, J. 34
Harada, K. xxi, 24, 51f., 58, 61, 63, 66, 69, 74, 330
Harris, E.E. xiv, 217, 378-381
Hasle, P. xiv, 148
Hawking, S. 163
Hegel, G.W.F. 26, 169, 261, 272, 300
Hofmannsthal, H.v. 98
Hu Liu 236
Hume, D. xvii, xxi, 97f., 101

Kamp, H. 63
Kant, I. 143, 147, 160, 281
Kienzle, B. 18, 24, 179
Kretzmann, N. 74
Kripke, S. 272, 298
Kuhn, T. xvii
Kurucz, A. 36, 172
Kutschera, F.v. xviii, 31, 51, 53f., 65f., 69, 76f., 89, 261, 332

Landsberg, P.T. 217, 264, 382
Lango, J. 217, 379f
Leibniz, G.W. 83, 163
Lewis, D. 78, 135, 272
Lucas, J.R. 162
Łukasiewicz, J. 96

Massey, G. 147
Maxwell, N. 217, 383-386
McCall, S. xviii, xix, 87, 94, 105, 217, 387-389
McTaggart, J.E. 23
Minkowski, H. 39, 145
Müller, T. xiv, xix, xxiii, 145, 148, 150, 155, 160-164, 197, 199, 208, 218, 220, 262, 351

Nagel, T. 98
Newton, I. 163
Nietzsche, F. 99, 103

Øhrstrøm, P. xiv, 148
Parmenides 44, 300
Perloff, M. xv, xix, 24, 87-89, 261
Pilot, H. 25
Plantinga, A. 21
Platon xxv, 215, 299
Prior, A. xiv, xviii, xxi, xxiii, 7, 14, 51, 60, 74, 147-155, 160, 163, 165, 192f., 195, 197, 218, 261, 292
Putnam, H. xiv, 211, 217, 243, 264, 267, 288, 377-383, 387, 389

Quine, W.V.O. 3,7

Rakić, N. xiv, xix, xxiii, 148, 155-160, 218, 225f., 269, 293f., 296, 383
Reynolds, M. 42, 78f., 329, 334f.
Rietdijk, C.W. xxiii, 187f., 205, 217, 264, 377-383, 387f.

Schlick, M. 141
Schopenhauer, A. xvii, 99, 102
Segerberg, K. 11, 25, 321
Shapirowski, I. 152f
Shehtman, V. xv, 29, 33, 152f., 319
Sklar, L. 40
Spinoza, B. xvii, 100f.
Stein, H. 188, 264, 379f., 383f., 386, 389

Thomas von Aquin xxv, 1, 86
Thomason, R. xxi, 52, 201, 378

Wajsberg, M. 6
Weidemann, H. xii, 59, 96
Weingard, R. 217, 381
Whitehead, A.N. 274
Wittgenstein, L. xix, 272
Wölfl, S. 34, 42, 55, 76ff., 261, 308, 313, 329, 332
Wright, G.H.v. 11, 25, 145, 321, 324

Xu, M. xv, xix, 24, 87-89, 261

Zakharyaschev, M. 36, 172
Zanardo, A. 52, 75

Bereits erschienene und geplante Bände der Reihe

Logische Philosophie

Hrsg.: H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko, M. Urchs

ISSN: 1435–3415

In der Reihe „Logische Philosophie“ werden philosophisch relevante Ergebnisse der Logik vorgestellt. Dazu gehören insbesondere Arbeiten, in denen philosophische Probleme mit logischen Methoden gelöst werden.

Uwe Scheffler/Klaus Wuttich (Hrsg.)

