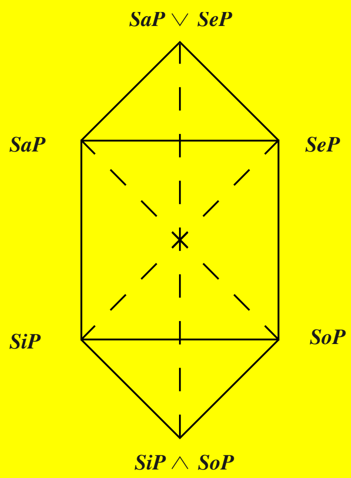
Logische Philosophie

Fabian Neuhaus

Naive Prädikatenlogik

Eine logische Theorie der Prädikation



λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/0556

Fabian Neuhaus

Naive Prädikatenlogik

Eine logische Theorie der Prädikation

Logische Philosophie
Herausgeber:
H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko, M. Urchs

λογος

Herausgeber der Reihe Logische Philosophie

Horst Wessel

Unter den Linden 61
D-14621 Schönwalde
Deutschland

WesselH@philosophie.hu-berlin.de

Uwe Scheffler

Institut für Philosophie
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
Deutschland

SchefflerU@philosophie.hu-berlin.de

Yaroslav Shramko

Lehrstuhl für Philosophie
Staatliche Pädagogische Universität
UA-324086 Kryvyj Rih
Ukraine

kff@kpi.dp.ua

Max Urchs

Fachbereich Philosophie
Universität Konstanz
D-78457 Konstanz
Deutschland

max.urchs@uni-konstanz.de

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Dissertationsort:
Humboldt-Universität zu Berlin, Philosophische Fakultät I
Tag der Promotion: 6.6.2002
Gutachter: Horst Wessel, Uwe Scheffler, Heinrich Wansing
Dekan: Oswald Schwemmer

ISSN 1435-3415
ISBN 3-8325-0556-3

Logos Verlag Berlin
Gubener Str. 47, 10243 Berlin, Tel.: +49 030 42 85 10 90
INTERNET: http://www.logos-verlag.de

Fabian Neuhaus

Naive Prädikatenlogik

Eine logische Theorie der Prädikation

— Welche logischen Regeln gelten für unser Reden über Eigenschaften?

Es ist wünschenswert, auf diese Frage eine befriedigende Antwort zu haben. Denn immerhin wird in vielen Argumentationen – seien es philosophische oder ganz alltägliche – über Eigenschaften gesprochen, und die Logik sollte in der Lage sein, die entsprechenden Argumente auf ihre Korrektheit hin zu überprüfen. Wenn man allerdings versucht, die Eingangsfrage angemessen zu beantworten, stößt man rasch auf ein enormes Hindernis: Logische Prinzipien, die evident und – für sich alleine betrachtet – völlig harmlos erscheinen, führen gemeinsam zum Russell-Paradox. Das Russell-Paradox der Prädikation ergibt sich, indem „Russell-Eigenschaft“ so definiert wird, daß eine Eigenschaft X genau dann die Russell-Eigenschaft hat, wenn die Eigenschaft X nicht die Eigenschaft X hat. Aus der Frage, ob die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft habe, ergibt sich das Paradox, weil sowohl eine bejahende als auch eine verneinende Antwort zu einem Widerspruch führen.

Dieses Paradox erwies sich genauso wie das mit ihm verwandte Grelling-Paradox als sehr hartnäckig. Auf die mit den Paradoxien verbundenen Schwierigkeiten wird von den meisten Logikern mit einer der beiden folgenden Strategien reagiert: Viele Logiker konzentrieren sich auf logische Systeme, in denen das Reden über Eigenschaften nicht logisch analysiert werden kann. Für sie hat das den Vorteil, daß sie die Probleme, die Eigenschaften betreffen, aus ihrer Arbeit ausgeklammert haben. Allerdings kommt man auf diese Weise selbstverständlich nicht zu einer Antwort auf die Eingangsfrage. Diejenigen Logiker, die sich mit den logischen Regeln für das Reden über Eigenschaften beschäftigen, vermeiden Schwierigkeiten mit dem Russell-Paradox in der Regel, indem sie die von ihnen verwendeten formalen Sprachen einschränken. Ein bekannter Ansatz besteht beispielsweise darin, die Prädikatenzeichen zu hierarchisieren und festzulegen, daß in einer wohlgeformten, atomaren Formel $F(k_1, k_2, ..., k_n)$ die Argumente $k_1, k_2, ..., k_n$ von niedrigerer Stufe als das Prädikat F sind. Auf diese Weise sind unter anderem reflexive Prädikationen, das heißt Formeln der Form F(F), nicht wohlgeformt. Um solche Sätze in einer Prädikatenlogik höherer Stufe zu repräsentieren, ist es natürlich möglich, Prädikat und Argument als Konstanten verschiedener Stufen aufzufassen, beispielsweise das Argument als Konstante erster Stufe und das Prädikat als Konstante zweiter Stufe. Aber dieser Ansatz setzt eine Mehrdeutigkeit in der natürlichen Sprache voraus, was im Falle eines definierten Ausdrucks wie „Russell-Eigenschaft" schwer zu rechtfertigen ist. Außerdem führt er nicht zu der intendierten Lesart, denn die Frage, ob die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat, würde ihren ganzen Witz verlieren, wenn wir unterstellen würden, daß „Russell-Eigenschaft" mehrdeutig ist.

Da eine Aussage in einem logischen System nicht untersucht werden kann, wenn ihre angemessene formale Repräsentation ausgeschlossen wird, läßt sich „Die Russell-Eigenschaft hat die Russell-Eigenschaft" nicht in Prädikatenlogiken höherer Stufe oder anderen logischen Systemen untersuchen, in denen reflexive Prädikationen als syntaktische Mißgebilde zurückgewiesen werden. In solchen Systemen werden Paradoxien also letztlich dadurch vermieden, daß die Werkzeuge verworfen werden, die die logische Analyse paradoxiegefährdeter Aussagen erst ermöglichen würden. Ansätze, die auf der Beschneidung der verwendeten logischen Sprache beruhen, lösen das Russell-Paradox in Vogel-Strauß-Manier, ihr Motto lautet: „Sogenannte Paradoxien sind in meinem logischen System nicht formulierbar, also gibt es keine Paradoxien."

Ein anderer, mindestens ebenso wichtiger Einwand gegen den Ansatz, dem Russell-Paradox durch Einschränkung der logischen Sprache zu begegnen, ist die Tatsache, daß dadurch nicht nur Aussagen über die Russell-Eigenschaft betroffen sind. Wenn beispielsweise in einer logischen Sprache die Formel F(F) nicht wohlgeformt ist, dann lassen sich in ihr alle Sätze der natürlichen Sprachen nicht repräsentieren, in denen eine Eigenschaft sich selbst zugesprochen wird – wie beispielsweise „Die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein, hat die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein“. Die Frage nach den logischen Regeln unseres Redens über Eigenschaften läßt sich aber wohl kaum angemessen mit einem logischen System beantworten, wenn die zugrunde gelegte logische Sprache nur Teile unseres Redens über Eigenschaften repräsentieren kann.

Um eine sinnvolle Antwort auf die Eingangsfrage geben zu können, bedarf es eines logischen Systems, in dem sich nicht nur kleine Teile, sondern möglichst viele relevante Aspekte des Redens über Eigenschaften repräsentieren lassen. Daher ist es notwendig, sich anhand von Beispielen die relevanten linguistischen Daten zu vergegenwärtigen, bevor man mit dem Aufbau eines solchen formalen Systems beginnt. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit in einem umfangreichen Kapitel, um im Anschluß daran auf dieser Grundlage ein logisches System – die Naive Prädikatenlogik – zu entwickeln, das es erlaubt, das Reden über Eigenschaften angemessen logisch zu analysieren. Die Naive Prädikatenlogik wird in Orientierung an der Art und Weise, wie wir über Eigenschaften reden, aufgebaut, und deshalb wird auf künstliche Einschränkungen der logischen Syntax verzichtet. Dennoch – und dieses Ergebnis ist sehr überraschend – ist die Naive Prädikatenlogik widerspruchsfrei. Darüber hinaus lassen sich die Kompaktheit, die Korrektheit und die Vollständigkeit der Naiven Prädikatenlogik beweisen. Diese Resultate sind erstaunlich, weil man üblicherweise davon ausgeht, daß aufgrund des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes logische Systeme, in denen über Eigenschaften prädiziert und quantifiziert werden kann, unvollständig sind. Neben den erstrebenswerten metalogischen Eigenschaften wird auch die philosophische

Fruchtbarkeit der Naiven Prädikatenlogik demonstriert, indem das Russell-Paradox und das Grelling-Paradox gelöst werden.

Diese Arbeit wäre in dieser Form nie entstanden, wenn ich nicht 1996 so herzlich von einem Kreis von Logikern am Institut für Philosophie der Humboldt-Universität zu Berlin aufgenommen worden wäre. Für die freundliche und fruchtbare Arbeitsatmosphäre in den darauffolgenden Jahren danke ich insbesondere Henning Franzen, Lars Mecklenburg, Yaroslav Shramko, Mireille Staschok, Sylvia Strauß und Marco Winkler.

Besonders hervorheben möchte ich die drei Personen, die Haupt, Herz und Seele des Logikerkreises waren: Bei Bente Christiansen möchte ich mich nicht nur deswegen bedanken, weil sie mich während der Entstehung dieser Arbeit in vielfältiger Weise und mit großen Engagement unterstützt hat, sondern weil sie wesentlichen Anteil daran hatte, die Gruppe über die Lehrveranstaltungen hinaus zusammenzuhalten. Uwe Scheffler und Horst Wessel haben mich stets gefördert und gefordert – jeder seinem Naturell entsprechend. In ihrer Schule wurde gelehrt, seinen eigenen Verstand zu gebrauchen, pointierte Kritik zu formulieren und mit ihr umzugehen. Wer Philosophieinstitute kennt, weiß, dass das alles andere als selbstverständlich ist. Ich hätte mir keine besseren Lehrer wünschen können.

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

„Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken geräth."

Gottlob Frege

Brief an Russell vom 22.06.1902

Obwohl das Reden über Eigenschaften in unserem Alltag genauso selbstverständlich ist wie das Reden über Gegenstände, beschränken sich viele Logiker und Philosophen auf die Verwendung von formalen Mitteln, die nicht zur Repräsentation von Sätzen geeignet sind, in denen über Eigenschaften prädiziert oder quantifiziert wird. Zumindest bei denjenigen Logikern und Philosophen, die die Analyse und Evaluierung von (philosophischen) Argumenten als eine der wichtigen Aufgaben der Logik verstehen, ist diese Zurückhaltung auf den ersten Blick seltsam, denn immerhin äußern Menschen in ihren Argumentationen Sätze wie I(1)-I(3).

I(1) Das System ist nicht widerspruchsfrei, und Widerspruchsfreiheit ist sehr wichtig.

I(2) Carnaps und Heideggers sprachphilosophische Positionen haben nichts gemeinsam.

I(3) Die Eigenschaft, ontologisch suspekt zu sein, hat die Eigenschaft, ontologisch suspekt zu sein.

Die etwas stiefmütterliche Behandlung solcher Aussagen erscheint um so verwunderlicher, wenn man bedenkt, daß in vielen der von den Begründern der mathematischen Logik verwendeten Systemen die Sätze I(1) und I(2) problemlos repräsentiert werden können. Die Entwicklung, die dazu geführt hat, daß sich die Prädikatenlogik erster Stufe als Standardlogik etabliert hat und daß viele alternative Logiken ebenfalls Prädikation und Quantifikation über Eigenschaften nicht erlauben, wurde von einem Ereignis in den Anfängen der modernen Logik geprägt: Russell zeigte 1903 mit dem nach ihm benannten Paradox, daß die naive Mengenlehre inkonsistent ist, und löste so die Grundlagenkrise der Mathematik aus.

Daß es in Cantors Mengenlehre Paradoxien gab, war einigen Mathematikern bereits vor der Veröffentlichung des Russell-Paradoxes durch Frege[1] und Russell[2] im Jahre 1903 bekannt gewesen, unter anderem waren Cantor, Burali-Forti und Hilbert auf dem Russell-Paradox ähnliche Antinomien gestoßen. Der Widerspruch, der sich aus der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, ergibt, wurde unabhängig voneinander durch Russell und Zermelo entdeckt. Ob Russell oder Zermelo dieses Paradox zuerst gefunden hat, läßt sich nicht sicher feststellen. Die ältesten schriftlichen Belege sind Russells Brief an Frege vom 16.06.1902[3] und eine Gesprächsnotiz von Husserl, dem Zermelo zwei Monate vorher das Paradox erklärt hatte.[4] Nach eigener Auskunft hatte Russell das Paradox im Juni 1901 – und zwar unabhängig von seiner Auseinandersetzung mit dem ersten Band der *Grundgesetze* – bemerkt.[5] Zermelo dagegen scheint es spätestens 1900 entdeckt zu haben.[6] Das geht aus der Reaktion von Hilbert auf das Erscheinen des zweiten Bandes der *Grundgesetze* hervor, der in seinem Brief vom 7.11.1903 an Frege in einer Fußnote anmerkt:

---

[1] Siehe Frege (1962), Nachwort zum zweiten Band, S. 253ff.
[2] Siehe Russell (1951), S. 97f, Kapitel 10 und Anhang B.
[3] Russell (1976a).
[4] Husserl (1979), S. 399.
[5] Russell (1976b), S. 216, und Russell (1971a), S. 13.
[6] Zermelo erwähnt 1908 in einer Fußnote, daß er das Russell-Paradox unabhängig von Russell gefunden und schon vor 1903 unter anderem Hilbert mitgeteilt hat. Aber er scheint sich nicht dazu geäußert zu haben, wann genau er das Paradox entdeckt hat. Vgl. Zermelo (1908), S. 118f, Fußnote **.

> „Ich glaube vor 3-4 Jahren fand es [das in dem Nachwort des zweiten Bands der *Grundgesetze* veröffentliche Paradox, F.N.] Dr. Zermelo auf die Mitteilung eines meiner Beispiele [für widerspruchsvolle Mengen, F.N.] hin.“[7]

Auch wenn Zermelo das Paradox zuerst gefunden haben sollte, so gebührt Russell die Ehre, die Tragweite der mengentheoretischen Paradoxien und die mit ihnen verbundenen Schwierigkeiten für die Logik und die Mathematik erkannt zu haben. Denn noch in dem eben zitierten Brief an Frege vertritt Hilbert die Meinung, daß die mengentheoretischen Paradoxien durch eine Präzisierung der Begriffsbildung im Rahmen seines axiomatischen Programms ausgeschaltet werden können.[8] Freges Verdienst ist es, einen logischen Apparat entwickelt zu haben, durch den das Ausmaß der Probleme der naiven Mengenlehre transparent wurde.

Das sogenannte „Russell-Paradox“ besteht genaugenommen aus zwei miteinander verwandten Paradoxien: Das Russell-Paradox der Elementrelation ergibt sich aus der Betrachtung der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Das Russell-Paradox der Prädikation wird herbeigeführt, indem man die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein, die sich selbst nicht zukommt, betrachtet.[9] Daß es sich um verschiedene Paradoxien handelt, sieht man unter anderem daran, daß – wie Frege in seiner Antwort an Russell anmerkt – zwar das Paradox der Elementrelation, aber nicht das

---

[7] Hilbert (1976), S. 80.

[8] Hilbert schreibt: „[…] andere noch überzeugendere Widersprüche fand ich bereits vor 4-5 Jahren; sie führten mich zu der Überzeugung, dass die traditionelle Logik unzureichend ist, die Lehre von der Begriffsbildung vielmehr einer Verschärfung und Verfeinerung bedarf, wobei ich als die wesentlichste Lücke im herköm[m]lichen Aufbau der Logik die Annahme ansehe, wonach – das nehmen alle Logiker u. Mathem[atiker] bisher an – ein Begriff bereits da sei, wenn man von jedem Gegenstande angeben könne, ob er unter ihn falle oder nicht. Dies ist wie mir scheint nicht hinreichend. Vielmehr ist die Erkenntnis der Widerspruchslosigkeit der Axiome, die den Begriff definieren, das Entscheidende.“ Siehe Hilbert (1976), S. 80.

[9] Russell verwendet „Prädikat“ anstatt „Eigenschaft“. Vgl. Russell (1976a).

Paradox der Prädikation in dem System der *Grundgesetze* formulierbar ist.[10] Eine weitere Spielart desselben Grundgedankens – „Grellings Paradox“ beziehungsweise das „Heterologisch-Paradox“ – wurde 1907 von Grelling bei seiner Auseinandersetzung mit Russells Schriften entdeckt und betrifft Adjektive, die nicht die Eigenschaft haben, die sie ausdrücken.[11]

Die Ursache für die Paradoxien sah Russell darin, daß Totalitäten betrachtet werden, die Elemente enthalten, die unter Verwendung der Totalität definiert werden.[12] Um solche imprädikativen Totalitäten auszuschließen, benutzte Russell in seiner verzweigten Typentheorie eine doppelte Hierarchie, nämlich Typen und Schichten. Freges logizistisches Programm wurde von ihm weitergeführt, indem Sätze über Mengen als Sätze über Aussagefunktionen aufgefaßt wurden. Dadurch, daß Russell die Elementrelation über die Prädikation einführen wollte, wurden die beiden Versionen des Russell-Paradoxes miteinander verknüpft. Es zeigte sich jedoch, daß sich mit der verzweigten Typentheorie nur ein Teil der Mathematik logizistisch begründen ließ, weil in der Mathematik an wichtigen Stellen imprädikative Begriffsbildungen verwendet werden, die (wenigstens nach bisherigen Erkenntnissen) nicht zu Paradoxien führen. Als Ausweg schlug Russell das Reduzibilitätsaxiom vor, das garantiert, daß es zu jeder Eigenschaft der höheren Schichten eine extensionsgleiche Eigenschaft der niedrigsten Schicht gibt.

Die verzweigte Typentheorie, insbesondere das Reduzibilitätsaxiom, wurde 1925 von Ramsey vehement kritisiert:

---

[10] Vgl. Frege (1976), S. 213f.
[11] Zuerst wurde es in Grelling und Nelson (1908) publiziert (Seite 307f). Die Genese des Grelling-Paradoxes wurde von Peckhaus (1995) aufgearbeitet.
[12] Vgl. Russell (1971b), S. 155 und S. 163.

> „Es gibt keinen Grund, dieses Axiom für wahr zu halten; und wenn es wahr wäre, wäre dies ein glücklicher Zufall und keine logische Notwendigkeit [...] Ein solches Axiom gehört nicht in die Mathematik und alles, was nicht ohne seine Heranziehung bewiesen werden kann, kann überhaupt nicht als bewiesen angesehen werden.“[13]

Ramsey teilte die Paradoxien in zwei verschiedene Gruppen ein, für die sich die Namen „semantische Paradoxien“ und „mengentheoretische Paradoxien“ in der Literatur durchgesetzt haben.[14] Die semantischen Paradoxien wurden von Ramsey im Unterschied zu den mengentheoretischen Paradoxien dadurch charakterisiert, daß sie nicht alleine in einem logisch-mathematischen System ableitbar sind, sondern Bezüge auf die Sprache oder das Denken enthalten. (Gemäß dieser Terminologie sind die beiden Versionen des Russell-Paradoxes mengentheoretische Paradoxien, das Grelling-Paradox, das Ramsey fälschlicherweise Weyl zuschrieb, ist eine semantische Paradoxie.) Aufgrund der extensionalen Natur mathematischer Eigenschaften führt das Reduzibilitätsaxiom dazu, daß eine Eigenschaft einer höheren Schicht identisch mit der entsprechenden extensionsgleichen Eigenschaft der niedrigsten ist. Aus diesem Grund nivelliert das Reduzibilitätsaxiom den Effekt der Schichtenhierarchie für mathematische Eigenschaften, und folglich spielt die Schichtenhierarchie für mengentheoretische Paradoxien keine Rolle. Da die einzige Funktion der Schichtenhierarchie darin liegt, diejenigen Paradoxien auszuschalten, die nicht-extensionale Begriffe (wie „Bedeutung“ oder „Wahrheit“) verwenden, schlug Ramsey vor, die semantischen Paradoxien als epistemische Probleme aufzufassen, die Schichtenhierarchie abzuschaffen und sich auf diese Weise

[13] Ramsey (1980), S. 151.
[14] Ramsey (1980), S. 145. Siehe auch Haack (1978), S. 138.

dem Reduzibilitätsaxiom zu entledigen. Das entstehende System ist die einfache Typentheorie.[15]

Während in der verzweigten Typentheorie imprädikative Begriffsbildungen und auf diese Weise das Russell-Paradox der Prädikation, das Russell-Paradox der Elementrelation und das Grelling-Paradox ausgeschlossen werden, werden die drei Paradoxien in der einfachen Typentheorie nicht einheitlich behandelt, da die Grellingsche Paradoxie zu den semantischen Paradoxien zählt. Russells Verknüpfung der beiden Versionen des nach ihm benannten Paradoxes wurde dagegen von Ramsey übernommen, da Ramsey in seiner logizistischen Zielsetzung mit Russell übereinstimmte.

Während sich der Übergang von der verzweigten Typentheorie zur einfachen Typentheorie an Ramseys einflußreichen Aufsatz von 1925 festmachen läßt, gibt es keinen einzelnen Faktor (oder gar ein zwingendes Argument), der dazu geführt hat, daß sich die Prädikatenlogik erster Stufe als Standardlogik durchgesetzt hat.[16] Dennoch hat sich die Prädikatenlogik erster Stufe mittlerweile so stark als ‚die Logik' etabliert, daß der Typentheorie sogar manchmal abgesprochen wird, überhaupt zur Logik zu gehören.[17] Zum ersten Mal wurde die Prädikatenlogik erster Stufe 1928 in *Grundzüge der Logik* von Hilbert und Ackermann als eigenständiges System dargestellt.[18] Eine wichtige Rolle bei der Verbreitung der Prädikatenlogik erster Stufe haben sicherlich ihre guten metalogischen Eigenschaften, insbesondere ihre Vollständigkeit, gespielt.[19] Für viele

---

[15] Wenn man Churchs Argumentation folgt, wurde die einfache Typentheorie bereits 1890 – also noch vor der Entdeckung der mengentheoretischen Paradoxien – von Schröder in dem ersten Band der *Algebra der Logik* antizipiert. Siehe Church (1976).
[16] Vgl. Eklund (1996). Anderer Meinung ist Shapiro, siehe Shapiro (1991).
[17] Vgl. Quine (1970), S. 66, und Concha Martínez-Vidal (2000).
[18] Vorweggenommen wurde dies offenbar von Hilbert in einem Kurs im Wintersemester 1917/18. Siehe Eklund (1996), S. 147.
[19] Die Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe bewies Gödel 1930 in seiner Dissertation. Siehe Gödel (1971).

philosophische Logiker war die Prädikatenlogik erster Stufe attraktiver, weil sie finitistische oder nominalistische Bedenken gegenüber den Objekten hatten, über die in der einfachen Typentheorie quantifiziert wird. Und für die meisten Mathematiker verlor die einfache Typentheorie deswegen an Attraktivität, weil mit der Axiomatisierung der Mengenlehre eine für sie befriedigende Lösung der Grundlagenprobleme der Mathematik gegeben wurde und einige dieser Axiomatisierungen in einer Prädikatenlogik erster Stufe formulierbar sind.

Wenn man die bisher dargestellte Entwicklung der Logik kurz zusammenfaßt, dann ergibt sich folgendes Bild: Russells Paradox der Elementrelation sprengte das System von Freges *Grundgesetze*. Um Freges Projekt zu retten, definierte Russell die Elementrelation über die Prädikation und schaltete die Paradoxien in der verzweigten Typentheorie über eine doppelte Hierarchie aus. Die Unterscheidung von Schichten wurde bei der Entwicklung der einfachen Typentheorie aufgegeben, die Einteilung der Prädikatenzeichen in Typen beim Übergang zur Prädikatenlogik erster Stufe. Allerdings blieb ein Rudiment der ursprünglichen Hierarchien in der Prädikatenlogik erster Stufe erhalten: In der Prädikatenlogik erster Stufe dürfen Prädikatenzeichen nicht die Argumentposition einnehmen.

Die Frage, wie die Logik von diesem letzten Relikt der Russellschen Verkomplizierung der logischen Sprache befreit werden kann, wird im Zentrum dieser Arbeit stehen. Da eine zufriedenstellende Antwort darüber Auskunft geben muß, wie Russells Paradox der Prädikation vermieden werden kann, handelt es sich bei einer solchen Antwort gleichzeitig um eine formale Theorie der Prädikation. Dieses Ziel soll erreicht werden, ohne die Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe zu verlassen. Es wird gezeigt werden, daß die der Prädikatenlogik erster Stufe implizit zugrunde liegende Prädikationstheorie bereits die Möglichkeit eröffnet, Prädikatenzeichen in Argumentpositionen zuzulassen, ohne daß es zu Paradoxien kommt.

Letztlich bedeutet dies: Wenn man die Ressourcen nur richtig nutzt, ist es möglich, im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe paradoxienfrei über Eigenschaften zu prädizieren und zu quantifizieren.[20] Das in dieser Arbeit vorgestellte logische System erlaubt solche Prädikationen und Quantifikationen, ohne daß eine Typenhierarchie oder vergleichbare Absicherungen gegen das Russell-Paradox eingeführt werden. Dieses System ist also in demselben Sinne ‚naiv' wie die naive Mengenlehre ‚naiv' ist (natürlich mit dem Unterschied, daß es widerspruchsfrei ist), deshalb nenne ich es „Naive Prädikatenlogik". Da die Naive Prädikatenlogik den Rahmen einer Prädikatenlogik erster Stufe nicht verläßt, sondern nur das vorhandene Potential richtig ausschöpft, dürfte die Naive Prädikatenlogik für jeden Logiker akzeptabel sein, der mit der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe arbeitet.[21]

Das Ziel, ein System zu formulieren, in dem Prädikatenzeichen auch Argumentpositionen einnehmen können, wurde bisher nur dadurch gerechtfertigt, daß das Verbot ein überflüssiges Relikt von Russells Typenhierarchie ist. Es stellt sich die Frage, ob es darüber hinaus inhaltliche Gründe dafür gibt, ein solches System zu entwickeln. Nun, was gute inhaltliche Gründe dafür sind, ein bestimmtes logisches System zu entwickeln, hängt offenbar von den Motiven ab, aus denen heraus man sich für Logik interessiert. Wer wie Frege und Russell versucht, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen, bewertet logische Systeme unter anderen Gesichtspunkten als jemand wie Castañeda, dessen erklärtes Ziel „the search

---

[20] Ein System, das die Quantifikation über Eigenschaften ermöglicht, scheint schon aus syntaktischen Gründen über die Prädikatenlogik erster Stufe hinauszugehen. Es wird später deutlich werden, weshalb dies nicht der Fall ist.

[21] Daß die Naive Prädikatenlogik keine Erweiterung, sondern eine ‚Entfaltung' der Prädikatenlogik erster Stufe ist und gleichzeitig eine Theorie der Prädikation darstellt, unterscheidet die Naive Prädikatenlogik von den Systemen, die von anderen Autoren (wie beispielsweise Bealer, Castañeda, Chierchia, Cocchiarella, Feferman, Turner oder Zalta) entwickelt wurden.

for the most and pervasive structural aspects of reality“[22] ist. Das dieser Arbeit zugrunde liegende Interesse an Logik bezieht sich auf Logik als die Wissenschaft, die sich mit der Analyse und der Evaluation von Argumenten, insbesondere von philosophischen Argumenten beschäftigt. (Um langatmige Formulierungen zu vermeiden, werde ich mich mit Ausdrücken wie „Logik“, „Logiker“ etc. im folgenden Text auf diese Zielsetzung beziehen.) Dieser Zugang zur Logik führt zu bestimmten Bewertungsmaßstäben und hat methodologische Konsequenzen. Da eine Analyse von Argumenten vorgenommen werden soll und diese Argumente in natürlichen Sprachen formuliert sind, wird eine Analysesprache benötigt, die hinreichend elaboriert ist, um alle für die Analyse von Argumenten wichtigen Aspekte der natürlichen Sprache zu repräsentieren. Welche Aspekte natürlicher Sprachen logisch relevant sind, läßt sich nur erkennen, indem möglichst viele Aussagen und Argumente in den natürlichen Sprachen untersucht werden. Die ausführliche Auswertung von linguistischen Daten stellt also den ersten Schritt dar, um eine angemessene logische Theorie aufzustellen. Dies ist eine der methodologischen Konsequenzen, zu denen der gewählte Ansatz führt.[23] Mit „Evaluierung von Argumenten“ ist gemeint, daß es Aufgabe der Logik ist, Methoden bereitzustellen, mit denen von einem gegebenen Argument entschieden werden kann, ob es logisch korrekt ist. Ein logisch korrektes Argument ist eine Abfolge von Aussagen, die so aufeinander bezogen sind, daß jeder rationale Gesprächspartner, wenn er den Prämissen des Arguments zustimmt, verpflichtet ist, den Konklusionen des Arguments zuzustimmen. Ob ein gegebenes Argument korrekt ist oder nicht, hängt dabei von den in dem Argument vorkommenden Aussagen beziehungsweise Wörtern ab. Daß es beispielsweise irrational ist, die

[22] Castañeda (1976), S. 45.

[23] Damit wird nicht behauptet, daß die Frage, welche Aspekte natürlicher Sprachen logisch relevant sind und welche nicht, immer durch eine Analyse der linguistischen Fakten beantwortet werden kann. Nur setzt eine solche Entscheidung eine gründliche Sichtung des vorhandenen sprachlichen Materials voraus.

Aussage „A und B" abzulehnen, wenn man der Aussage „A" und der Aussage „B" zustimmt, liegt daran, wie das Wort „und" im Deutschen gebraucht wird. Dies bedeutet einerseits, daß Logiker etwas darüber erfahren, ob ein bestimmtes Argumentschema korrekt ist, indem sie linguistische Daten auswerten und analysieren, wie die Sprecher einer Sprache die logisch interessanten sprachlichen Ausdrücke (wie „und") verwenden. Andererseits ist nicht jede Argumentation, die von Menschen mit dem Anspruch, korrekt zu sein, vorgetragen wird, auch tatsächlich logisch korrekt. (Wäre dies nicht so, wäre die Logik als Instanz, die Argumente auf ihre Korrektheit überprüft, überflüssig.) Ein methodologisches Grundproblem der Logik besteht deswegen darin, daß die Logiker, wenn sie ermitteln wollen, welche Argumente korrekt sind und welche nicht, dies auf der Basis von in den natürlichen Sprachen formulierten Argumentationen tun müssen, von denen sie gleichzeitig annehmen, daß nicht alle dieser Argumentationen logisch korrekt sind. Bei der Logik handelt es sich also gleichzeitig um eine deskriptive und um eine normative Wissenschaft.[24] Naturgemäß gibt es daher bei der Formulierung einer logischen Theorie – das macht einen Teil des Reizes der Logik aus – im Spannungsfeld zwischen Deskription und Normierung immer wieder verschiedene alternative Lösungen einer logischen Problematik, die sich alle gleich gut rechtfertigen lassen.

Die Entwicklung von logischen Kriterien für die Korrektheit von Argumenten vollzieht sich also in der Orientierung an und in der Auseinandersetzung mit Argumentationen von Sprechern der natürlichen Sprachen. Wenn man logische Systeme aus diesem Blickwinkel betrachtet, dann besteht ein Gütekriterium für logische Systeme darin, daß ein gutes

[24] In einer ähnlichen Situation wie die Logiker befinden sich die Grammatiker: Einerseits beschreiben sie den Sprachgebrauch, andererseits müssen sie entscheiden, welchen Sprachgebrauch sie als regelgerecht zulassen und welchen sie als falsch einstufen wollen. Wie unterschiedlich die Ergebnisse sind, sieht man, wenn man verschiedene Grammatiken derselben Sprache vergleicht.

logisches System (zusammen mit der inhaltlichen Interpretation dieses Systems) ein Argument genau dann als korrekt auszeichnet, wenn es von den Sprechern der natürlichen Sprachen intuitiv akzeptiert wird, und daß in den Fällen, in denen das logische System von den Intuitionen der Sprecher der natürlichen Sprachen abweicht, dafür gute systematische Gründe angegeben werden können.

Leider ist dieses Gütekriterium für logische Systeme nicht immer mit einem anderen vereinbar, das aus demselben Logikverständnis resultiert. Die Logik – so, wie sie oben aufgefaßt wurde – hat die Aufgabe, Maßstäbe für die Korrektheit von Argumenten aufzustellen. Den Logikern fällt somit eine Art Richterrolle zu: Sie sollen darüber entscheiden, welche (philosophischen) Argumente korrekt sind und welche nicht. Nun vertraut niemand – da unterscheidet sich die Philosophie nicht von anderen Bereichen des Lebens – einem parteiischen Richter. Angenommen, jemand wird mit einem Argument konfrontiert, dessen Prämissen diese Person zustimmt und dessen Konklusion lautet, daß der Solipsismus die einzige rationale erkenntnis-theoretische Position ist. Das Argument ist weitgehend korrekt, nur an einer entscheidenden Stelle wird ein Schlußschema folgender Form verwendet: „Einige X sind Y. Es folgt: Alle X sind Y." Der Solipsist, der dieses Argument vorbringt, rechtfertigt diesen Schluß inhaltlich damit, daß der Schluß von „einige" auf „alle" völlig angemessen ist, wenn es nur ein einziges Objekt gibt, nämlich das „Ich", dessen Bewußtseinsinhalte die Welt konstituieren. Logisch wird es von ihm durch den Verweis auf die ‚Solipsistische Logik' gerechtfertigt, ein von ihm selbst entwickeltes logisches System, das unter anderem den Schluß von „einige" auf „alle" als korrekt auszeichnet.[25] Ist nun der Diskussionspartner des Solipsisten als rationaler Mensch dazu verpflichtet, zum Solipsismus zu konvertieren?

[25] Man erhält ein solches System, indem man beispielsweise $\exists x\ A \supset \forall x\ A$ als Axiomenschema zu einer klassischen Prädikatenlogik erster Stufe hinzufügt. Dieses Axiomenschema nivelliert den Unterschied zwischen dem Existenzquantor und dem Allquantor.

Sicherlich nicht. Die inhaltliche Rechtfertigung des fragwürdigen Schlusses ist zirkulär, denn der Schluß ist nur akzeptabel, wenn man voraussetzt, daß es nur ein einziges Objekt gibt. Diese Behauptung ist aber ein Teil der Konklusion, die durch das Argument gestützt werden soll. Etwas verschleiert, aber ebenso zirkulär ist die logische Rechtfertigung des Schlusses. Denn die philosophische These, daß es nur ein einziges Objekt gibt, ist ein integraler Bestandteil der ‚Solipsistischen Logik'. Aus diesem Grund ist es nicht legitim, sich bei einem Argument, das unter anderem zeigen soll, daß es nur ein einziges Objekt gibt, auf die ‚Solipsistische Logik' als dasjenige logische System zu berufen, mit dem geklärt werden kann, welche Argumentationen korrekt sind und welche nicht.

Das Solipsismus-Beispiel zeigt, daß man ein logisches System nicht als Mittel verwenden kann, um zu entscheiden, ob ein gegebenes philosophisches Argument korrekt ist, wenn beim Aufbau des logischen Systems philosophische Thesen eingeflossen sind, die sich nicht neutral zu den Konklusionen verhalten. Je mehr philosophische Thesen Bestandteil eines logischen System sind, desto kleiner ist die Menge der Argumente, die unter Verwendung dieses Systems beurteilt werden können, weil die Neutralitätsvoraussetzung nicht erfüllt ist. Aus diesem Grund ist ein weiteres Gütekriterium für logische Systeme, daß ein logisches System um so besser ist, je neutraler es sich zu philosophischen Fragestellungen verhält.