Terminigebrauch und Folgebeziehung

ISBN: 978-3-89722-050-8 Preis: 30,- €

Regeln für den Gebrauch von Termini und Regeln für das logische Schließen sind traditionell der Gegenstand der Logik. Ein zentrales Thema der vorliegenden Arbeiten ist die umstrittene Forderung nach speziellen Logiken für bestimmte Aufgabengebiete - etwa für Folgern aus widersprüchlichen Satzmengen, für Ersetzen in gewissen Wahrnehmungs- oder Behauptungssätzen, für die Analyse von epistemischen, kausalen oder mehrdeutigen Termini. Es zeigt sich in mehreren Arbeiten, daß die nichttraditionelle Prädikationstheorie eine verläßliche und fruchtbare Basis für die Bearbeitung solcher Probleme bietet. Den Beiträgen zu diesem Problemkreis folgen vier diese Thematik erweiternde Beiträge. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der logischen Folgebeziehungen. Die meisten der diesem Themenkreis zugehörenden Arbeiten sind explizit den Systemen F^S bzw. S^S gewidmet.

Horst Wessel

Logik

ISBN: 978-3-89722-057-7 Preis: 37,- €

Das Buch ist eine philosophisch orientierte Einführung in die Logik. Ihm liegt eine Konzeption zugrunde, die sich von mathematischen Einführungen in die Logik unterscheidet, logische Regeln als universelle Sprachregeln versteht und sich bemüht, die Logik den Bedürfnissen der empirischen Wissenschaften besser anzupassen.

Ausführlich wird die klassische Aussagen- und Quantorenlogik behandelt. Philosophische Probleme der Logik, die Problematik der logischen Folgebeziehung, eine nichttraditionelle Prädikationstheorie, die intuitionistische Logik, die Konditionallogik, Grundlagen der Terminitheorie, die Behandlung modaler Prädikate und ausgewählte Probleme der Wissenschaftslogik gehen über die üblichen Einführungen in die Logik hinaus.

Das Buch setzt keine mathematischen Vorkenntnisse voraus, kann als Grundlage für einen einjährigen Logikkurs, aber auch zum Selbststudium genutzt werden.

Yaroslav Shramko

Intuitionismus und Relevanz

ISBN: 978-3-89722-205-2 Preis: 25,- €

Die intuitionistische Logik und die Relevanzlogik gehören zu den bedeutendsten Rivalen der klassischen Logik. Der Verfasser unternimmt den Versuch, die jeweiligen Grundideen der Konstruktivität und der Paradoxienfreiheit durch eine „Relevantisierung der intuitionistischen Logik“ zusammenzuführen. Die auf diesem Weg erreichten Ergebnisse sind auf hohem technischen Niveau und werden über die gesamte Abhandlung hinweg sachkundig philosophisch diskutiert. Das Buch wendet sich an einen logisch gebildeten philosophisch interessierten Leserkreis.

Horst Wessel

Logik und Philosophie

ISBN: 978-3-89722-249-6 Preis: 15,30 €

Nach einer Skizze der Logik wird ihr Nutzen für andere philosophische Disziplinen herausgearbeitet. Mit minimalen logisch-technischen Mitteln werden philosophische Termini, Theoreme und Konzeptionen analysiert. Insbesondere bei der Untersuchung von philosophischer Terminologie zeigt sich, daß logische Standards für jede wissenschaftliche Philosophie unabdingbar sind. Das Buch wendet sich an einen breiten philosophisch interessierten Leserkreis und setzt keine logischen Kenntnisse voraus.

S. Wölfl

Kombinierte Zeit- und Modallogik. Vollständigkeitsresultate für prädikatenlogische Sprachen

ISBN: 978-3-89722-310-3 Preis: 40,- €

Zeitlogiken thematisieren „nicht-ewige" Sätze, d. h. Sätze, deren Wahrheitswert sich in der Zeit verändern kann. Modallogiken (im engeren Sinne des Wortes) zielen auf eine Logik alethischer Modalbegriffe ab. Kombinierte Zeit- und Modallogiken verknüpfen nun Zeit- mit Modallogik, in ihnen geht es also um eine Analyse und logische Theorie zeitabhängiger Modalaussagen.