Leider ist das erstrebenswerte Ziel, philosophische Neutralität zu bewahren, manchmal schwer zu verwirklichen. Betrachten wir beispielsweise die Situation, in der ein Intuitionist und ein Formalist miteinander über die Grundlagen der Mathematik diskutieren. Welches logische System soll man als Basis dafür verwenden, um zu beurteilen, welche ihrer Argumente korrekt sind und welche nicht? Wenn man ein klassisches System verwendet, dann beschwert sich der Intuitionist zu Recht darüber, daß in dem klassischen System der Satz vom ausgeschlossenen Dritten logisch gültig ist, obwohl es Teil der intuitionistischen Position ist, den Satz des ausgeschlossenen Dritten zu verwerfen. Das klassische System ist also nicht neutral gegenüber einer intuitionistischen Mathematikauffassung. Wählt man umgekehrt ein intuitionistisches System, um die Argumente der Kontrahenten zu beurteilen, fühlt sich der Formalist benachteiligt. Aus seiner Perspektive ist die klassische Logik die natürliche Wahl, und es gehört zu den Thesen des Intuitionisten, daß es aus philosophischen Gründen notwendig ist, auf logische Regeln wie den Satz des ausgeschlossenen Dritten zu verzichten. Da dies eine der Thesen ist, die der Intuitionist erst rechtfertigen muß, wäre es aus der Perspektive des Formalisten ein Verstoß gegen die Neutralitätspflicht, wenn man ein intuitionistisches System als Grundlage wählen würde, um die Argumente ihrer Diskussion auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Welches System soll man also nehmen?

Eine befriedigende Antwort zu geben, scheint schwer zu sein. Etwas einfacher fällt einem die Entscheidung, wenn man bedenkt, daß der Solipsist die Strategie des Intuitionisten adaptieren und behaupten kann, daß es ebenfalls eine philosophische These sei, daß es möglich ist, daß es mehr als ein Objekt gibt. Aus diesem Grund sei jede Logik, die auf dieser These aufbaut, genauso wenig philosophisch neutral wie seine ‚Solipsistische Logik', in der angenommen wird, daß es genau ein Objekt gibt. Deswegen sei er genauso berechtigt, seine ‚Solipsistische Logik' als Kriterium für gültige Argumente zu verwenden, wie jemand, der beispielsweise die klassische Prädikatenlogik erster Stufe für die richtige Logik hält. Akzeptiert man diese Begründung, dann läßt sich letztlich jede philosophische Theorie sogar als „logisch wahr" beweisen, indem man ein logisches System mit entsprechenden inhaltlichen Axiomen aufbaut und dieses System zur Grundlage seiner Argumente macht. Umgekehrt läßt sich jedes Argument dadurch ausschalten, daß man ein logisches System wählt, in dem das verwendete Argumentschema als nicht korrekt bewertet wird.

Vor dem Hintergrund eines solchen extremen logischen Relativismus verliert jedoch jedes Argumentieren seinen Sinn. Ein korrektes Argument ist für den Proponenten einer These deswegen interessant, weil seine (rationalen) Opponenten verpflichtet sind, der These zuzustimmen, wenn sie den Prämissen zustimmen. Wenn es aber im Belieben der Opponenten steht, dieser Verpflichtung zu entgehen, weil sie das Argument jederzeit als „logisch inkorrekt" verwerfen können, indem sie ein geeignetes logisches System wählen, kann der Proponent sich die Mühe des Argumentierens sparen und seine Überzeugungen als eine Aneinanderreihung von Behauptungen präsentieren.

Ein extremer logischer Relativismus läßt sich dadurch vermeiden, daß man sich an die linguistischen Daten als Prüfstein für logische Systeme erinnert. Da die allermeisten Sprecher der natürlichen Sprachen dem Satz des ausgeschlossenen Dritten (jedenfalls bei mathematischen Aussagen) zustimmen, gehört es zu der Bedeutung von „oder" und „nicht", daß eine Aussage der Form „A oder nicht A" logisch wahr ist. Daß dies so ist, schließt nicht aus, daß die Intuitionisten Recht haben und wir die Wörter „oder" und „nicht" anders verwenden sollten. Aber die Beweislast für diese These liegt bei den Intuitionisten. Aus diesem Grund ist es legitim von dem Formalisten, zu Beginn seiner Diskussion mit dem Intuitionisten eine Logik vorauszusetzen, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten als korrekt auszeichnet. Sollte der Intuitionist mit gemäß diesem System korrekten Argumenten den Formalisten davon überzeugen, daß es besser ist, eine intuitionistische Logik zu verwenden, dann können sie ihr logisches Bezugssystem wechseln. Das heißt nichts anderes, als daß sie sich aus philosophischen Gründen darauf geeinigt haben, unter anderem die Worte „oder" und „nicht" anders zu verwenden, als es normalerweise üblich ist. Doch bevor kein Konsens darüber besteht, die Bedeutung der logischen Partikel zu verändern, sollte man sie so verwenden, wie wir es beim Spracherwerb erlernt haben. Derselbe Grund spricht gegen die ‚Solipsistische Logik': Wir verwenden die Worte „alle“ und „einige“ nicht so, daß man von „Einige X sind Y“ berechtigt auf „Alle X sind Y“ schließen kann. Deswegen steht ein Verfechter der ‚Solipsistischen Logik‘ in der Pflicht zu zeigen, weshalb man diese logische Regel akzeptieren sollte, bevor er die ‚Solipsistische Logik‘ zur Basis seiner Argumente machen darf. Der Solipsist mag es als ungerecht empfinden, daß die Beweislast auf seinen Schultern liegt, bloß weil wir gewohnt sind, so zu sprechen, als ob es mehrere Objekte gibt. Aber so ist das nun einmal: Wer von seinem Gesprächspartner verlangt, alte Gewohnheiten aufzugeben, sollte dafür Gründe angeben können.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß ein gutes logisches System möglichst neutral gegenüber philosophischen Fragestellungen zu sein hat, weil sonst Philosophen, die die impliziten philosophischen Annahmen des Systems ablehnen, sich mit gutem Recht weigern, dieses System als Grundlage der Beurteilung von Argumenten zu akzeptieren. Wenn es nicht möglich ist, eine philosophisch neutrale Position einzunehmen, dann haben diejenigen logischen Systeme, die sich im Einklang mit den natürlichen Sprachen befinden, Vorrang vor logischen Systemen, bei denen das nicht der Fall ist. Letztlich verweist das Gütekriterium der philosophischen Neutralität also auf das erstgenannte Kriterium der linguistischen Adäquatheit, nämlich daß ein gutes logisches System (zusammen mit der inhaltlichen Interpretation dieses Systems) ein Argument genau dann als korrekt auszeichnet, wenn es von den Sprechern der natürlichen Sprachen intuitiv akzeptiert wird, und daß in den Fällen, in denen das logische System von den Intuitionen der Sprecher der natürlichen Sprachen abweicht, dafür gute systematische Gründe angegeben werden können.

Legt man diese Kriterien zugrunde, dann läßt es sich anhand von linguistischen Daten zeigen, daß es inhaltliche Gründe dafür gibt, ein logisches System zu entwickeln, in dem Prädikatenzeichen auch Argumentpositionen einnehmen können.[26] Durch die Untersuchung von sprachlichem Material wird aber nicht nur das Ziel dieser Arbeit zusätzlich gerechtfertigt, sondern auf diese Weise läßt sich auch Aufschluß darüber gewinnen, welche Anforderungen eine formale Theorie der Prädikation noch zu erfüllen hat. Das nächste Kapitel dient in erster Hinsicht dazu, relevante linguistische Fakten zusammenzutragen. Zusätzlich wird das verwendete Vokabular konkretisiert, und es werden die für die Entwicklung der Naiven Prädikatenlogik wesentlichen Ideen skizziert. Dies soll dazu dienen, dem Leser den Zugang zu der formalen Darstellung der Naiven Prädikatenlogik in Kapitel III zu erleichtern.

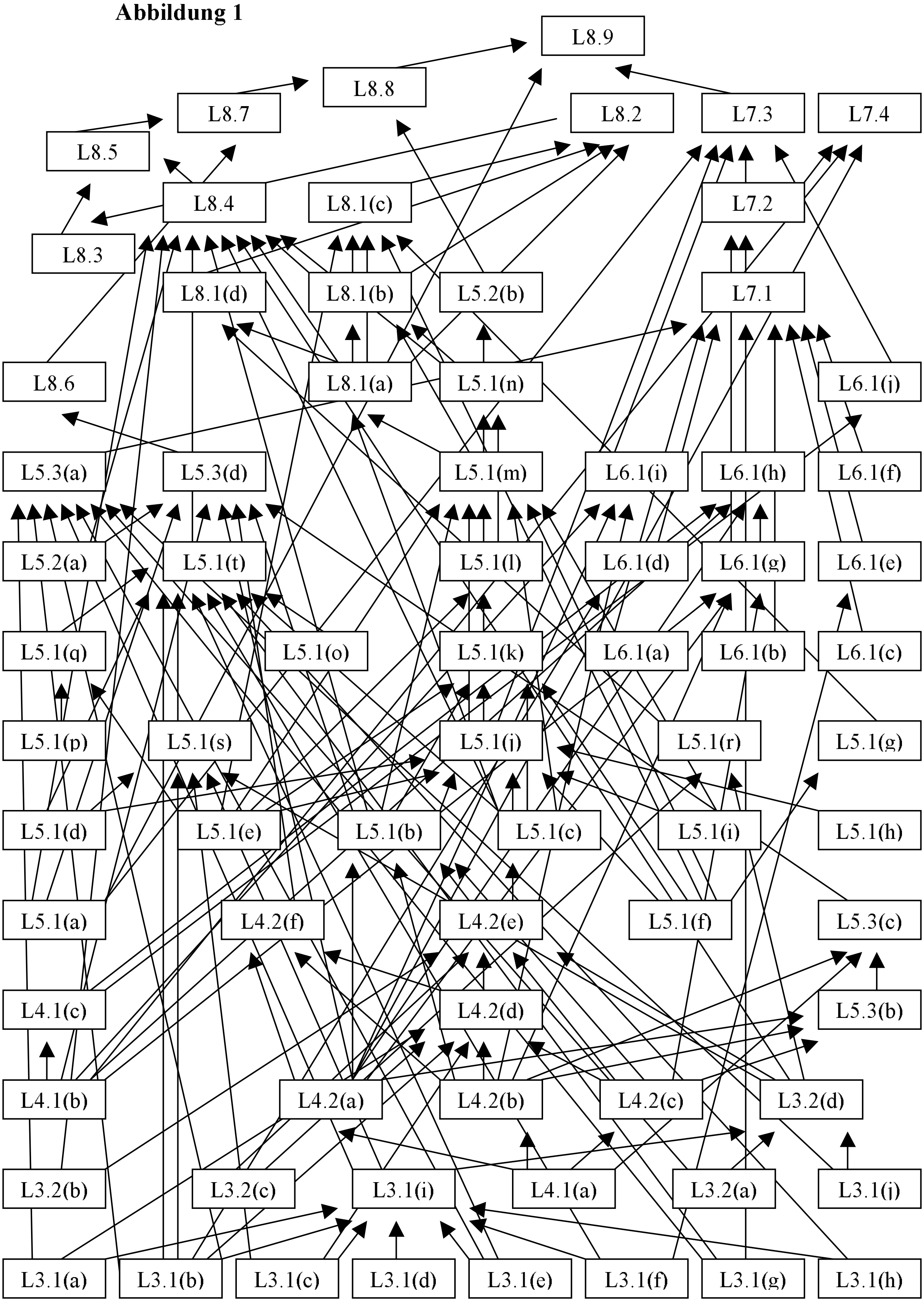
Die Naive Prädikatenlogik übertrifft (zumindest in gewisser Hinsicht) eine Prädikatenlogik höherer Stufe an Ausdrucksstärke, und darüber hinaus wird beim Aufbau der Naiven Prädikatenlogik auf Vorkehrungen zur Vermeidung des Russell-Paradoxes (wie eine Typenhierarchie) verzichtet. Deshalb ist zu befürchten, daß die Naive Prädikatenlogik nicht über die guten metatheoretischen Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe verfügt, wenn sie nicht sogar widersprüchlich ist. Da die Naive Prädikatenlogik andererseits keine echte Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe ist, sondern nur die vorhandenen Ressourcen richtig ausnutzt, besteht Grund für die Hoffnung, daß die Naive Prädikatenlogik doch die guten Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe besitzt. Um zu zeigen, daß und warum die Befürchtung unberechtigt ist und sich die Hoffnung erfüllt, wird die Naive Prädikatenlogik ausführlich dargestellt und geklärt, daß sie korrekt (L7.3) widerspruchsfrei (L7.4), vollständig (L8.8) und kompakt

[26] Auf die Kriterien, an denen logische Systeme in dieser Arbeit gemessen werden, wurde unter anderem deshalb ausführlich eingegangen, weil viele verwandte Arbeiten andere Ziele verfolgen und daher zu anderen Ergebnissen kommen. So argumentieren beispielsweise Bealer und Mönnich ausführlich gegen nominalistische und konzeptualistische Positionen, bevor sie eine formale Eigenschaftstheorie präsentieren, die der von ihnen bevorzugten Variante des Realismus gerecht wird. Auf diese Weise wird bereits durch den Aufbau ihres Aufsatzes deutlich, daß Bealer und Mönnich nicht das Ziel haben, ein logisches System zu entwickeln, das sich möglichst neutral gegenüber philosophischen Positionen verhält. Womit Bealer und Mönnich sich beschäftigen, ist (formale) Ontologie, aber nicht Logik in dem oben angesprochenen Sinne. Vgl. Bealer und Mönnich (1989).

(L8.9) ist. Die dazu notwendigen Beweise sind einigermaßen umfangreich; einen Überblick über den Zusammenhang zwischen den 75 involvierten Sätzen erlaubt Abbildung 1. (Jeder Kasten in Abbildung 1 steht für den Satz, den man anhand seines Namens in Kapitel III nachschlagen kann, die Zahl hinter „L“ ist die Nummer des Abschnitts von Kapitel III. Beispielsweise findet man den durch „L5.1(j)“ bezeichneten Satz im fünften Abschnitt von Kapitel III, es handelt sich um das Deduktionstheorem für die Naive Prädikatenlogik. Jeder Pfeil bedeutet, daß der Satz am Pfeilschaft beim Beweis des Satzes an der Pfeilspitze verwendet wurde.)

Es läßt sich zeigen, daß die Naive Prädikatenlogik widerspruchsfrei und vollständig ist. Doch das erklärt noch nicht, weshalb sie diese Eigenschaften hat. Deshalb wird zunächst der Frage nachgegangen werden, weshalb die Naive Prädikatenlogik im Gegensatz zu einer ‚normalen‘ Prädikatenlogik zweiter Stufe vollständig ist, obwohl sie einem solchen System an Ausdrucksstärke überlegen ist. Der Widerspruchsfreiheit und damit Paradoxienfreiheit der Naiven Prädikatenlogik widmet sich ein eigenes, kurzes Kapitel, in dem zunächst thematisiert wird, was ein Paradox ist und was eine Lösung eines Paradoxes auszeichnet. Dann wird gezeigt werden, daß die Naive Prädikatenlogik eine Lösung (in dem vorher dargestellten Sinne) des Russell-Paradoxes der Prädikation und des Grelling-Paradoxes ist. Es wird sich zeigen, daß bei der Herleitung des Russell-Paradoxes das sogenannte Comprehensionsaxiom eine entscheidende Rolle spielt. Dieses Axiom ist gleichzeitig charakteristisch für formale Eigenschaftstheorien. Um die ‚Quellen‘ der Paradoxien angemessen diskutieren zu können und formale Eigenschaftstheorien von der Naiven Prädikatenlogik abzugrenzen, wird auf beide Themen ausführlich eingegangen werden.

Abbildung 1


L8.9
L8.8
L8.7
L8.2
L7.3
L7.4
L8.5
L8.4
L8.1(c)
L7.2
L8.3
L8.1(d)
L8.1(b)
L5.2(b)
L7.1
L8.6
L8.1(a)
L5.1(n)
L6.1(j)
L5.3(a)
L5.3(d)
L5.1(m)
L6.1(i)
L6.1(h)
L6.1(f)
L5.2(a)
L5.1(t)
L5.1(l)
L6.1(d)
L6.1(g)
L6.1(e)
L5.1(q)
L5.1(o)
L5.1(k)
L6.1(a)
L6.1(b)
L6.1(c)
L5.1(p)
L5.1(s)
L5.1(j)
L5.1(r)
L5.1(g)
L5.1(d)
L5.1(e)
L5.1(b)
L5.1(c)
L5.1(i)
L5.1(h)
L5.1(a)
L4.2(f)
L4.2(e)
L5.1(f)
L5.3(c)
L4.1(c)
L4.2(d)
L5.3(b)
L4.1(b)
L4.2(a)
L4.2(b)
L4.2(c)
L3.2(d)
L3.2(b)
L3.2(c)
L3.1(i)
L4.1(a)
L3.2(a)
L3.1(j)
L3.1(a)
L3.1(b)
L3.1(c)
L3.1(d)
L3.1(e)
L3.1(f)
L3.1(g)
L3.1(h)

II Linguistische Daten

„Eine Hauptursache philosophischer Krankheiten – einseitige Diät: man nährt sein Denken mit nur einer Art von Beispielen.“

Ludwig Wittgenstein

Philosophische Untersuchungen

1 Prädikate und Eigenschaften

In diesem Kapitel werden einige linguistische Daten vorgestellt, denen eine angemessene Theorie der Prädikation gerecht werden muß. Die dazu verwendeten Beispiele dienen gleichzeitig dazu, die bereits in der Einleitung verwendete Terminologie zu erklären und auszuarbeiten. Den Ausgangspunkt bildet die übliche Zerlegung von *atomaren Aussagen* wie II(1)-II(3) in *einfache Prädikate* und *Eigennamen*: Ein einfaches Prädikat entsteht, indem die Eigennamen aus einer atomaren Aussage herausgestrichen und die entstehenden Leerstellen durch Variablen markiert werden, wobei die Variablen in der Reihenfolge ihres Auftretens indiziert werden.

II(1) Paul ist Schlachter.

II(2) Paul ist Metzger.

II(3) Bielefeld liegt irgendwo zwischen Kopenhagen und Mailand.

Die einfachen Prädikate der Sätze II(1)-II(3) sind „x_1 ist Schlachter“, „x_1 ist Metzger“ und „x_1 liegt irgendwo zwischen x_2 und x_3“. Ausdrücke wie „Bielefeld liegt irgendwo zwischen x_2 und Mailand“, die durch das sukzessive Auffüllen der Leerstellen eines Prädikates mit Namen entstehen, sind keine einfachen Prädikate. Die Prädikate von II(1) und II(2) unterscheiden sich von II(3) durch die Anzahl der vorkommenden Leerstellen.

Die Anzahl der Leerstellen eines (einfachen) Prädikates wird durch die *Stelligkeit des Prädikates* angegeben.

Was atomare Aussagen und Eigennamen sind, kann anhand von Beispielen wie II(1)-II(3) gezeigt werden. Letztlich wird an dieser Stelle vorausgesetzt, daß ein kompetenter Sprecher einer Sprache die Fähigkeit besitzt, Eigennamen dieser Sprache als solche zu erkennen. Was in der logischen Literatur unter einer (atomaren) Aussage verstanden wird, ist bei näherer Betrachtung ziemlich verwirrend. Eine erste, etwas unbefriedigende Antwort lautet: Atomare Aussagen sind solche linguistischen Entitäten, die im Rahmen der Aussagenlogik mit Hilfe von Aussagenvariablen formalisiert werden. Doch um welche Art von linguistischen Entitäten handelt es sich dabei? Zunächst läßt sich feststellen, daß Logiker beim Formalisieren von Argumenten nicht nur syntaktische Informationen, sondern auch semantische Informationen berücksichtigen. Wenn zwei verschiedene (geeignete) linguistische Entitäten sich in ihrer Bedeutung nicht oder für das vorliegende Argument nicht relevant unterscheiden, dann wird ein Logiker bei der Formalisierung dieselbe Aussagenvariable verwenden. Und umgekehrt werden zwei verschiedene Vorkommen derselben syntaktischen Entität in einer Argumentation durch zwei verschiedene aussagenlogische Variablen repräsentiert, wenn beispielsweise in ihnen ein Wort in zwei unterschiedlichen Bedeutungen gebraucht wird. Insofern ist die häufig zu hörende Bemerkung, daß die Logik nur die ‚Form‘, aber nicht den ‚Inhalt‘ von Aussagen berücksichtigt, nicht so zu verstehen, daß semantische Überlegungen beim Formalisieren keine Rolle spielen.

Daß Logiker beim Formalisieren die Bedeutungen der zu formalisierenden linguistischen Entitäten berücksichtigen, spricht scheinbar dafür, daß es sich bei atomaren Aussagen um semantische Entitäten handelt. Diese Einschätzung wird dadurch unterstützt, daß formale Semantiker (beispielsweise in der Montague-Tradition) Formeln von formalen Sprachen dazu verwenden, um Bedeutungen von ‚Sätzen‘ der natürlichen Sprachen schriftlich zu fixieren. Doch der Gebrauch von Formeln durch Logiker und formale Semantiker unterscheidet sich: Während Logiker Formeln für die Untersuchung von Argumenten verwenden, geben formale Semantiker Regeln dafür an, wie sich die verschiedenen Bedeutungen von komplexen syntaktischen Einheiten aus ihrer syntaktischen Struktur und der Bedeutung der in ihn vorkommenden lexikalischen Ausdrücke ergeben.[27] Das führt dazu, daß ein formaler Semantiker bei der Betrachtung eines Satzes – verstanden als eine Aneinanderreihung von Worten – in der Regel aufgrund der syntaktischen und semantischen Ambiguitäten in den natürlichen Sprachen eine große Anzahl von Formeln berücksichtigen muß, die mögliche Lesarten dieses Satzes repräsentieren. Die Logiker sind in einer einfacheren Lage. Da sie sich nur für die Aspekte von gegebenen linguistischen Entitäten interessieren, wenn diese für eine vorliegende Argumentation relevant sind, benötigen sie oft weniger aufwendige formale Apparate als die formalen Semantiker; viele unterschiedliche Lesarten eines Satzes werden von den Logikern also schon deswegen nicht berücksichtigt, weil für ihre Zwecke logische Sprachen ausreichen, in denen die Unterschiede zwischen den Lesarten gar nicht repräsentierbar sind. Darüber hinaus versuchen sie nicht alle möglichen Lesarten zu ermitteln, sondern sie berücksichtigen nur Möglichkeiten, die erstens zu einem (wenigstens scheinbar) korrekten Argument führen und zweitens zum jeweiligen Kontext passen. Was der bei einer Formalisierung zu berücksichtigende Kontext ist, ist vom Einzelfall abhängig. Da jedoch Argumentationen in philosophischen Aufsätzen und Büchern in der Regel nicht isoliert auftreten, sondern meistens kommentiert werden und Bestandteil eines größeren argumentativen Zusammenhangs sind, sind bei der Formalisierung eines philosophischen Arguments gewöhnlich mehr Textstellen zu berücksichtigen als diejenige, in der die Argumentation formuliert wird.

[27] „Syntaktisch" wird an dieser Stelle in einem weiten Sinne verstanden und umfaßt auch Morphologie und Phonologie.

Bei der Formalisierung von Argumenten berücksichtigen Logiker also jeweils den gegebenen Kontext. Indem sie nur Lesarten berücksichtigen, die aussichtsreiche Kandidaten für ein korrektes Argument sind, unterstellen sie außerdem, daß die Argumentation mit der Intention formuliert wurde, korrekt zu sein. Die Berücksichtigung des Kontextes einer Äußerung und der Sprecherintention sind charakteristische Merkmale, die die Pragmatik von der Semantik unterscheidet; ist Logik also ein Teil der Pragmatik? Diese Unterstellung würden vermutlich die meisten Logiker entschieden von sich weisen. Logik und Pragmatik ist gemeinsam, daß sie sich mit dem Resultat des Sprachgebrauchs, also von (gesprochenen oder geschriebenen) Äußerungen beschäftigt. Als Logiker interessiert man sich nicht für eine Abfolge von Sätzen einer Sprache allein aufgrund der Tatsache, daß diese Sätze Teil dieser Sprache sind und man sie unter syntaktischen und semantischen Aspekten beschreiben kann. Interessant sind lediglich bestimmte Folgen von Äußerungen von Sätzen, nämlich dann, wenn die Äußerungen von dem Sprecher[28] als Argumentation intendiert sind. Im Unterschied zu einem pragmatisch orientierten Linguisten steht aber für einen Logiker weder das Verhältnis zwischen einer Äußerung und dem Äußerungskontext noch das Verhältnis zwischen einer Äußerung und der Sprecherintention im Zentrum seiner Aufmerksamkeit. Pragmatische Aspekte einer Folge von Äußerungen werden genauso wie die semantischen und syntaktischen Gesichtspunkte der den Äußerungen korrespondierenden Sätze in der Logik nicht analysiert, sondern nur gebraucht, um ‚das Argument‘ zu ‚rekonstruieren‘. Bei dieser ‚Rekonstruktion‘ handelt es sich um eine ziemlich freie Paraphrase der ursprünglichen Äußerungen, die unter Berücksichtigung aller vorhandenen Informationen vorgenommen wird. Bei dieser Paraphrase werden beispielsweise Ellipsen in ‚vollständige‘ Sätze umgewandelt sowie semantische und syntaktische Mehrdeutigkeiten oder auch Personalpronomen und andere deiktische Ausdrücke eliminiert. Oft kommt es vor, daß bestimmte Teile der

[28] „Sprecher“ ist an dieser Stelle und im folgenden Text immer in dem weiten Sinne zu verstehen, der sowohl gesprochene als auch geschriebene Äußerungen einschließt.

ursprünglichen Äußerungen gar nicht berücksichtigt werden oder daß in der Paraphrase Ausdrücke oder gar Sätze auftauchen, die in den ursprünglichen Äußerungen nicht vorkamen. (Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn Logiker implizite Prämissen explizit machen.)[29] Das Ergebnis dieser Paraphrase ist meistens bereits in einer Sprache formuliert, die strukturelle Übereinstimmungen mit einer formalen Sprache besitzt und die aus diesem Grund leicht in sie übersetzt werden kann. Von nun an wird (dies geschah bisher nur implizit) zwischen einer Argumentation und dem durch die Argumentation ausgedrückten Argument unterschieden, wobei eine Argumentation eine Folge von Äußerungen ist, die von einem Sprecher mit der Intention zu argumentieren artikuliert wurde, und das entsprechende Argument das ist, was kompetente Logiker bei einem zutreffenden Verständnis der Sprecherintention als angemessene Paraphrasierung ansehen würden.[30] Im Unterschied zu Pragmatikern interessieren sich Logiker nur für die Eigenschaften einer Argumentation, die bei der Gewinnung des entsprechenden Arguments wichtig sind. Darüber hinaus wird die Argumentation vernachlässigt, und das entsprechende Argument bildet die Basis für die weitere logische Analyse; beispielsweise dient es als Ausgangspunkt bei Übersetzungen in formale Sprachen und bei Überprüfungen auf logische Korrektheit. Letztlich gehen Logiker so vor, als ob der Sprecher nicht die Argumentation, sondern das Argument (also das Ergebnis der Paraphrase) geäußert hätte.

---

[29] Das Verfahren, durch das die Logiker von einer Folge von Äußerungen zu einer Paraphrase kommen, die sie als gelungene ‚Rekonstruktion' des durch diese Äußerungen ausgedrückten Arguments ansehen, dürfte vermutlich selbst für die meisten Logiker nicht transparent sein (mir erscheint es jedenfalls undurchsichtig). Gerechtfertigt wird ihr Vorgehen durch die erfolgreiche Praxis: Logiker können sich problemlos darüber verständigen, was angemessene Paraphrasen sind und was nicht. Es zeigt sich darüber hinaus, daß Studenten in der Regel sehr schnell die Fähigkeit erwerben, Argumente richtig zu ‚rekonstruieren'.

[30] Daß von *dem* durch eine Argumentation ausgedrückten Argument gesprochen werden kann, beruht auf zwei vereinfachenden Annahmen: Es wird vorausgesetzt, daß der Sprecher immer genau eine Lesart der Argumentation intendiert. (Dies schließt natürlich nicht aus, daß, wenn die Sprecherintention unbekannt ist, verschiedene Paraphrasierungen der Argumentation berücksichtigt werden müssen.) Außerdem wird angenommen, daß der Konsens zwischen verschiedenen Logikern so groß ist, daß sie sich bei allen Argumentationen auf eine angemessene Paraphrase einigen können. Obwohl beide Annahmen vermutlich falsch sind, werden sie hier getroffen, um die Frage „Was ist eine atomare Aussage" wenigstens informell beantworten zu können. Für den weiteren Verlauf des Textes sind sie irrelevant.

Vor diesem Hintergrund kann die Frage „Was sind (atomare) Aussagen?“ zwar nur ungenau und informell, aber für die vorliegenden Zwecke ausreichend beantwortet werden: Aussagen sind Bestandteile von Argumenten, also von Paraphrasierungen von durch den Sprecher als Argumentation intendierte Folgen von Äußerungen; atomare Aussagen sind die Teile von Argumenten, die die Form der Beispiele II(1)-II(3) haben.[31]

In atomaren Aussagen $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ dient das d-stellige Prädikat F^d dem Sprecher dazu, die Entitäten zu charakterisieren, auf die er mit den Eigennamen $k_1, \ldots, k_d$ referiert. Die Sprachhandlung, die ein Sprecher vollzieht, wenn er Entitäten durch den Gebrauch von einfachen Prädikaten charakterisiert, wird „*Prädikation*“ genannt.[32] Um eine bequeme und natürliche Möglichkeit zur Verfügung zu haben, um über die Art und Weise zu reden, wie Entitäten (durch einen Sprecher) unter Verwendung von (einfachen) Prädikaten charakterisiert werden können, wird von nun an davon gesprochen werden, daß ein d-stelliges (einfaches) Prädikat *eine d-stellige Eigenschaft ausdrückt*. (Für mehrstellige Eigenschaften wird auch der Ausdruck „Relationen“ verwendet.) Diese Redeweise ist deshalb problematisch, weil so suggeriert wird, daß es abstrakte Entitäten gibt, auf die der Ausdruck „Eigenschaften“ referiert, und daß Prädikate etwas ausdrücken, also handeln können. Legitimiert wird sie durch ihren praktischen Nutzen: Aus umständlichen Aussagen wie „Wenn die einfachen Prädikate ‚x_1 ist

[31] Daß an dieser Stelle keine genauere Bestimmung von (atomaren) Aussagen gegeben wird, liegt unter anderem daran, daß die Ergebnisse der Paraphrasierungen ‚Aussagesätze‘ im Sinne der Schulgrammatik sind. Wie schwierig es ist, diese ‚Aussagesätze‘ systematisch zu charakterisieren, erkennt man daran, daß in den verschiedenen Grammatiken des Deutschen die Erläuterungen zu „Satz“ und „Satzarten“ gravierend voneinander abweichen. Offenbar besteht nicht einmal Einigkeit darüber, ob syntaktische, semantische oder pragmatische Kriterien (oder eine Kombination) zur Bestimmung der Satzarten herangezogen werden sollen. Siehe Eichler und Bünting (1996), S. 34f, 262ff, Kürschner (1993), S. 236ff, Eisenberg (1994), S. 408ff, Engel (1994), S. 179ff, Hentschel und Weydt (1994), S. 368ff, Helbig und Buscha (1994), S. 610ff, Sommerfeldt und Starke (1992), S. 178ff, Duden (1995), S. 590ff.

[32] Das Wort „Prädikation“ wird in dieser Arbeit in Übereinstimmung mit der logischen Tradition in einem weiteren Sinne verwendet als in Searles *Sprechakte* und umfaßt (in Searles Terminologie) in etwa die Prädikation und den illokutionären Akt der Behauptung. Siehe Searle (1997), S. 38ff.

Metzger‘ und ‚x_1 ist Schlachter‘ von einem Sprecher verwendet werden, um eine Entität zu charakterisieren, dann wird diese Entität auf dieselbe Weise durch den Sprecher charakterisiert“ wird „Die Prädikate ‚x_1 ist Metzger‘ und ‚x_1 ist Schlachter‘ drücken dieselbe Eigenschaft aus“. Durch die Einführung dieser Redeweise wird jedoch keine Entscheidung zugunsten einer der philosophischen Positionen getroffen, die erklärt, wie die Charakterisierung von Entitäten durch Sprecher unter Verwendung von Prädikaten funktioniert; insbesondere wird offen gelassen, ob es abstrakte Entitäten gibt, die bei einer solchen Charakterisierung eine Rolle spielen.

Eigenschaften können auch durch *komplexe* (das heißt: nicht-einfache) *Prädikate* ausgedrückt werden.[33] Komplexe Prädikate entstehen unter anderem durch die übliche Verwendung von Operatoren. Die oben eingeführte Verwendung von „einfaches Prädikat“ erlaubt es von *dem* einfachen Prädikat einer atomaren Aussage zu sprechen. Eine Konsequenz dieses Vorgehens ist, daß II(4)-II(6) keine einfachen, sondern komplexe Prädikate sind.

II(4) x_2 schläft

II(5) x_3 liebt x_3

II(6) x_1 liebt Julia

Aus dem einfachen Prädikat „x_1 schläft“ ergibt sich II(4), indem x_1 durch x_2 ersetzt wird. II(5) entsteht aus dem einfachen Prädikat „x_1 liebt x_2“, indem die Vorkommen der Variablen x_1 und x_2 durch Vorkommen der Variablen

[33] Das Verhältnis von komplexen Prädikaten zu Eigenschaften birgt einige Schwierigkeiten und wird deshalb an dieser Stelle offen gelassen. Offenbar ist beispielsweise die Eigenschaft, gelb und sauer zu sein, nicht unabhängig von der Eigenschaft, gelb zu sein, und der Eigenschaft, sauer zu sein. Zumindest wenn man eine realistische oder eine konzeptualistische Eigenschaftskonzeption vertritt, liegt die Vermutung nahe, daß den komplex strukturierten Prädikaten auf ontologischer Seite komplex strukturierte Entitäten entsprechen. Wenn man das annimmt, scheint das – wenigstens auf den ersten Blick – die Konsequenz zu haben, daß die Prädikate „x_1 ist kräftig“ und „x_1 ist kräftig und x_1 ist kräftig“ unterschiedliche Eigenschaften ausdrücken, obwohl Entitäten durch die Prädikate auf dieselbe Weise charakterisiert werden. Darüber hinaus kann man bestreiten, daß es möglich ist, mit Prädikaten wie „x_1 ist gelb oder x_1 ist nicht gelb“ und „x_1 ist sauer und x_1 ist nicht sauer“ Entitäten zu charakterisieren. Die Frage, ob alle komplexen Prädikate Eigenschaften ausdrücken, wird noch eine wichtige Rolle spielen.

x_3 ersetzt werden. II(6) ist das Resultat einer Ersetzung aller Vorkommen der Variablen x_2 in „x_1 liebt x_2" durch den Namen „Julia". Einfache Prädikate und Prädikate, die durch die (iterierte) Ersetzung aller Vorkommen einer Variablen durch Vorkommen einer anderen Variablen oder durch Vorkommen eines Namens entstehen, werden *„atomare Prädikate"* genannt. Einen besonderen Fall stellen nullstellige Prädikate wie II(7) oder II(8) dar. (II(7) ist ein einfaches und II(8) ist ein komplexes Prädikat.)

II(7) es regnet

II(8) John liebt Julia

Nullstellige Eigenschaften, die durch Prädikate wie II(7) und II(8) ausgedrückt werden, werden auch als „*Propositionen*" bezeichnet.[34]

2 Nominalisierte Prädikate und „haben"

Bisher wurde unter einem einfachen Prädikat ein Ausdruck verstanden, der durch das Herausstreichen der Namen aus einer atomaren Aussage und dem Markieren der Leerstellen durch verschiedene Variablen entsteht. Dies führt zu dem wenig plausiblen Ergebnis, daß die Aussagen II(9)-II(12) alle unterschiedliche Prädikate enthalten und die Prädikate der Aussagen II(10)-II(12) einstellig sind.