Kombinierte Zeit- und Modallogiken stellen eine ausgezeichnete Basistheorie für Konditionallogiken, Handlungs- und Bewirkenstheorien sowie Kausalanalysen dar. Hinsichtlich dieser Anwendungsgebiete sind vor allem prädikatenlogische Sprachen aufgrund ihrer Ausdrucksstärke von Interesse. Die vorliegende Arbeit entwickelt nun kombinierte Zeit- und Modallogiken für prädikatenlogische Sprachen und erörtert die solchen logischen Systemen eigentümlichen Problemstellungen. Dazu werden im ersten Teil ganz allgemein multimodale Logiken für prädikatenlogische Sprachen diskutiert, im zweiten dann Kalküle der kombinierten Zeit- und Modallogik vorgestellt und deren semantische Vollständigkeit bewiesen.

Das Buch richtet sich an Leser, die mit den Methoden der Modal- und Zeitlogik bereits etwas vertraut sind.

H. Franzen, U. Scheffler

Logik. Kommentierte Aufgaben und Lösungen

ISBN: 978-3-89722-400-1 Preis: 15,- €

Üblicherweise wird in der Logik-Ausbildung viel Zeit auf die Vermittlung metatheoretischer Zusammenhänge verwendet. Das Lösen von Übungsaufgaben — unerläßlich für das Verständnis der Theorie — ist zumeist Teil der erwarteten selbständigen Arbeit der Studierenden. Insbesondere Logik-Lehrbücher für Philosophen bieten jedoch häufig wenige oder keine Aufgaben. Wenn Aufgaben vorhanden sind, fehlen oft die Lösungen oder sind schwer nachzuvollziehen.

Das vorliegende Trainingsbuch enthält Aufgaben mit Lösungen, die aus Klausur- und Tutoriumsaufgaben in einem 2-semestrigen Grundkurs Logik für Philosophen entstanden sind. Ausführliche Kommentare machen die Lösungswege leicht verständlich. So übt der Leser, Entscheidungsverfahren anzuwenden, Theoreme zu beweisen u. ä., und erwirbt damit elementare logische Fertigkeiten. Erwartungsgemäß beziehen sich die meisten Aufgaben auf die Aussagen- und Quantorenlogik, aber auch andere logische Gebiete werden in kurzen Abschnitten behandelt.

Diese Aufgabensammlung ist kein weiteres Lehrbuch, sondern soll die vielen vorhandenen Logik-Lehrbücher ergänzen.

U. Scheffler

Ereignis und Zeit. Ontologische Grundlagen der Kausalrelationen

ISBN: 978-3-89722-657-9 Preis: 40,50 €

Das Hauptergebnis der vorliegenden Abhandlung ist eine philosophische Ereignistheorie, die Ereignisse über konstituierende Sätze einführt. In ihrem Rahmen sind die wesentlichen in der Literatur diskutierten Fragen (nach der Existenz und der Individuation von Ereignissen, nach dem Verhältnis von Token und Typen, nach der Struktur von Ereignissen und andere) lösbar. In weiteren Kapiteln werden das Verhältnis von kausaler und temporaler Ordnung sowie die Existenz von Ereignissen in der Zeit besprochen und es wird auf der Grundlage der Token-Typ-Unterscheidung für die Priorität der singulären Kausalität gegenüber genereller Verursachung argumentiert.

Horst Wessel

Antiirrationalismus

Logisch-philosophische Aufsätze

ISBN: 978-3-8325-0266-9 Preis: 45,- €

Horst Wessel ist seit 1976 Professor für Logik am Institut für Philosophie der Humboldt-Universität zu Berlin. Nach seiner Promotion in Moskau 1967 arbeitete er eng mit seinem Doktorvater, dem russischen Logiker A. A. Sinowjew, zusammen. Wessel hat großen Anteil daran, daß am Berliner Institut für Philosophie in der Logik auf beachtlichem Niveau gelehrt und geforscht wurde.

Im vorliegenden Band hat er Artikel aus einer 30-jährigen Publikationstätigkeit ausgewählt, die zum Teil nur noch schwer zugänglich sind. Es handelt sich dabei um logische, philosophische und logisch-philosophische Arbeiten. Von Kants Antinomien der reinen Vernunft bis zur logischen Terminitheorie, von Modalitäten bis zur logischen Folgebeziehung, von Entwicklungstermini bis zu intensionalen Kontexten reicht das Themenspektrum.

Antiirrationalismus ist der einzige -ismus, dem Wessel zustimmen kann.