II(9) John gefällt Julia.

II(10) Daß es regnet, gefällt Julia.

II(11) Sportlichkeit gefällt Julia.

II(12) Die Eigenschaft, sportlich zu sein, gefällt Julia.

Es bietet sich aus diesem Grund an, den Begriff „einfaches Prädikat" so auszuweiten, daß „x_1 gefällt x_2" das einfache Prädikat der Aussagen II(9)-

[34] Daß Propositionen als nullstellige Eigenschaften aufgefaßt werden, findet sich in der logischen Literatur häufig. Aus den hier eingeführten Begriffsbestimmungen ergibt sich – abweichend von einer verbreiteten Verwendung von „Proposition" –, daß eine Aussage nicht eine Proposition ausdrückt, sondern daß man eine atomare Aussage erhält, indem man den Akt der Prädikation auf eine einfache Proposition (also eine nullstellige Eigenschaft) anwendet.

II(12) ist. Offenbar stehen die Ausdrücke, die man aus II(10)-II(12) herausstreichen muß, um „x_1 gefällt x_2“ als einfaches Prädikat dieser Aussagen zu erhalten, in einem engen Zusammenhang mit anderen Prädikaten. Ausdrücke dieser Art werden „*nominalisierte Prädikate*“ genannt. So ist der Ausdruck „daß es regnet“ das nominalisierte Prädikat, das dem nullstelligen Prädikat „es regnet“ entspricht.[35] Die Ausdrücke „Sportlichkeit“ und „die Eigenschaft, sportlich zu sein“ sind zwei verschiedene Nominalisierungen des einstelligen einfachen Prädikates „x_1 ist sportlich“.[36] Durch eine Nominalisierung kann die Art und Weise, wie ein Prädikat gebraucht werden kann, um eine Entität zu charakterisieren, – also die durch das Prädikat ausgedrückte Eigenschaft – selbst charakterisiert werden.[37] Da Namen und nominalisierte Prädikate die Leerstellen in Prädikaten füllen können, werden sie auch *Subjekttermini* genannt. Das, worauf ein in einer Aussage vorkommender Subjektterminus Bezug nimmt, ist ein *Subjekt* dieser Aussage.[38]

---

[35] Um umständliche Formulierungen zu vermeiden, wird ein nominalisiertes Prädikat „d-stellig“ genannt, wenn es von einem d-stelligen Prädikat abgeleitet ist.

[36] Sensible Sprecher des Deutschen verwenden die verschiedenen Nominalisierungen desselben Prädikates unterschiedlich. Beispielsweise würden einige Sprecher II(12) eher als II(11) verwenden, um auszudrücken, daß es Julia gefällt, sportlich zu sein. Von Unterschieden dieser Art wird in dieser Arbeit abgesehen.
Ob in den Beispielsätzen II(11) und II(12) mit den nominalisierten Prädikaten auf ontologisch bedenkliche Entitäten referiert wird, ist in diesem Zusammenhang unwichtig. Denn II(11) und II(12) dienen an dieser Stelle nur als linguistische Daten, und daß Sätze dieser Art verwendet werden, läßt sich leicht nachweisen.

[37] Die Frage, ob dem Unterschied zwischen einem Prädikat und seiner Nominalisierung ein ontologischer Unterschied entspricht – wie Castañeda (1976) annimmt – soll an dieser Stelle offen gelassen werden.

[38] In II(10) wird die erste Leerstelle des Prädikates „x_1 gefällt x_2“ durch ein nullstelliges nominalisiertes Prädikat eingenommen, das von „es regnet“ abgeleitet wurde. Es spricht nichts dagegen, daß dieselbe Stelle von beliebigen anderen nullstelligen nominalisierten Prädikaten eingenommen wird, beispielsweise von „daß John Julia liebt“. Auf diese Weise ergibt sich die Aussage:

Daß John Julia liebt, gefällt Julia.

Das Prädikat dieser Aussage erhält man, indem man die nominalisierten Prädikate und die Namen streicht, es lautet also wie im Fall von II(10) „x_1 gefällt x_2“ und nicht „Daß x_1 x_2 liebt, gefällt x_3“. Das liegt daran, daß die Namen „John“ und „Julia“ Bestandteile des nominalisierten Prädikates „daß John und Julia liebt“ sind und dieses nominalisierte Prädikat als Ganzes gestrichen werden muß, um das Prädikat von „Daß John Julia liebt, gefällt Julia“ festzustellen. Im weiteren Text werden nominalisierte Eigenschaften, die von komplexen Prädikaten abgeleitet sind, in der Regel nicht weiter berücksichtigt.

Ein wichtiges Datum besteht in dem Zusammenhang zwischen II(13) und II(14).

II(13) Julia ist schön.

II(14) Julia hat die Eigenschaft, schön zu sein.[39]

Jede atomare Aussage, in der ein einstelliges Prädikat verwendet wird, um eine Eigenschaft auszudrücken, kann in eine äquivalente Aussage umgeformt werden, in der ein entsprechendes nominalisiertes Prädikat und eine Form des Verbs „haben" verwendet wird. Doch wie ist „hat" in Aussagen wie II(14) aufzufassen? II(14) ist scheinbar eine Paraphrase von II(15) .

II(15) Julia besitzt die Eigenschaft, schön zu sein.

Aber bei dieser Verwendung von „besitzen" handelt sich um eine metaphorische Redeweise.[40] Denn etwas, was man besitzt, kann einem gestohlen werden, man kann es verschenken etc. Julia kann aber sicherlich nicht ihre Schönheit verschenken, wenigstens nicht in demselben Sinne wie man beispielsweise Bücher verschenken kann.

---

[39] In den Beispielen werden oft anstatt „Wahrheit", „Schönheit", „Größe", „Tugend" etc. die entsprechenden nominalisierten Prädikate der Form „die Eigenschaft, …" verwendet. Dies mag manchmal etwas umständlich klingen, aber dafür haben die nominalisierten Prädikate der Form „die Eigenschaft, …" den Vorteil, daß es (a) zu jedem (nicht-nominalisierten) Prädikat ein nominalisiertes Prädikat der Form „die Eigenschaft, …" gibt, daß sie (b) immer auf dieselbe Weise gebildet werden, daß (c) der Zusammenhang mit dem entsprechenden (nicht-nominalisierten) Prädikat offensichtlich ist und daß sie (d) immer mit einer Form von „haben" wie in II(14) kombinierbar sind.

[40] Die Unterscheidung zwischen „haben" in II(14) und „besitzen" fällt nicht mit der Unterscheidung zwischen „Vollverb" und „Hilfsverb" zusammen, so wie sie in der traditionellen Grammatik üblich ist. Denn gemäß der Schulgrammatik kommt das ‚Hilfsverb' „haben" in Aussagen wie „Ich habe sie geliebt" oder „Klaus hatte das Auto nicht gesehen, bevor der Fahrer hupte" vor. Diese ‚Hilfsverben' unterscheiden sich schon deswegen von dem ‚Hilfsverb' „haben" in II(14), weil sie immer zusammen mit einem Partizip (und nicht mit einem nominalisierten Prädikat) auftreten. Es spricht allerdings viel dafür, die Formen von „haben" in diesen Sätzen nicht als eigenständig, sondern als Teil der Komplexe „habe … geliebt" und „hatte … gesehen" zu analysieren. Genauso wie „liebe", „lieben" und „liebte" sind nach dieser Auffassung „habe … geliebt" und „hatte … geliebt" Wortformen des Wortparadigmas „lieben". („Wortform" und „Wortparadigma" werden in Abschnitt 4 von Kapitel IV genauer erläutert.) Diese These wird unter anderem durch einen Vergleich mit dem Lateinischen gestützt, wo die Endungen von „amavi" und „amaveram" die Funktion von „habe" und „hatte" in „habe … geliebt" und „hatte … geliebt" im Deutschen übernehmen.

Die Form von „haben“ in II(14) sollte also nicht durch das zweistellige Prädikat „x_1 besitzt x_2“ paraphrasiert werden. Darüber hinaus scheint es sehr zweifelhaft, ob II(13) und II(14) wirklich äquivalent sein können, wenn die Form von „haben“ in II(14) Teil eines zweistelligen Prädikates ist. Denn unter der Annahme, daß „x_1 hat x_2“ eine zweistellige Relation ausdrückt und eine bestehende Relation die Existenz der Relata voraussetzt, impliziert II(14) die Existenz der Eigenschaft, schön zu sein, während dies von II(13) nicht impliziert wird. Wenn II(13) und II(14) unterschiedliche logische Konsequenzen haben, können sie aber nicht äquivalent sein. Unmittelbar damit hängt die Vermutung zusammen, daß II(14) im Gegensatz zu II(13) die Existenz von Entitäten voraussetzt, die philosophisch umstritten sind, sich II(13) und II(14) deshalb in Hinblick auf ihre ontologischen Verpflichtungen unterscheiden und aus diesem Grund nicht äquivalent sind.

Es ist wichtig, sich ins Gedächtnis zu rufen, daß das Wort „Eigenschaft“ oben eingeführt wurde, um griffig über die Art und Weise zu reden, wie in Aussagen (also in ‚idealisierten‘ Äußerungen) Prädikate von Sprechern benutzt werden können, um Entitäten zu charakterisieren. Bei der Einführung dieser Redeweise wurde angemerkt, daß ihr Nachteil darin besteht, daß das Vorhandensein eines Sprechers verschleiert wird und außerdem scheinbar abstrakte Entitäten präsupponiert werden.[41] Meistens ist es für eine logische Analyse unnötig einzubeziehen, daß Aussagen immer Aussagen irgendeines Sprechers S sind. In diesem Fall ist es jedoch hilfreich zu berücksichtigen, daß mit II(13) und II(14) folgendes gemeint ist:

---

[41] Es sei nochmals betont, daß diese abkürzende Redeweise keine Antwort auf die Frage impliziert, wie Gegenstände durch den Gebrauch von Prädikaten charakterisiert werden. Konzeptualisten und Realisten bestehen darauf, daß die Art und Weise, wie jemand durch den Gebrauch eines Prädikates einen Gegenstand charakterisiert, sich nur durch die Annahme von nicht-linguistischen Entitäten zufriedenstellend erklären läßt. Aus ihrem Blickwinkel referiert der Ausdruck „die Eigenschaft, schön zu sein“ in II(14) auf eine solche Entität. Dies würden Nominalisten bestreiten. Denn sie sind der Meinung, daß eine vernünftige Erklärung der Charakterisierung eines Gegenstandes durch die Verwendung eines Prädikates keine nicht-linguistischen Entitäten einschließt.

II(16) S behauptet: „Julia ist schön."

II(17) S behauptet: „Julia hat die Eigenschaft, schön zu sein."

Verzichtet man darüber hinaus auf den bequemen, aber in diesem Fall verwirrenden Gebrauch des Wortes „Eigenschaft", läßt sich die Situation in II(17) durch II(18) beschreiben.

II(18) S behauptet, daß Julia durch das Prädikat „x_1 ist schön" zutreffend charakterisiert wird.

Die Aussage II(18) ist aber nur eine andere Formulierung von II(19).

II(19) S charakterisiert Julia durch den Gebrauch des Prädikates „x_1 ist schön".

Durch II(19) wird aber nicht nur die Situation in II(17) beschrieben, sondern ebenfalls die Situation in II(16). Durch den Gebrauch von II(14) wird Julia von S auf dieselbe Weise charakterisiert wie durch II(13). – Was bedeutet dieses Ergebnis für unser Verständnis von „haben" in Aussagen wie II(14)? Durch die Form von „haben" in II(14) wird syntaktisch markiert, daß das dem nominalisierten Prädikat entsprechende Prädikat verwendet wird, um den Gegenstand, der mit Julia bezeichnet wird, zu charakterisieren. Kürzer: Durch „haben" wird die Prädikation syntaktisch markiert.[42]

Das Ergebnis der Untersuchung von einstelligen Prädikaten läßt sich auf mehrstellige Prädikate übertragen, auch wenn manche Formulierungen etwas künstlich klingen.

II(20) John und Julia haben die Eigenschaft, daß der Erstgenannte die Zweitgenannte liebt.

[42] Es gibt neben „haben" auch andere Ausdrücke, die dieselbe Funktion übernehmen können, beispielsweise der Ausdruck „kommt … zu" in der Aussage „Julia kommt die Eigenschaft, schön zu sein, zu."

II(21) Bielefeld, Kopenhagen und Mailand haben die Eigenschaft, daß das Erstgenannte zwischen dem Zweitgenannten und dem Drittgenannten liegt.

Folgt man dieser Analyse, dann ist die Bedeutung von „haben“ in Aussagen wie II(14), II(20) und II(21) zufriedenstellend geklärt. „Haben“ ist eine syntaktische Markierung der Prädikation. Bei der Prädikation handelt es sich um eine Sprachhandlung, daher wird durch „haben“ keine Relation ausgedrückt, und deshalb ist es nicht der Fall, daß die Aussagen II(14), II(20) und II(21) die Existenz von Entitäten implizieren, die nicht durch die entsprechenden Aussagen ohne nominalisierte Prädikate impliziert würden.

Der Zusammenhang zwischen Aussagen wie II(13) und Aussagen wie II(14) wird durch das folgende *Prädikationsschema* festhalten:[43]

$$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d \text{ genau dann, wenn } F^d(k_1, \ldots, k_d) \ (0 \leq d)$$

In dem Prädikationsschema wird das Symbol „$\leftarrow$“ als Zeichen für die Prädikation (und damit als formales Substitut für eine Form von „haben“) verwendet. $k_1, k_2, \ldots, k_d$ stehen für beliebige Namen oder nominalisierte Prädikate.[44] In dem Ausdruck „$F^d(k_1, \ldots, k_d)$“ wird „F^d“ für ein d-stelliges

[43] Die folgende Notation macht Anleihen bei Wessels nichttraditioneller Prädikationstheorie. Das Prädikationszeichen „$\leftarrow$“ ist in der nichttraditionellen Prädikationstheorie der Prädikationsoperator des Zusprechens, dem ein Prädikationsoperator des Absprechens „$\not\leftarrow$“ zur Seite gestellt wird, wobei sich „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$“ und „$k_1, k_2, \ldots, k_d \not\leftarrow F^d$“ konträr zueinander verhalten. Wessel unterscheidet nicht zwischen „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$“ und „$F^d(k_1, \ldots, k_d)$“, sondern führt „$F^d(k_1, \ldots, k_d)$“ als Abkürzung von „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$“ ein, vgl. Wessel (1998). (Wessels Notation wurde der in dieser Arbeit verwendeten angeglichen.) Siehe auch Sinowjew und Wessel (1975) sowie Wessel (1982).

[44] Wenn F^d ein Prädikat ist, das eine Proposition ausdrückt, dann gilt $d = 0$. In diesem Spezialfall nimmt das Prädikationsschema die folgende Form an:

$$\leftarrow F^0 \text{ genau dann, wenn } F^0(\ )$$

In diesem Kontext sollte man „$\leftarrow$“ nicht als „hat“, sondern als „es ist der Fall“ lesen. Beispielsweise könnte „$F^0(\ )$“ für das nullstellige Prädikat „es regnet“ und „$\leftarrow F^0$“ für das nullstellige nominalisierte Prädikat „daß es regnet“ stehen. Dann wird durch „$\leftarrow F^0$ genau dann, wenn $F^0(\ )$“ die Aussage „Es ist der Fall, daß es regnet, genau dann, wenn es regnet“ dargestellt.

Prädikat verwendet und in „k_1, k_2, …, k_d ← F^d" für das entsprechende nominalisierte Prädikat. Dadurch, daß für das Prädikat und für das entsprechende nominalisierte Prädikat dasselbe Symbol gewählt wurde, scheint der Unterschied zwischen den beiden verwischt zu werden. Eine Unterscheidung zwischen Prädikaten und den ihnen entsprechenden nominalisierten Prädikaten wird in der verwendeten Notation dadurch ermöglicht, daß ein Vorkommen des Zeichens „F" genau dann für ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat steht, wenn sich das Vorkommen von „F" vor einer in Klammern eingeschlossenen, durch Kommata getrennten Aufzählung von Zeichen befindet.[45]

Das Prädikationsschema dient dazu, den Zusammenhang zwischen Aussagen wie II(14), in denen eine Form von „haben" und ein nominalisiertes Prädikat vorkommen, und Aussagen wie II(13), in denen das entsprechende (nicht-nominalisierte) Prädikat gebraucht wird, darzustellen. In beiden Typen von Aussagen wird ein Prädikat F^d (von dem Sprecher) verwendet, um die Subjekte k_1, …, k_d zu charakterisieren, beziehungsweise – kürzer formuliert – in beiden Typen von Aussagen wird die Eigenschaft F^d von den Subjekten k_1, …, k_d prädiziert. Sie unterscheiden sich nur in der Art und Weise, wie die Prädikation sprachlich umgesetzt wird.

[45] Unter Umständen kann zwischen den Klammern überhaupt kein oder nur ein Zeichen eingeschlossen sein, nämlich wenn das Prädikat nullstellig oder einstellig ist.
Castañeda markiert den Unterschied zwischen Prädikaten und nominalisierten Prädikaten, indem er die Vorkommen von Symbolen für nicht-nominalisierte Prädikate doppelt unterstreicht. Diese doppelte Unterstreichung ist – wie Cocchiarella gezeigt hat – in Castañedas System insofern überflüssig, als daß der Verzicht auf diese Notation zu einem deduktiv äquivalenten System führt. Trotzdem besteht Castañeda auf seiner Notation, weil er glaubt, daß der Unterschied zwischen Prädikaten und ihren Nominalisierungen ontologisch bedeutsam ist und daß sich ontologische Unterschiede in der logischen Syntax widerspiegeln sollten. Da in dieser Arbeit keine ontologischen Ziele verfolgt werden, kann auf Castañedas doppelte Unterstreichung verzichtet werden. Siehe Castañeda (1976).

3 Prädikation

Ein Teil des bisherigen Arguments läßt sich wie folgt zusammenfassen: Das Wort „Prädikation" wurde als Name für die Sprachhandlung eingeführt, die ein Sprecher vollzieht, wenn er Entitäten durch den Gebrauch von Prädikaten charakterisiert.[46] Da Handlungen keine Relationen sind und „hat" in II(14) verwendet wird, um das nominalisierte Prädikat „die Eigenschaft, schön zu sein" von Julia zu prädizieren, drückt „haben" in II(14) keine Relation aus. Aus diesem Grund setzen Aussagen wie II(14) keine Entitäten voraus, die nicht bereits durch Aussagen wie II(13) vorausgesetzt werden, selbst wenn man davon ausgeht, daß eine bestehende Relation die Existenz der Relata präsupponiert.

Den Ausgangspunkt dieses Arguments kann man jedoch mit guten Gründen in Frage stellen: Was spricht dagegen, Prädikation als Relation aufzufassen? Die Verwendung von „haben" in II(14), II(20) und II(21) ähnelt der Verwendung der philosophischen Termini „exemplifizieren" und „instantiieren" in den Aussagen II(22)-II(24), und Exemplifikation und Instantiation werden wenigstens von einigen Philosophen als Relationen aufgefaßt.[47]

II(22) Julia exemplifiziert die Eigenschaft, schön zu sein.

II(23) Julia instantiiert die Eigenschaft, schön zu sein.

II(24) John und Julia instantiieren die Eigenschaft, daß der Erstgenannte die Zweitgenannte liebt.

Daher liegt es nahe, „haben" – wie beispielsweise Bealer und Mönnich – als Prädikat aufzufassen, das eine Relation, genauer gesagt: die Prädikationsrelation, ausdrückt.[48] Dieses Vorgehen beseitigt die Sonderstellung von

[46] Siehe Seite 24.
[47] Siehe beispielsweise Orilia (1991).
[48] Vgl. Bealer und Mönnich (1989), S. 198.

„haben“ und klärt gleichzeitig, welche Funktion das Zeichen „←“ hat, nämlich ein ausgezeichnetes Prädikat zu symbolisieren.

Angenommen, bei „haben“ handelt es sich tatsächlich um ein Prädikat, das die Prädikation ausdrückt. Um dies angemessen zu repräsentieren, wird anstatt „←“ das Zeichen „$\mathcal{P}$“ für dieses Prädikationsprädikat verwendet. Das Prädikationsschema erhält dann folgende Form:

$$\mathcal{P}(k_1, k_2, \ldots, k_d, F^d) \text{ genau dann, wenn } F^d(k_1, \ldots, k_d)$$

Das erste Problem, das man bei dieser Konzeption zu lösen hat, ist die Frage nach der Stelligkeit von „$\mathcal{P}$“ beziehungsweise des Prädikates „x_1 hat x_2“. Es scheint so, daß sie immer um eins größer als die Stelligkeit des Prädikates ist, das prädiziert wird; beispielsweise zweistellig in II(14), dreistellig in II(20) und vierstellig in II(21). Aus diesem Grund droht das Prädikationsprädikat $\mathcal{P}$ in unendlich viele verschiedenstellige Prädikate $\mathcal{P}^2$, $\mathcal{P}^3$, $\mathcal{P}^4$, … zu zerfallen. Um an der These, daß es ein einziges Prädikationsprädikat gibt, festhalten zu können, bieten sich zwei Strategien an: Einerseits kann man „John und Julia“ als Name für das aus John und Julia gebildete Paar auffassen, dann ist das Prädikat von II(20) zweistellig. Generalisiert man diese Strategie, dann ist $\mathcal{P}$ ein zweistelliges Prädikat, wobei die erste Stelle von einem n-Tupel besetzt wird. Andererseits kann man die These ablehnen, daß jedes Prädikat eine festgelegte Stelligkeit besitzt, und das Prädikationsprädikat als Beispiel für ein multistelliges Prädikat präsentieren.[49]

[49] Andere Beispiele für Prädikate, bei denen man dafür argumentieren könnte, daß sie keine festgelegte Stelligkeit haben, sind: „… raubten … aus“, „… arbeiten gut zusammen“, „… retten …“. Vgl. Swoyer (2000).

Wenn die These, daß es ein einziges Prädikationsprädikat gibt, gerettet werden soll, indem $\mathcal{P}$ als zweistelliges oder als multistelliges Prädikat aufgefaßt wird, hat das Prädikationsschema für das Prädikationsprädikat eine auffallende Konsequenz: Angenommen, eine Aussage F(k) sei wahr. Es folgt aufgrund des Prädikationsschemas, daß $\mathcal{P}$(k, F) wahr ist. Weil $\mathcal{P}$ ebenfalls ein Prädikat ist, läßt sich das Prädikationsschema auch auf $\mathcal{P}$(k, F) anwenden, daher ist $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$) wahr. Aufgrund derselben Überlegung sind auch $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), … wahr. Dies führt zu logischen Schwierigkeiten, weil bei einer normalen Referenzsemantik eine Aussage $F^d(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ genau dann wahr bezüglich eines Modells (bestehend aus einem Interpretationsbereich D und einer Interpretationsfunktion I) ist, wenn $<I(k_1), \ldots, I(k_d)> \in I(F^d)$. Da in dem Beispiel aus der Annahme, daß F(k) wahr ist, folgt, daß unter anderem $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$) wahr ist, bedeutet dies, daß in jedem Modell, in dem F(k) wahr ist, $<I(k), I(F), I(\mathcal{P})> \in I(\mathcal{P})$ gilt. Da dies in einer Standard-Mengentheorie ausgeschlossen ist, bedarf es einer alternativen Semantik oder einer Nicht-Standard-Mengentheorie in der Metasprache.

Deutlich schwieriger, als eine angemessene formale Semantik zu konstruieren, welche als logische Konsequenzen von F(k) die Formeln $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$), $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), $\mathcal{P}$(k, F, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$), … garantiert, ist es aber, eine befriedigende philosophische Erklärung dafür zu finden, weshalb diese Formeln aus F(k) folgen sollten. Denn wenn man die in der halbformalen Sprache vollzogenen Schlüsse anhand von Beispielen betrachtet, sieht man, daß die Resultate kaum verständlich sind.

II(25) Julia schläft.

II(26) Julia hat die Eigenschaft zu schlafen.

II(27) Julia und die Eigenschaft zu schlafen haben die Eigenschaft, daß das Erstgenannte das Zweitgenannte hat.

II(28) Julia, die Eigenschaft zu schlafen und die Eigenschaft, daß das Erstgenannte das Zweitgenannte hat, haben die Eigenschaft, daß das Erstgenannte und das Zweitgenannte das Drittgenannte haben.

...

Wie man das Wort „Prädikation“ im einzelnen auch ausführt, es dient dazu zu fassen, daß Namen (gegebenenfalls auch nominalisierte Prädikate oder andere Ausdrücke) und Prädikate verbunden werden, um Aussagen zu bilden. Eine Erklärung des Wortes „Prädikation“, die dieses Kriterium nicht erfüllt, ist einfach inadäquat. Aus diesem Grund resultiert für die Annahme, daß die Prädikation eine Relation ist, eine große Schwierigkeit daraus, daß in II(25) weder das Prädikat „x_1 hat x_2“ noch ein anderes mehrstelliges Prädikat vorkommt, das die Prädikationsrelation ausdrücken könnte. Das führt zu der sehr merkwürdigen Konsequenz, daß in II(25) prädiziert wird (wie sollte man leugnen, daß in II(25) ein Name und ein Prädikat verwendet werden, um eine Aussage zu bilden?), aber die Prädikationsrelation in II(25) nicht ausgedrückt wird.

Eine andere Seite desselben Problems besteht darin zu erklären, wie Aussagen aus Namen und Eigenschaften gebildet werden, wenn die Prädikation selbst eine Relation ist, die durch „x_1 hat x_2“ ausgedrückt wird. Wie entstehen aus dem Namen „Julia“ und dem einstelligen Prädikat „x_1 schläft“ beziehungsweise dem Namen „Julia“, dem nominalisierten Prädikat „die Eigenschaft zu schlafen“ und dem Prädikat „x_1 hat x_2“ die Aussagen II(25) beziehungsweise II(26)? Auf diese Fragen läßt sich nur sehr schwer eine befriedigende Antwort finden, wenn man an der Annahme festhält, daß die Prädikation eine Relation ist.

Diese Schwierigkeiten ergeben sich nicht, wenn man die Prädikation nicht als Relation, sondern als Handlung eines Sprechers auffaßt, und zwar diejenige, aus Namen und nominalisierten Prädikaten (sowie gegebenenfalls anderen Ausdrücken) auf der einen Seite und Prädikaten auf der anderen Seite Aussagen zu bilden. Daher wird die Annahme, daß es sich bei der Prädikation um eine Relation handelt, zu Gunsten dieser Ausgangsthese verworfen.

Nachdem begründet worden ist, weshalb es vorteilhafter ist, die Prädikation nicht als Relation, sondern als Handlung eines Sprechers aufzufassen, wird im folgenden dargelegt, welche Konsequenzen das für den Ausdruck „haben“ beziehungsweise das entsprechende formale Zeichen „←“ hat. Von „haben“ wurde als „syntaktischer Markierung der Prädikation“ und von „←“ in der verwendeten halbformalen Notation als „Prädikationszeichen“ gesprochen. Doch was soll das konkret heißen? Aus der These, daß die Prädikation keine Relation ist, läßt sich folgern, daß „haben“ kein Prädikat und „←“ kein Symbol für ein Prädikat ist. Das ist jedoch nur eine negative Charakterisierung, sie läßt viele Fragen offen: Unter anderem ist ungeklärt, welchen Status das Symbol „←“ hat und welche Stelligkeit es besitzt. Da es weder eine Individuenkonstante noch ein Symbol für ein Prädikat oder eine Variable ist, scheint nur „Operator“ als syntaktische Kategorie übrig zu bleiben. Offenbar handelt es sich aber weder um einen aussagenlogischen Operator noch um einen Quantor. Aus diesem Grund läßt sich „←“ auch in dieser syntaktischen Kategorie schlecht einordnen.

Das Symbol „←“ wurde eingeführt, um Aussagen vom Typ II(14) derart formalisieren zu können, daß „haben“ keine Relation ausdrückt und so die Äquivalenz zu den Aussagen gewährleistet ist, in denen das Prädikat nicht nominalisiert verwendet wird. Wie bereits betont wurde, handelt es sich bei II(13) und II(14) um dieselbe Prädikation, die nur unterschiedlich sprachlich formuliert wurde. Dieser sprachliche Unterschied spiegelt sich in der verwendeten Notation darin wider, daß Aussagen vom Typ II(13) durch das Formelschema $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ und Aussagen vom Typ II(14) durch das Formelschema $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ repräsentiert werden. Da aber durch diese unterschiedliche Notation nur sprachlichen, aber nicht logischen Differenzen Rechnung getragen wird, löst sich das Rätsel um „$\leftarrow$": Das Symbol „$\leftarrow$" hat in „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$" dieselbe Funktion wie die runden Klammern in „$F^d(k_1, \ldots, k_d)$" und ist deshalb ebenso wie die runden Klammern nicht als Operator, sondern als Hilfszeichen einzuordnen. Aus diesem Grund ist die Frage nach der Stelligkeit von „$\leftarrow$" ebenso unangebracht, wie es die Frage nach der Stelligkeit der runden Klammern wäre. Dieses Resultat überträgt sich von „$\leftarrow$" auf „haben" in Kontexten wie in II(14). „Haben" ist gemäß dieser Analyse ein Synsemantikon, dessen Aufgabe darin besteht, aus einer Anzahl von Subjekttermini und einem nominalisierten Prädikat eine Aussage zu bilden. Der Terminus der traditionellen Logik für ein solches Synsemantikon lautet „Kopula".

Der wesentliche Unterschied zwischen einer Aussage $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ und der entsprechenden Aussage $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ besteht darin, daß d Subjekttermini in $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ und (d+1) Subjekttermini in $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ vorkommen, weil das Prädikat in $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ nominalisiert auftritt. Dieses nominalisierte Prädikat übernimmt zusammen mit der Kopula die Funktion des (nicht-nominalisierten) Prädikates in $F^d(k_1, \ldots, k_d)$, deswegen wird es auch als „*prädikativ gebrauchtes nominalisiertes Prädikat*" bezeichnet. Die Stelligkeit des prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikates einer Aussage $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ legt fest, wie viele Subjekttermini auf der linken Seite des Symbols „$\leftarrow$" stehen. Die von diesen Subjekttermini bezeichneten Subjekte werden „*Argumente*" der Aussage $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ genannt. Der Terminus „Argument" wird ebenfalls verwendet, um die Subjekte einer Aussage vom Typ $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ zu bezeichnen. Zwei einander entsprechende Aussagen $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ und $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$ haben also dieselben Argumente, nämlich $k_1, \ldots, k_d$. Jedoch unterscheiden sie sich bezüglich ihrer Subjekte, da ein prädikativ gebrauchtes nominalisiertes Prädikat in $k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$, aber nicht in $F^d(k_1, \ldots, k_d)$ vorkommt.

Das wichtigste Resultat der letzten beiden Abschnitte besteht darin, daß es zwei Möglichkeiten gibt, eine Prädikation sprachlich zu vollziehen. Bei der einen Möglichkeit wird dazu ein Prädikat, bei der anderen Möglichkeit das entsprechende nominalisierte Prädikat und eine Form der Kopula „haben“ verwendet. Da beides verschiedene sprachliche Realisierungen derselben Prädikation sind, ist es bei einer logischen Analyse hinreichend, nur eine der beiden Möglichkeiten zu berücksichtigen. Die jeweils andere Redeweise läßt sich über das Prädikationsschema wieder einführen. Dieses Ergebnis wird es ermöglichen, sich auf Aussagen zu konzentrieren, die keine (nicht-nominalisierten) Prädikate enthalten.

4 Nominale Quantifikation

Bisher wurden nominalisierte Prädikate vorwiegend in Aussagen wie II(14) betrachtet. Da diese Aussagen nur eine andere sprachliche Realisierung von Aussagen sind, in der die Kopula „haben“ nicht vorkommt, ist es eine berechtigte Frage, ob man nicht gänzlich auf nominalisierte Prädikate verzichten und den Begriff „einfaches Prädikat“ ausschließlich über das Herausstreichen von Namen definieren könnte.[50]

Diese Frage ist für die vorliegende Arbeit deshalb von großer Bedeutung, weil nominalisierte Prädikate verwendet werden können, um über Eigenschaften zu reden, und die entsprechenden Leerstellen in einfachen Prädikaten durch Quantoren der natürlichen Sprachen gebunden werden können, um über Eigenschaften zu quantifizieren.[51] In der Einleitung wurde

[50] Einige Philosophen – beispielsweise Quine – sind daran interessiert, Aussagen mit nominalisierten Prädikaten auf Aussagen ohne nominalisierte Prädikate zurückzuführen, weil sie der Meinung sind, daß die Verwendung von nominalisierten Prädikaten zu ontologischen Verpflichtungen führt, die sie vermeiden wollen. Vgl. Quine (1970), S. 68ff.
[51] Auf die Quantifikation über Eigenschaften wird weiter unten eingegangen.

das Ziel, ein logisches System zu entwickeln, das die Prädikation und Quantifikation über Eigenschaften zuläßt, dadurch begründet, daß das Verbot dieser Prädikationen und Quantifikationen ein Überbleibsel von Russells doppelter Hierarchie ist. Würde es sich zeigen lassen, daß sich nicht alle Prädikationen oder Quantifikationen über Eigenschaften durch geschickte Paraphrasen eliminieren lassen, dann wäre gezeigt, daß ein System, das Quantifikationen und Prädikationen über Eigenschaften formal repräsentieren kann, der Prädikatenlogik erster Stufe insofern überlegen wäre, daß es Aussagen der natürlichen Sprachen darstellen kann, die mit Hilfe der Prädikatenlogik erster Stufe nicht formalisierbar sind. In diesem Fall würde der systematischen Motivation eine inhaltliche Begründung für die Entwicklung eines solchen logischen Systems zur Seite gestellt.

Zunächst läßt sich feststellen, daß sich durch die Anwendung des Prädikationsschemas nur prädikativ gebrauchte nominalisierte Prädikate eliminieren lassen, aber nicht andere Vorkommen von nominalisierten Prädikaten; beispielsweise wird in Sätzen wie II(29) oder II(30) neben einem (nicht-nominalisierten) Prädikat ein nominalisiertes Prädikat verwendet.

II(29) Die Relation, ein Kind von jemandem zu sein, ist irreflexiv.

II(30) Die Eigenschaft, sportlich zu sein, gefällt Julia.

II(31) $IRR^1(KIND^2)$

II(32) $GEF^2(SPORT^1, j)$

Durch II(31) wird angedeutet, wie eine Formalisierung von II(29) in einem System aussehen könnte, das aus der Prädikatenlogik der ersten Stufe entsteht, wenn nominalisierte Prädikate als Subjekttermini zugelassen werden. Der Einfachheit halber werden Namen durch kleine Buchstaben und nominalisierte oder nicht-nominalisierte Prädikate durch suggestive Kombinationen von Großbuchstaben repräsentiert. Dabei steht – wie bereits im Prädikationsschema – ein Vorkommen eines solchen Prädikaten-Kürzels für ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat, wenn es sich vor einer in Klammern eingeschlossenen, durch Kommata getrennten Aufzählung von Prädikaten-Kürzeln und kleinen Buchstaben befindet. In allen anderen Fällen steht das Prädikaten-Kürzel für das entsprechende nominalisierte Prädikat. Die Stelligkeit von (nominalisierten oder nicht-nominalisierten) Prädikaten wird durch ein Superskript angegeben. Beispielsweise symbolisiert „IRR^1" in II(31) das Prädikat „x_1 ist irreflexiv" und „$KIND^2$" das zweistellige nominalisierte Prädikat „die Relation, ein Kind von jemanden zu sein". II(32) symbolisiert II(30).