Horst Wessel, Klaus Wuttich

daß-Termini

Intensionaliät und Ersetzbarkeit

ISBN: 978-3-89722-754-5 Preis: 34,- €

Von vielen Autoren werden solche Kontexte als intensional angesehen, in denen die üblichen Ersetzbarkeitsregeln der Logik nicht gelten. Eine besondere Rolle spielen dabei *daß*-Konstruktionen.

Im vorliegenden Buch wird gezeigt, daß diese Auffassungen fehlerhaft sind. Nach einer kritischen Sichtung der Arbeiten anderer Logiker zu der Problematik von *daß*-Termini wird ein logischer Apparat bereitgestellt, der es ermöglicht, *daß*-Konstruktionen ohne Einschränkungen von Ersetzbarkeitsregeln und ohne Zuflucht zu Intensionalitäten logisch korrekt zu behandeln.

Fabian Neuhaus

Naive Prädikatenlogik

Eine logische Theorie der Prädikation

ISBN: 978-3-8325-0556-1 Preis: 41,- €

Die logischen Regeln, die unseren naiven Redeweisen über Eigenschaften zugrunde liegen, scheinen evident und sind für sich alleine betrachtet völlig harmlos - zusammen sind sie jedoch widersprüchlich. Das entstehende Paradox, das Russell-Paradox, löste die sogenannte Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts aus. Der klassische Weg, mit dem Russell-Paradox umzugehen, ist eine Vermeidungsstrategie: Die logische Analysesprache wird so beschränkt, daß das Russell-Paradox nicht formulierbar ist.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg aufgezeigt, wie man das Russell-Paradox und das verwandte Grelling-Paradox lösen kann. Dazu werden die relevanten linguistischen Daten anhand von Beispielen analysiert und ein angemessenes formales System aufgebaut, die Naive Prädikatenlogik.

Bente Christiansen, Uwe Scheffler (Hrsg.)

Was folgt

Themen zu Wessel

ISBN: 978-3-8325-0500-4 Preis: 42,- €

Die vorliegenden Arbeiten sind Beiträge zu aktuellen philosophischen Diskussionen – zu Themen wie Existenz und Referenz, Paradoxien, Prädikation und dem Funktionieren von Sprache überhaupt. Gemeinsam ist ihnen der Bezug auf das philosophische Denken Horst Wessels, ein Vierteljahrhundert Logikprofessor an der Humboldt-Universität zu Berlin, und der Anspruch, mit formalen Mitteln nachvollziehbare Ergebnisse zu erzielen.

Vincent Hendricks, Fabian Neuhaus, Stig Andur Pedersen, Uwe Scheffler, Heinrich Wansing (Eds.)

First-Order Logic Revisited

ISBN: 978-3-8325-0475-5 Preis: 75,- €

Die vorliegenden Beiträge sind für die Tagung „75 Jahre Prädikatenlogik erster Stufe“ im Herbst 2003 in Berlin geschrieben worden. Mit der Tagung wurde der 75. Jahrestag des Erscheinens von Hilberts und Ackermanns wegweisendem Werk „Grundzüge der theoretischen Logik“ begangen.

Im Ergebnis entstand ein Band, der eine Reflexion über die klassische Logik, eine Diskussion ihrer Grundlagen und Geschichte, ihrer vielfältigen Anwendungen, Erweiterungen und Alternativen enthält.

Der Band enthalt Beiträge von Andréka, Avron, Ben-Yami, Brünnler, Englebretsen, Ewald, Guglielmi, Hajek, Hintikka, Hodges, Kracht, Lanzet, Madarasz, Nemeti, Odintsov, Robinson, Rossberg, Thielscher, Toke, Wansing, Willard, Wolenski

Pavel Materna

Conceptual Systems

ISBN: 978-3-8325-0636-0 Preis: 34,- €

We all frequently use the word “concept”. Yet do we know what we mean using this word in sundry contexts? Can we say, for example, that there can be several concepts of an object? Or: can we state that some concepts develop? What relation connects concepts with expressions of a natural language? What is the meaning of an expression? Is Quine’s ‘stimulus meaning’ the only possibility of defining meaning? The author of the present publication (and of “Concepts and Objects”, 1998) offers some answers to these (and many other) questions from the viewpoint of transparent intensional logic founded by the late Czech logician Pavel Tichý (†1994 Dunedin).