Viele der Aussagen wie II(29) und II(30), in denen über Eigenschaften prädiziert wird, lassen sich in Aussagen überführen, in denen keine nominalisierten Prädikate vorkommen. II(33) ist beispielsweise eine solche Paraphrase von II(29). Wie man an der dazugehörigen Formalisierung II(34) ablesen kann, ist II(33) in der Prädikatenlogik der ersten Stufe darstellbar.[52]

II(33) Niemand ist ein Kind von sich selbst.

II(34) $\forall x\ (\sim KIND^2(x, x))$

Die Aussage II(30) auf diesem Weg von dem Vorkommen des nominalisierten Prädikates zu befreien, ist allerdings deutlich schwieriger. Die Aussage II(35) ist keine angemessene Paraphrase von II(30), weil Sportlichkeit sicherlich nicht die einzige Eigenschaft ist, die darüber entscheidet, ob eine Person Julia gefällt.

II(35) Wenn eine Person sportlich ist, dann gefällt sie Julia.

[52] Inwieweit sich die Verwendung von Eigenschaften beziehungsweise Mengen als bequeme Redeweise auffassen läßt, wird ausführlich von Quine behandelt. Siehe Quine (1970), S. 68ff.

II(36) Wenn eine Person sportlich ist, dann gefällt diese Person Julia besser, als wenn sie (unter sonst gleichen Bedingungen) nicht sportlich wäre.

Die Aussage II(36) könnte vielleicht als akzeptable Paraphrase von II(30) in Frage kommen, aber der Verzicht auf nominalisierte Prädikate wurde in II(36) durch die Verwendung von „besser“ und eines irrealen Konditionalsatzes erkauft; II(36) läßt sich deshalb nicht in der Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe darstellen.

Auch wenn es bei einzelnen Beispielen schwierig ist, auf Anhieb eine Paraphrasierung zu finden, die ohne nominalisierte Prädikate auskommt, so schließt das nicht aus, daß es mit einigem Aufwand letztlich möglich ist, jede Aussage, die ein nominalisiertes Prädikat enthält, in eine Aussage ohne nominalisierte Prädikate zu überführen. Wäre dies der Fall, so könnte man gänzlich auf nominalisierte Prädikate verzichten und ihre Verwendung als abgekürzte Redeweise auffassen.

Doch die nominalisierten Prädikate eröffnen zusammen mit der Kopula „haben“ auch neue Möglichkeiten für die Quantifikation. So folgt aus II(37) nicht nur II(38), sondern auch II(40).

II(37) Julia hat die Eigenschaft, schön zu sein.

II(38) Es gibt jemanden, der die Eigenschaft hat, schön zu sein.

II(39) Es gibt jemanden, und derjenige hat die Eigenschaft, schön zu sein.

II(40) Es gibt eine einstellige Eigenschaft, die Julia hat.

II(41) Es gibt etwas, und Julia hat genau das.

Obwohl es intuitiv einsichtig ist, daß II(38) aus II(37) folgt, wird der Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen dadurch verschleiert, daß ein Teil des sprachlichen Materials des Hauptsatzes II(37) in II(38) zu einem Relativsatz reformuliert wird. Die Beziehung zwischen II(37) und II(38) wird deutlicher, wenn man sich eine Paraphrase von II(38), nämlich II(39), anschaut. II(39) ergibt sich aus II(37), indem für den Namen „Julia" das Wort „derjenige" eingesetzt wird und dem Satz der Ausdruck „es gibt jemanden" vorangestellt wird. Der Platzhalter „derjenige" erfüllt die Funktion einer Variablen, die durch den Ausdruck „es gibt jemanden" gebunden wird, der die Aufgabe eines Existenzquantors übernimmt.

Dieser Zusammenhang wird in der formalen Repräsentation dadurch erfaßt, daß II(37) durch „$j \leftarrow \text{SCHÖN}^1$" und II(39) beziehungsweise II(38) durch „$\exists x\ x \leftarrow \text{SCHÖN}^1$" dargestellt werden. Völlig analog verhalten sich II(41) sowie II(40), nur daß in der Aussage II(41) nicht der Name „Julia", sondern das nominalisierte Prädikat „die Eigenschaft, schön zu sein" gestrichen und die entsprechende Leerstelle unter Verwendung des Platzhalters „das" gebunden wird. Das Resultat ist eine Aussage, in der über Eigenschaften quantifiziert wird. (Da II(40) und II(41) aus II(37) entstehen, handelt es sich bei den Vorkommen von „hat" in diesen Aussagen um die Kopula.)

Gegen die Umformulierung von II(41) in II(40) könnte man einwenden, daß der Quantor in II(41) nicht spezifisch ist, weil „etwas" alles sein kann, während in II(40) nur über einstellige Eigenschaften quantifiziert wird. Daß es sinnvoll ist, das „etwas" in II(41) nicht als unspezifischen Quantor zu interpretieren, ergibt die Betrachtung der Aussagen II(42)-II(45).

II(42) Für alles gilt: Wenn Marta es hat, dann hat Julia es.

II(43) Wenn Marta die Eigenschaft hat, glücklich zu sein, hat Julia die Eigenschaft, glücklich zu sein.

II(44) Wenn Marta die Museumsinsel hat, dann hat Julia die Museumsinsel.

II(45) Wenn Marta die Eigenschaft hat, daß die Erstgenannte den Zweitgenannten liebt, dann hat Julia die Eigenschaft, daß die Erstgenannte den Zweitgenannten liebt.

Die Quantifikation in II(42) soll analog zu der Quantifikation in II(41) aufgefaßt werden; bei den Vorkommen von „hat" in II(42) handelt es sich um die Kopula und „alles" ist ebenso wie „etwas" in II(41) ein Quantor, von dem man annehmen könnte, daß er unspezifisch sei. Wäre das Vorkommen von „alles" in II(42) ein unspezifischer Quantor, dann würde in II(42) auch über Gegenstände und zweistellige Eigenschaften quantifiziert werden, und es wären nicht nur II(43), sondern auch II(44) und II(45) logische Konsequenzen von II(42). II(45) ist aber eine inakzeptable Schlußfolgerung aus II(42), weil das erste Vorkommen des nominalisierten Prädikates auf zwei vorher genannte Personen verweist, jedoch vorher nur eine Person erwähnt wurde. Linguistisch gesehen ist II(45) ein Beispiel für eine mißlungene anaphorische Textdeixis, aus logischer Perspektive ist II(45) kein Satz, sondern eine Aussagefunktion, weil II(45) im Gegensatz zu II(43) (mindestens) eine freie Variable enthält.

Dagegen läßt sich gegen die Aussage II(44) weder aus logischen noch aus linguistischen Gründen etwas einwenden – wenigstens so lange, wie das Vorkommen von „hat" in II(44) nicht als Kopula interpretiert wird. II(44) ist eine sinnvolle Aussage, wenn man „haben" als „in Besitz haben", „besitzen" oder „gehören" interpretiert. Unter dieser Interpretation von „haben" ist II(44) eine andere Formulierung für II(46).

II(46) Wenn Marta die Eigenschaft, die Museumsinsel zu besitzen, hat, dann hat Julia die Eigenschaft, die Museumsinsel zu besitzen.

II(46) folgt ebenso wie II(43) aus II(42), weil die Eigenschaft, die Museumsinsel zu besitzen, ebenso wie die Eigenschaft, glücklich zu sein, eine einstellige Eigenschaft ist. Wenn man „haben“ in II(44) als „besitzen“ auffaßt, dann ist also die Tatsache, daß II(44) aus II(42) folgt, damit vereinbar, daß in II(42) nur über einstellige Eigenschaften quantifiziert wird.

Keine sinnvolle Lesart ergibt sich jedoch, wenn man annimmt, daß II(44) aus II(42) folgt, weil „etwas“ in II(42) ein unspezifischer Quantor ist, mit dem auch über Gegenstände quantifiziert wird, und daß II(44) aus II(42) entsteht, indem man den Eigennamen „die Museumsinsel“ für den Platzhalter „es“ einsetzt. Denn in diesem Fall wäre „haben“ in II(44) keine Relation mit der Bedeutung „gehören“, sondern es wäre wie in II(42) die Kopula. In diesem Fall wäre aber II(44) ungrammatisch. Denn die Kopula „haben“ wird stets zusammen mit einem nominalisierten Prädikat gebraucht, um Subjekte zu charakterisieren, und „die Museumsinsel“ ist kein nominalisiertes Prädikat. Ein gutes Kriterium dafür, welche sprachlichen Ausdrücke ‚die rechte Seite‘ der Kopula „haben“ besetzen können, bietet das Prädikationsschema: Daran, daß sich „Marta hat die Museumsinsel“ nicht durch die Anwendung des Prädikationsschemas zu einer Aussage umformen läßt, in der die Kopula „haben“ nicht vorkommt, sieht man, daß der Satz ungrammatisch ist, wenn „haben“ als Kopula aufgefaßt wird.

Wenn das Vorkommen von „für alles gilt“ in II(42) ein unspezifischer Quantor wäre, würde mit diesem Quantor nicht nur über einstellige Eigenschaften, sondern über Gegenstände und mehrstellige Eigenschaften quantifiziert werden. In diesem Fall wären II(44) (mit der Kopula-Lesart für „hat“) und II(45) logische Konsequenzen aus II(42). Da es sich bei II(44) (in der genannten Lesart) und bei II(45) um ungrammatische Sätze handelt, würden also bei der Beseitigung des Quantors in II(42) ungrammatische Sätze entstehen können. Aus diesem Grund ist es vorzuziehen, das Vorkommen in II(42) von „für alles gilt“ als „für jede einstellige

Eigenschaft gilt“ zu interpretieren. Dies läßt sich auf II(41) übertragen, so daß II(40) eine angemessene Paraphrase von II(41) ist.

Die Verallgemeinerung der vorangegangenen Überlegung läßt sich wie folgt zusammenfassen: Mindestens einige Quantoren, vielleicht alle Quantoren der natürlichen Sprachen sind sortal, das heißt, daß die durch einen Quantor gebundenen anaphorischen Ausdrücke (die Platzhalter) entweder ausschließlich durch Namen oder ausschließlich durch nominalisierte Prädikate einer bestimmten Stelligkeit substituiert werden können. Dies muß bei einer angemessenen Formalisierung berücksichtigt werden. Variablen, die durch d-stellige nominalisierte Prädikate ersetzt werden können, werden durch den Superskript „d“ gekennzeichnet, Variablen, die durch Namen ersetzt werden können, bekommen das Superskript „-1“. Unter der Verwendung dieser Konvention werden II(38) durch „$\exists x^{-1}\ x^{-1} \leftarrow \text{SCHÖN}^{1}$“ und II(40) durch „$\exists x^{1}\ j \leftarrow x^{1}$“ dargestellt. Wenn die Art der Variable keine Rolle spielt oder aus dem Kontext klar wird, werden die Superskripte weggelassen.

Gehen wir nach diesem kleinen Exkurs wieder der Frage nach, ob nicht die ursprüngliche Definition von „einfaches Prädikat“ als das Resultat des Herausstreichens von Namen aus Aussagen wieder aufgenommen und auf die Annahme von nominalisierten Prädikaten verzichtet werden könnte. Selbst wenn es möglich sein sollte, jedes Vorkommen von nominalisierten Prädikaten in einer Aussage durch eine geeignete Paraphrase zu eliminieren, so läßt sich beweisen, daß sich nicht jede Quantifikation über Eigenschaften durch Umformulieren aus dem Weg räumen läßt. Das bekannteste Beispiel für eine Aussage, bei der eine solche Paraphrasierung nicht möglich ist, stammt von Geach und Kaplan:[53]

II(47) Some critics admire only one another.

[53] Wenigstens ordnet es Quine Geach und Kaplan zu. Siehe Quine (1990), S. 111.

Da Boolos andeutet, daß II(47) ambivalent und in einigen Lesarten kein grammatischer englischer Satz ist, verwende ich die Übersetzung eines Beispiels von Boolos.[54]

II(48) Es gibt einige Schützen, von denen jeder in den rechten Fuß eines anderen geschossen hat.

Die Aussage II(48) soll bedeuten, daß es eine Gruppe von Schützen gibt, die sich dadurch auszeichnen, daß jeder Schütze aus dieser Gruppe einen anderen Schützen dieser Gruppe in den rechten Fuß geschossen hat. Der Grund dafür, daß sich II(48) (und dasselbe gilt für die intendierte Lesart von II(47)) nicht innerhalb der Prädikatenlogik der ersten Stufe formalisieren läßt, besteht darin, daß nicht – wie man auf den ersten Blick vermuten könnte – über Schützen, sondern über Gruppen von Schützen quantifiziert wird. Diese Lesart wird dadurch erzwungen, daß sich der Platzhalter „eines anderen“ auf die Mitglieder der Gruppe von Schützen bezieht, die durch den Quantor „es gibt einige Schützen“ ausgewählt wurde. Der Zusammenhang zu nominalisierten Prädikaten wird durch II(49), eine etwas umständliche Umformung von II(48), deutlich.

II(49) Es gibt eine einstellige Eigenschaft (nämlich die Eigenschaft, einer bestimmten Gruppe von Schützen anzugehören) derart, daß es jemanden gibt, der diese Eigenschaft hat, und für jede Person gilt, daß, wenn sie diese einstellige Eigenschaft hat, es eine andere Person gibt, die ebenfalls diese einstellige Eigenschaft hat und der von der erstgenannten Person in den rechten Fuß geschossen wurde.[55]

[54] Siehe Boolos (1998). In Boolos’ Aufsatz werden verschiedene Beispiele für Sätze, die sich nicht in der Prädikatenlogik erster Stufe formalisieren lassen, ausführlich diskutiert.

[55] Genaugenommen handelt es sich bei dem Prädikat „x_2 wurde von x_1 in den rechten Fuß geschossen“ in II(49) um ein anderes Prädikat als bei „x_1 hat x_2 in den Fuß geschossen“ in II(48). Dieser Unterschied wird vernachlässigt, weil II(49) ansonsten noch komplizierter werden würde.

Eine angemessene Formalisierung innerhalb einer Logik zweiter Stufe von II(48) beziehungsweise II(49) ist II(50), wobei „G(x, y)“ das Prädikat „x hat y in den rechten Fuß geschossen“ repräsentiert.

$$\text{II(50)}\quad \exists X(\exists x\, X(x) \wedge \forall x(X(x) \supset \exists y(X(y) \wedge G(x, y) \wedge y \neq x)))$$

II(50) läßt sich nicht mit Hilfe der Prädikatenlogik der ersten Stufe ausdrücken. Das ergibt sich daraus, daß II(51) aus II(50) aufgrund elementarer Umformungen folgt, wenn II(50) negiert und „G(x, y)“ durch „$x \geq y$“ ersetzt wird.

$$\text{II(51)}\quad \forall X(\exists x\, X(x) \supset \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \wedge x \geq y \supset y = x)))$$

Bei II(51) handelt es sich um das ‚Least-number Principle‘, eine Version des Induktionsprinzips. Angenommen, es würde eine Formel A der Prädikatenlogik erster Stufe geben, die II(48) beziehungsweise II(49) angemessen formal repräsentiert. Dann wäre A logisch äquivalent zu der Formalisierung von II(48) beziehungsweise II(49) in der Prädikatenlogik zweiter Stufe II(50). Es sei B die Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die entsteht, indem in A „G“ durch „≥“ ersetzt wird. In diesem Fall wäre die Formel ~B äquivalent zu II(51) und deshalb äquivalent zum Induktionsprinzip. Eine solche Formel der Prädikatenlogik erster Stufe ~B kann es aber nicht geben, da sich das Induktionsprinzip innerhalb der Prädikatenlogik der ersten Stufe bekanntlich nur durch Formelschemata darstellen läßt. Daher gibt es keine Formel der Prädikatenlogik der ersten Stufe, die II(48) beziehungsweise II(49) angemessen formal repräsentiert.[56]

[56] Die angewandte Methode, mit der es möglich ist zu beweisen, daß es für eine gegebene Formel der Prädikatenlogik zweiter Stufe keine äquivalente Formulierung in der Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe gibt, stammt von Kaplan. Siehe Boolos (1998), S. 57.

Es wurde an dem Beispiel II(48) beziehungsweise II(49) gezeigt, daß es Aussagen gibt, in denen über Eigenschaften quantifiziert wird und die sich nicht mit Hilfe der Prädikatenlogik der ersten Stufe adäquat formalisieren lassen. Um dies zu beweisen, wurden II(48) beziehungsweise II(49) in einer Logik zweiter Stufe formalisiert und gezeigt, daß, wenn sich II(48) in der Prädikatenlogik erster Stufe darstellen lassen würde, auch eine Formel in der Prädikatenlogik erster Stufe repräsentierbar wäre, von der bekannt ist, daß dies nicht der Fall ist. Damit ist bewiesen, daß in der Prädikatenlogik zweiter Stufe Aussagen analysierbar sind, die außerhalb des Horizonts der Prädikatenlogik der ersten Stufe liegen. Aus II(52) ergibt sich, daß II(48) beziehungsweise II(49) ebenfalls in der logischen Sprache darstellbar sind, die in diesem Kapitel anhand von Beispielen peu á peu entwickelt wurde.

II(52) $\exists X(\exists x\ x \leftarrow X \wedge \forall x(x \leftarrow X \supset$
$\exists y\ (y \leftarrow X \wedge G(x, y) \wedge x \neq y)))$

5 Prädikative Quantifikation

Die Parallelen zwischen den Formeln II(50) und II(52) sind offensichtlich. Die beiden Formeln ähneln sich in ihrer Struktur, die Unterschiede beschränken sich darauf, daß in II(52) die Kopula „←“ verwendet und daß deshalb beispielsweise „x ← X“ anstatt „X(x)“ geschrieben wird. Diese Differenz läßt sich dahingehend interpretieren, daß in der Logik der zweiten Stufe nicht Variablen für nominalisierte Prädikate, sondern Variablen für (nicht-nominalisierte) Prädikate gebunden werden. Diese ‚Quantifikation von Prädikaten‘ wurde oft kritisiert. Beispielsweise betont Quine, daß die Zeichen für Prädikate in prädikatenlogischen Formeln nicht als freie Variablen, sondern als schematische Platzhalter für beliebige Prädikate der natürlichen Sprachen aufgefaßt werden sollten. Aus diesem Grund könnten die Zeichen für Prädikate nicht quantifiziert werden.