Johannes Emrich

Die Logik des Unendlichen

Rechtfertigungsversuche des *tertium non datur* in der Theorie des mathematischen Kontinuums

ISBN: 978-3-8325-0747-3 Preis: 39,- €

Im Grundlagenstreit der Mathematik geht es um die Frage, ob gewisse in der modernen Mathematik gängige Beweismethoden zulässig sind oder nicht. Der Verlauf der Debatte – von den 1920er Jahren bis heute – zeigt, dass die Argumente auf verschiedenen Ebenen gelagert sind: die der meist konstruktivistisch eingestellten Kritiker sind erkenntnistheoretischer oder logischer Natur, die der Verteidiger ontologisch oder pragmatisch. Die Einschätzung liegt nahe, der Streit sei gar nicht beizulegen, es handele sich um grundlegend unterschiedliche Auffassungen von Mathematik. Angesichts der immer wieder auftretenden Erfahrung ihrer Unverträglichkeit wäre es aber praktisch wie philosophisch unbefriedigend, schlicht zur Toleranz aufzurufen. Streiten heißt nach Einigung streben. In der Philosophie manifestiert sich dieses Streben in der Überzeugung einer objektiven Einheit oder Einheitlichkeit, insbesondere geistiger Sphären. Im Sinne dieser Überzeugung unternimmt die vorliegende Arbeit einen Vermittlungsversuch, der sich auf den logischen Kern der Debatte konzentriert.

Christopher von Bülow

Beweisbarkeitslogik

– Gödel, Rosser, Solovay –

ISBN: 978-3-8325-1295-8 Preis: 29,- €

Kurt Gödel erschütterte 1931 die mathematische Welt mit seinem Unvollständigkeitssatz. Gödel zeigte, wie für jedes noch so starke formale System der Arithmetik ein Satz konstruiert werden kann, der besagt: „Ich bin nicht beweisbar.“ Würde das System diesen Satz beweisen, so würde es sich damit selbst Lügen strafen. Also ist dies ein wahrer Satz, den es nicht beweisen kann: Es ist unvollständig. John Barkley Rosser verstärkte später Gödels Ergebnisse, wobei er die Reihenfolge miteinbezog, in der Sätze bewiesen werden, gegeben irgendeine Auffassung von „Beweis“. In der Beweisbarkeitslogik werden die formalen Eigenschaften der Begriffe „beweisbar“ und „wird früher bewiesen als“ mit modallogischen Mitteln untersucht: Man liest den notwendig - Operator als beweisbar und gibt formale Systeme an, die die Modallogik der Beweisbarkeit erfassen.

Diese Arbeit richtet sich sowohl an Logik-Experten wie an durchschnittlich vorgebildete Leser. Ihr Ziel ist es, in die Beweisbarkeitslogik einzuführen und deren wesentliche Resultate, insbesondere die Solovayschen Vollständigkeitssätze, präzise, aber leicht zugänglich zu präsentieren.

Niko Strobach

Alternativen in der Raumzeit

Eine Studie zur philosophischen Anwendung multidimensionaler Aussagenlogiken

ISBN: 978-3-8325-1400-6 Preis: 46.50 €

Ist der Indeterminismus mit der Relativitätstheorie und ihrer Konzeption der Gegenwart vereinbar? Diese Frage lässt sich beantworten, indem man die für das alte Problem der futura contingentia entwickelten Ansätze auf Aussagen über das Raumartige überträgt. Die dazu hier Schritt für Schritt aufgebaute relativistische indeterministische Raumzeitlogik ist eine erste philosophische Anwendung der multidimensionalen Modallogiken.

Neben den üblichen Zeitoperatoren kommen dabei die Operatoren „überall“ und „irgendwo“ sowie „für jedes Bezugssystem“ und „für manches Bezugssystem“ zum Einsatz. Der aus der kombinierten Zeit- und Modallogik bekannte Operator für die historische Notwendigkeit wird in drei verschiedene Operatoren („wissbar“, „feststehend“, „beeinflussbar“) ausdifferenziert. Sie unterscheiden sich bezüglich des Gebiets, in dem mögliche Raumzeiten inhaltlich koinzidieren müssen, um als Alternativen zueinander gelten zu können. Die Interaktion zwischen den verschiedenen Operatoren wird umfassend untersucht.

Die Ergebnisse erlauben es erstmals, die Standpunkt-gebundene Notwendigkeit konsequent auf Raumzeitpunkte zu relativieren. Dies lässt auf einen metaphysisch bedeutsamen Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit aufmerksam werden. Dieses Buch ergänzt das viel diskutierte Paradigma der verzweigten Raumzeit („branching spacetime“) um eine neue These: Der Raum ist eine Erzählform der Entscheidungen der Natur.

Erich Herrmann Rast

Reference and Indexicality

ISBN: 978-3-8325-1724-3 Preis: 43.00 €

Reference and indexicality are two central topics in the Philosophy of Language that are closely tied together. In the first part of this book, a description theory of reference is developed and contrasted with the prevailing direct reference view with the goal of laying out their advantages and disadvantages. The author defends his version of indirect reference against well-known objections raised by Kripke in Naming and Necessity and his successors, and also addresses linguistic aspects like compositionality. In the second part, a detailed survey on indexical expressions is given based on a variety of typological data. Topics addressed are, among others: Kaplan's logic of demonstratives, conversational versus utterance context, context-shifting indexicals, the deictic center, token-reflexivity, vagueness of spatial and temporal indexicals, reference rules, and the epistemic and cognitive role of indexicals. From a descriptivist perspective on reference, various examples of simple and complex indexicals are analyzed in first-order predicate logic with reified contexts. A critical discussion of essential indexicality, de se readings of attitudes and accompanying puzzles rounds up the investigation.

Magdalena Roguska

Exklamation und Negation

ISBN: 978-3-8325-1917-9 Preis: 39.00 €

Im Deutschen, aber auch in vielen anderen Sprachen gibt es umstrittene Negationsausdrücke, die keine negierende Kraft haben, wenn sie in bestimmten Satztypen vorkommen. Für das Deutsche handelt sich u.a. um die exklamativ interpretierten Sätze vom Typ:

Was macht sie nicht alles! Was der nicht schafft!

Die Arbeit fokussiert sich auf solchen Exklamationen. Ihre wichtigsten Thesen lauten:

- Es gibt keine Exklamativsätze aber es gibt Exklamationen.
- *Alles* und *nicht alles* in solchen Sätzen, haben semantische und nicht pragmatische Funktionen.
- Das „nicht-negierende“ *nicht* ohne *alles* in einer Exklamation ist doch eine Negation. Die Exklamation bezieht sich aber trotzdem auf denselben Wert, wie die entsprechende Exklamation ohne Negation.
- In skalaren Exklamationen besteht der Unterschied zwischen Standard- und „nicht-negierenden“ Negation im Skopus von *nicht.*

Die Analyse erfolgt auf der Schnittstelle zwischen Semantik und Pragmatik.

August W. Sladek

Aus Sand bauen. Tropentheorie auf schmaler relationaler Basis

Ontologische, epistemologische, darstellungstechnische Möglichkeiten und Grenzen der Tropenanalyse

ISBN: 978-3-8325-2506-4 (4 Bände) Preis: 198.00 €

Warum braucht eine Tropentheorie zweieinhalbtausend Seiten Text, wenn zweieinhalb Seiten ausreichen, um ihre Grundidee vorzustellen? Weil der Verfasser zuerst sich und dann seine Leser, auf deren Geduld er baut, überzeugen will, dass die ontologische Grundidee von Tropen als den Bausteinen der Welt wirklich trägt und sich mit ihnen die Gegenstände nachbilden lassen, die der eine oder andere glaubt haben zu müssen. Um metaphysischen, epistemologischen Dilemmata zu entgehen, sie wenigstens einigermaßen zu meistern, preisen viele Philosophen Tropen als „Patentbausteine“ an. Die vorliegende Arbeit will Tropen weniger empfehlen als zeigen, wie sie sich anwenden lassen. Dies ist weit mühseliger als sich mit Andeutungen zu begnügen, wie brauchbar sich doch Tropen erweisen werden, machte man sich die Mühe sie einzusetzen. Lohnt sich die Mühe wirklich? Der Verfasser wollte zunächst nachweisen, dass sie sich nicht lohnt. Das Gegenteil ist ihm gelungen. Zwar sind Tropen wie Sandkörner. Was lässt sich schon aus Sand bauen, das Bestand hat? Wenn man nur genug „Zement“ nimmt, gelingen gewiss stabile Bauten, doch wie viel und welcher „Zement“ ist erlaubt? Nur schwache Bindemittel dürfen es sein; sonst gibt man sich mit einer hybriden Tropenontologie zufrieden, die Bausteine aus fremden, konkurrierenden Ontologien hinzunimmt. Die vier Bände bieten eine schwächstmögliche und damit unvermischte, allerdings mit Varianten und Alternativen behaftete Tropentheorie an samt ihren Wegen, Nebenwegen, Anwendungstests.

Mireille Staschok

Existenz und die Folgen

Logische Konzeptionen von Quantifikation und Prädikation

ISBN: 978-3-8325-2191-2 Preis: 39.00 €

Existenz hat einen eigenwilligen Sonderstatus in der Philosophie und der modernen Logik. Dieser Sonderstatus erscheint in der klassischen Prädikatenlogik – übereinstimmend mit Kants Diktum, dass Existenz kein Prädikat sei – darin, dass „Existenz“ nicht als Prädikat erster Stufe, sondern als Quantor behandelt wird. In der natürlichen Sprache wird „existieren“ dagegen prädikativ verwendet.

Diese andauernde und philosophisch fruchtbare Diskrepanz von Existenz bietet einen guten Zugang, um die Funktionsweisen von Prädikation und Quantifikation zu beleuchten. Ausgangspunkt der Untersuchungen und Bezugssystem aller Vergleiche ist die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Als Alternativen zur klassischen Prädikatenlogik werden logische Systeme, die sich an den Ansichten Meinongs orientieren, logische Systeme, die in der Tradition der aristotelischen Termlogik stehen und eine nichttraditionelle Prädikationstheorie untersucht.

Sebastian Bab, Klaus Robering (Eds.)

Judgements and Propositions

Logical, Linguistic, and Cognitive Issues

ISBN: 978-3-8325-2370-1 Preis: 39.00 €

Frege and Russell in their logico-semantic theories distinguished between a proposition, the judgement that it is true, and the assertion of this judgement. Their distinction, however, fell into oblivion in the course of later developments and was replaced by the formalistic notion of an expression derivable by means of pureley syntactical rules of inference. Recently, however, Frege and Russell's original distinction has received renewed interest due to the work of logicians and philosophers such as, for example, Michael Dummett, Per Martin-Lf, and Dag Prawitz, who have pointed to the central importance of o both the act of assertion and its justification to logic itself as well as to an adequate theory of meaning and understanding.

The contributions to the present volume deal with central issues raised by these authors and their classical predecessors: What kind of propositions are there and how do they relate to truth? How are propositions grasped by human subjects? And how do these subjects judge those propositions according to various dimensions (such as that of truth and falsehood)? How are those judgements encoded into natural language, communicated to other subjects, and decoded by them? What does it mean to procede by inference from premiss assertions to a new judgement?

Marius Thomann

Die Logik des Könnens

ISBN: 978-3-8325-2672-6 Preis: 41.50 €

Was bedeutet es, einer Person eine praktische Fähigkeit zu attestieren? Und unter welchen Umständen sind derartige Fähigkeitszuschreibungen wahr, etwa die Behauptung, Max könne Gitarre spielen? Diese Fragen stehen im Zentrum der vorliegenden Untersuchung. Ihr Gegenstand ist die philosophisch-logische Analyse des Fähigkeitsbegriffs. Als Leitfaden dient eine Analyse normalsprachlicher Fähigkeitszuschreibungen, gemäß der Max genau dann Gitarre spielen kann, wenn er dies unter dafür angemessenen Bedingungen normalerweise erfolgreich tut. Drei in der Forschungsliteratur vorgeschlagene Systeme werden diskutiert, die zwar wertvolle Impulse für die formale Modellierung geben, als Vertreter des so genannten modalen Ansatzes aber von der Diagnose ontologischer Inadäquatheit betroffen sind: Die Entitäten, die als Fähigkeiten attribuiert werden, lassen sich nicht über Propositionen individuieren; ohne die explizite Referenz auf Handlungstypen, die eben gekonnt oder nicht gekonnt werden, bleibt Max' Fähigkeit, Gitarre zu spielen, unterbestimmt. Um diesen Einwand zu vermeiden, liegt demgemäß der hier vorgestellten Logik des Könnens ein Gegenstandsbereich zugrunde, dessen Struktur an der Ontologie von Handlungen orientiert ist.

Christof Dobieß

Kausale Relata

Eine Untersuchung zur Wechselbeziehung zwischen der Beschaffenheit kausaler Relata und der Natur der Kausalbeziehung

ISBN: 978-3-8325-5083-7 Preis: 57.00 €

Dieses Buch macht nachdrücklich klar, daß die Thematik „Kausale Relata“ kein Nebenschauplatz der Kausalitätsdiskussion ist und sich die Analyse von Kausalität nicht auf die bloße Betrachtung der Kausalrelation selbst beschränken darf. Zwischen der Metaphysik der kausalen Relata und der Natur der Kausalbeziehung, so die Hauptthese dieses Werks, besteht eine enge theoretische Wechselbeziehung.

Untersucht wird diese These anhand zentraler kausaler Problembereiche: (1) der kausalen Präemption, (2) der Transitivität der Kausalität, (3) der dispositionalen Verursachung, (4) der negativen Verursachung und (5) der Konzeption von Verursachung als „qualitativem Fortbestand“ („qualitative persistence“).

Während die Probleme der Präemption und des qualitativen Fortbestands in der Auseinandersetzung zwischen kontrafaktischen Kausalkonzeptionen und Transfertheorien Bedeutung entfalten, betreffen die Transitivität der Kausalität sowie negative und dispositionale Verursachung nahezu alle Kausaltheorien. Der Forderung nach der Transitivität der Kausalität kann nur durch eine hinreichend präzise und eindeutig gefaßte Konzeption der kausalen Beziehungsträger entsprochen werden. Ob Dispositionen oder Negativereignisse in kausale Beziehungen treten können, hängt entscheidend davon ab, inwiefern Entitäten dieser Art ein ontologisches Bleiberecht zugestanden wird.

Logische Philosophie

Hrsg.: H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko und M. Urchs

In der Reihe „Logische Philosophie“ werden philosophisch relevante Ergebnisse der Logik vorgestellt. Dazu gehören insbesondere Arbeiten, in denen philosophische Probleme mit logischen Methoden gelöst werden.

Ist der Indeterminismus mit der Relativitätstheorie und ihrer Konzeption der Gegenwart vereinbar? Diese Frage lässt sich beantworten, indem man die für das alte Problem der futura contingentia entwickelten Ansätze auf Aussagen über das Raumartige überträgt. Die dazu hier Schritt für Schritt aufgebaute relativistische indeterministische Raumzeitlogik ist eine erste philosophische Anwendung der multidimensionalen Modallogiken. Die Ergebnisse erlauben es erstmals, die Standpunkt-gebundene Notwendigkeit konsequent auf Raumzeitpunkte zu relativieren. Dies lässt auf einen metaphysisch bedeutsamen Unterschied zwischen deiktischer und narrativer Determiniertheit aufmerksam werden. Dieses Buch ergänzt das viel diskutierte Paradigma der verzweigten Raumzeit („branching spacetime“) um eine neue These: Der Raum ist eine Erzählform der Entscheidungen der Natur.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978–3–8325–1400–6