> „What is important is that in writing 'F' and 'Fx' we are just schematically simulating sentences and their parts; we are not *referring* to predicates or other strings of signs, nor are we referring to attributes or sets."
> „To put the predicate letter 'F' in a quantifier, then, is to treat predicate positions suddenly as name positions, and hence to treat predicates as names of entities of some sort."
> „Predicates have attributes as their 'intensions' or meanings (or would if there were attributes), and they have sets as their extensions; but they are names of neither. Variables eligible for quantification therefore do not belong in predicate positions. They belong in name positions."[57]

Quines Kritik an der Prädikatenlogik höherer Stufe trifft nicht die im letzten Abschnitt betrachtete Form der Quantifikation, weil in „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$" das Vorkommen von „$F^d$" ein nominalisiertes Prädikat, die Leerstelle, die von F^d besetzt wird, daher eine Position für einen Subjektterminus ist und folglich – nach Quines Kriterium – diese Stelle durch eine quantifizierbare Variable besetzt werden darf.[58] Es ist aber fraglich, ob Quines Behauptung haltbar ist, daß quantifizierbare Variablen nur in Positionen für Subjekttermini und nicht für Prädikate gehören. Im Anschluß an Sellars stellt Castañeda den bisher betrachteten ‚nominalen Quantoren', deren Substitutionsinstanzen Subjekttermini sind, einen weiteren Typ von Quantoren gegenüber, die er „adjektivische Quantoren" nennt.[59] In den folgenden Aussagen finden sich Beispiele für Castañedas ‚adjektivische Quantifikationen':

II(53) Julia ist etwas, was John nicht ist, nämlich schön.

II(54) Julia ist tugendhaft oder etwas ähnliches.

---

[57] Quine (1970), S. 66f. In etwas abgeschwächter Form findet sich dieselbe Position in Quine (1999).

[58] Quine spricht zwar von „name position", es wird aber aus dem Kontext klar, daß er nicht nur echte Eigennamen meint, sondern auch Namen von abstrakten Gegenständen wie Mengen. Diesem weiten Verständnis von „Name" entspricht in der vorliegenden Arbeit der Ausdruck „Subjektterminus".

II(55) Für alles gilt: Wenn Julia es ist, dann ist Marta es.

II(56) Julia ist schön. Also gibt es etwas, das Julia ist, nämlich schön.

Es läßt sich leicht zeigen, daß sich diese Beispiele in die Form von ‚nominalen Quantifikationen' bringen lassen.

II(57) Julia hat etwas, was John nicht hat, nämlich Schönheit.

II(58) Julia hat die Eigenschaft, tugendhaft zu sein, oder etwas Ähnliches.

II(59) Für alles gilt: Wenn Julia es hat, dann hat Marta es.

II(60) Julia hat die Eigenschaft, schön zu sein. Also gibt es etwas, das Julia hat, nämlich die Eigenschaft, schön zu sein.

Doch daß sich die Beispiele für ‚adjektivische Quantifikationen' in ‚nominale Quantifikationen' umformen lassen, ist an dieser Stelle unerheblich. Die relevante Frage lautet: Sind die Beispiele für ‚adjektivische Quantifikationen' Beispiele für Aussagen in den natürlichen Sprachen, in denen Platzhalter für Prädikate gebunden werden?

In diesen Aussagen liegt eine andere Form der Quantifikation vor als in den bisher betrachteten Quantifikationen wie in II(57)-II(60). Das wird deutlich, wenn man den ‚Allquantor' in II(55) und II(59) beseitigt. Aus II(59) folgt II(61), wenn man für „es" das nominalisierte Prädikat „die Eigenschaft, schön zu sein" einsetzt und den Quantor wegläßt. Geht man bei II(55) analog vor, erhält man II(62).

II(61) Wenn Julia die Eigenschaft, schön zu sein, hat, dann hat Marta die Eigenschaft, schön zu sein.

[59] Siehe Castañeda (1976), S. 52ff.

II(62) Wenn Julia die Eigenschaft, schön zu sein, ist, dann ist Marta die Eigenschaft, schön zu sein.

Obwohl II(55) und II(59) äquivalent sind und die Quantoren auf dieselbe Weise beseitigt wurden, sind die Resultate II(61) und II(62) nicht äquivalent.[60] Folglich müssen ‚adjektivische Quantoren' wie in II(55) tatsächlich von Quantoren wie in II(59) unterschieden werden. (– Diese Quantoren werde ich im Anschluß an Castañeda als „*nominale Quantoren*" bezeichnen und dementsprechend von „*nominaler Quantifikation*" sprechen.)

Doch daraus, daß es sich bei ‚adjektivischen Quantifikationen' um einen eigenständigen Typ von Quantifikationen handelt, folgt nicht unmittelbar, daß in solchen Aussagen Platzhalter für Prädikate durch Quantoren gebunden werden. Tatsächlich ergibt sich ein syntaktisches Mißgebilde, nämlich II(63), wenn man unterstellt, daß „es" in II(55) ein Platzhalter für Prädikate ist, und „es" in II(55) durch ein Prädikat ersetzt. Das intendierte Resultat II(64) erhält man jedoch, wenn das Pronomen „es" durch das Adjektiv „schön" anstatt durch das einstellige Prädikat „x_1 ist schön" ersetzt wird.

II(63) Wenn Julia ist schön ist, dann ist Marta ist schön.

II(64) Wenn Julia schön ist, dann ist Marta schön.

Bealer und Mönnich kommen zu dem Ergebnis, daß es nur nominale Quantifikationen gibt.[61] Die Beispiele für ‚adjektivische Quantifikationen' werden dadurch erklärt, daß „ist" als zweistellige Relation aufgefaßt wird. Aus diesem Grund sei die angemessene Formalisierung von II(65) auch nicht II(66), sondern II(67).

[60] Beim Übergang von II(55) zu II(62) hat sich die Bedeutung des Wortes „ist" verändert. Das Vorkommen von „ist" in II(62) ist synonym zu „ist identisch mit". Das trifft auf das Vorkommen von „ist" in II(55) nicht zu.

[61] Vgl. Bealer und Mönnich (1989), S. 293. Der Terminus „nominale Quantifikation" wird von Bealer und Mönnich nicht verwendet.

II(65) Es gibt etwas, das Julia ist.

II(66) $\exists x\ x(j)$

II(67) $\exists x$ j ist x

Doch Bealers und Mönnichs Vorschlag führt zu großen Problemen. Als erstes stellt sich die Frage, worüber „$\exists x$“ in II(67) überhaupt quantifiziert. Aus dem Kontext geht hervor, daß Namen und nominalisierte Prädikate für „x“ substituiert werden dürfen. Aber Adjektive wie „schön“ sind weder Namen noch nominalisierte Prädikate wie „die Eigenschaft, schön zu sein“. Daß es einen syntaktischen Unterschied zwischen Adjektiven auf der einen Seite und Namen sowie nominalisierten Prädikaten auf der anderen Seite gibt, sieht man bereits daran, daß es in der Regel einen Komparativ und einen Superlativ von Adjektiven gibt, während sich Namen und nominalisierte Prädikate nicht steigern lassen. Außerdem scheitert Bealers und Mönnichs Ansatz an Aussagen, in denen die vermeintliche Relation „ist“ keine Rolle spielt, wie bei dem Schluß von II(68) auf II(69).

II(68) Julia hüpft.

II(69) Es gibt etwas, was Julia tut, nämlich hüpfen.

II(69) und II(68) zeigen, daß Castañedas ‚adjektivische Quantifikation‘ keineswegs auf Adjektive beschränkt ist beziehungsweise daß es eine sehr ähnliche Form der Quantifikation gibt, die Verben betrifft. Es lassen sich problemlos Aussagen finden, die den oben angegebenen Beispielen für die ‚adjektivische Quantifikation‘ entsprechen.

II(70) Julia tut etwas, was John nicht tut, nämlich hüpfen.

II(71) Julia hüpft oder tut etwas Ähnliches.

II(72) Für alles gilt: Wenn Julia es tut, dann tut es Marta.

Aus diesem Grund ist der Name „adjektivische Quantifikation“ unangebracht. Im Folgenden wird deshalb der nominalen Quantifikation, die

Namen und nominalisierte Prädikate betrifft, die *prädikative Quantifikation* gegenübergestellt, die sich auf (nicht-nominalisierte) Prädikate erstreckt, unabhängig davon, ob diese Prädikate Adjektive oder Verben als Bestandteile enthalten.

Durch den Namen „*prädikative Quantifikation*" wurde bereits vorweggenommen, daß ich die Position vertrete, daß sowohl in Aussagen wie II(53)-II(56) als auch in Aussagen wie II(69)-II(72) Platzhalter für Prädikate durch ‚Quantoren' gebunden werden. Es bleibt das oben aufgeworfene Problem zu lösen, daß aus II(55) der ungrammatische Ausdruck II(63) entsteht, wenn man für das Pronomen „es" das Prädikat „x_1 ist schön" einsetzt, und daß deshalb der Eindruck entsteht, es werde nur über einen Teil des Prädikates, nämlich über ein Adjektiv quantifiziert. Des Rätsels Lösung liegt auf der Hand, wenn man den analogen Fall mit einem Verb betrachtet. Beispielsweise ist II(73) eine logische Konsequenz aus II(72).

II(73) Wenn Julia hüpft, dann hüpft Marta.

II(73) entsteht aus II(72), indem nicht „es", sondern „es tut" beziehungsweise „tut es" durch „hüpft" ersetzt wird. Die Form von „tun" fungiert offenbar als ein ‚Dummy-Verb', das denselben Platzhaltercharakter besitzt wie das Pronomen „es". Dies bedeutet, daß in II(72) nicht das Pronomen „es" allein, sondern der Ausdruck „es tut" die Funktion einer Variablen übernimmt, die durch den Quantor „für alles gilt" gebunden wird. Überträgt man diese Analyse auf II(55), dann übernehmen dort das Pronomen „es" und das Dummy-Verb „ist" zusammen die Aufgabe einer Variablen und werden durch „für alles gilt" gebunden. Daher beruht der Schluß auf den ungrammatischen Ausdruck II(63) auf einer Fehlannahme, nämlich daß nur das Pronomen „es" durch das Prädikat „x_1 ist schön" ersetzt werden sollte. Ersetzt man dagegen „es … ist" durch das Prädikat, dann erhält man das gewünschte Ergebnis.[62] Daß die Funktion der Variablen primär von den Dummy-Verben und nicht von dem Pronomen „es“ wahrgenommen wird, erkennt man daran, daß es mit II(74) und II(75) Paraphrasen von II(55) und II(72) gibt, in denen überhaupt kein Pronomen vorkommt.

II(74) Was Julia ist, ist auch Marta.

II(75) Was Julia tut, tut auch Marta.

Bemerkenswerterweise sind in der natürlichen Sprache II(74) und II(75) beziehungsweise II(55) und II(72) nicht äquivalent. Beispielsweise folgt II(73) aus II(72) und II(75), aber nicht aus II(55) und II(74). Umgekehrt folgt II(64) aus II(55) und II(74), aber nicht aus II(72) und II(75). Es gibt eine dritte Form der prädikativen Quantifikation, die weder zu II(74) noch zu II(75) äquivalent ist:

II(76) Was Julia geschieht, geschieht auch Marta.

II(77) Wenn Julia geimpft wird, wird auch Marta geimpft.

II(77) folgt aus II(76), aber weder aus II(74) noch aus II(75). Darüber hinaus impliziert II(76) weder II(64) noch II(74). Während die Quantifikation in II(74) sich auf Prädikate erstreckt, die Adjektive enthalten, betrifft II(75) Verben im Aktiv und II(76) Verben im Passiv. Darüber hinaus läßt sich mit dem Dummy-Verb „geschieht“ auch über nullstellige Prädikate quantifizieren. Dies wird durch den Schluß von II(78) auf II(79) verdeutlicht.

II(78) Was auch geschieht, ich werde Dir treu bleiben.

II(79) Wenn es regnet, werde ich Dir treu bleiben.

[62] Um ein grammatisches Resultat zu erzielen, ist es notwendig „ist“ durch „ist“ und „es“ durch „schön“ zu ersetzen. Dies führt dazu, daß die Wörter, aus denen das Prädikat „x_1 ist schön“ besteht, unter Umständen unzusammenhängend in einem Satz vorkommen. Das ist insofern kein Problem, weil auch Prädikate wie „x_1 hat x_2 getroffen“ über die Aussage verteilt sind und die Wortreihenfolge davon abhängt, ob das Prädikat in einem Hauptsatz oder einem Nebensatz verwendet wird.

Soweit mir bekannt ist, gibt es im Deutschen kein Verb, das wie „sein“, „tun“ oder „geschehen“ die Aufgabe einer Variablen übernehmen kann und das so unspezifisch ist, daß es die Dummy-Funktion für alle Prädikate (einer bestimmten Stelligkeit) übernehmen kann. Die prädikative Quantifikation findet also im Deutschen immer sortal statt. Es ist aber für eine logische Untersuchung irrelevant, ob ein Prädikat ein Adjektiv, ein Verb im Aktiv oder ein Verb im Passiv als Bestandteil enthält. Deshalb werden prädikative Quantifikationen unabhängig davon, ob sie unter Verwendung einer Form von „sein“, „tun“, „geschehen“ oder eines anderen Dummy-Verbs realisiert werden, mit demselben Typ von Variablen formal repräsentiert. Von dem im Deutschen vorhandenen Unterschied zwischen den verschiedenen Formen der prädikativen Quantifikation unter Verwendung von „sein“, „tun“ oder „geschehen“ wird also abgesehen.

Es wurde gezeigt, daß es in den natürlichen Sprachen zwei verschiedene Formen der Quantifikation gibt. Die nominale Quantifikation betrifft Platzhalter (wie „er“, „sie“, „es“, „das“, „diejenige“), in die Namen und nominalisierte Prädikate eingesetzt werden können. Durch eine prädikative Quantifikation werden Platzhalter (wie „ist“, „es ist“, „tut“, „geschieht“) gebunden, für die Prädikate eingesetzt werden können. Um die prädikative Quantifikation formal darzustellen, werden Variablen in Prädikatpositionen verwendet. Weil von den Unterschieden zwischen „sein“, „tun“ und „geschehen“ abgesehen wird, ist II(80) sowohl von II(74) sowie von II(75) als auch von II(76) die formale Repräsentationen, II(81) steht für II(78).[63]

II(80) $\forall x^1 (x^1(j) \supset x^1(m))$

II(81) $\forall x^0 (x^0 \supset \mathrm{TREU}(i, d))$

---

[63] Aus denselben Gründen wie bei der nominalen Quantifikation muß bei der prädikativen Quantifikation die Stelligkeit der Prädikate berücksichtigt werden. Dies geschieht wieder, indem die Stelligkeit der Variablen durch Superskripte angegeben wird. Würde man darauf verzichten und über Prädikate beliebiger Stelligkeit quantifizieren, dann wäre folgender unvollständige Ausdruck eine Konsequenz aus II(78) beziehungsweise II(81): „Wenn x_1 hüpft, dann werde ich Dir treu bleiben.“

Nominale und prädikative Quantifikationen stehen nicht unverbunden nebeneinander, das ergibt die Betrachtung der Aussagen II(82)-II(87).

II(82) Julia ist schön, und Marta hat die Eigenschaft, schön zu sein, nicht.

II(83) Julia ist etwas, und Marta hat diese Eigenschaft nicht.

II(84) Julia ist mutig, und Mut ist eine Tugend.

II(85) Es gibt etwas, was Julia ist, und das ist eine Tugend.

II(86) Hüpfen ist eine sportliche Tätigkeit, und Julia hüpft.

II(87) Es gibt etwas, das ist eine sportliche Tätigkeit, und Julia tut das.

II(87) entsteht aus II(86), indem die Vorkommen des nominalisierten Prädikates „Hüpfen“ und des Prädikates „x_1 hüpfen“ jeweils durch geeignete Platzhalter ersetzt und durch *denselben* Quantor gebunden werden. Daß sowohl „das“ als auch „tut das“ durch „es gibt etwas“ in II(87) gebunden werden, erkennt man daran, daß II(88) nicht äquivalent mit II(87) ist. (II(87) impliziert II(88), aber nicht umgekehrt.)

II(88) Es gibt etwas, das ist eine sportliche Tätigkeit, und es gibt etwas, das Julia tut.

Auf analoge Weise ergibt sich II(85) aus II(84). Im Unterschied zu II(87) wird in II(85) zuerst der Platzhalter für ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat und dann erst der Platzhalter für das nominalisierte Prädikat gebunden. Die Reihenfolge der unterschiedlichen Platzhalter ist also unwichtig dafür, ob sie gebunden werden. II(82) und II(83) zeigen, daß auch die Position eines prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikates durch einen Platzhalter besetzt werden kann, der durch einen Quantor gebunden wird, der gleichzeitig einen Platzhalter für ein Prädikat bindet. Die Positionen für prädikativ gebrauchte nominalisierte Prädikate unterscheiden sich also in dieser Hinsicht nicht von den Argumentpositionen einer Aussage. Daß ein Quantor

Platzhalter sowohl für Prädikate als auch für nominalisierte Prädikate binden kann, spiegelt sich in den Formalisierungen wider. II(89), II(90) und II(91) sind die formalen Darstellungen von II(83), II(85) und II(87).

II(89) $\exists x^1(x^1(j) \wedge \sim m \leftarrow x^1)$

II(90) $\exists x^1(x^1(j) \wedge \mathrm{TUGEND}(x^1))$

II(91) $\exists x^1(\mathrm{SPORT}(x^1) \wedge x^1(j))$

Wie man in II(89)-II(91) sieht, können dieselben Variablen verwendet werden, um Positionen von (nicht-nominalisierten) Prädikaten und Positionen von nominalisierten Prädikaten zu besetzen. Dementsprechend kann es vorkommen, daß ein Quantor eine Variable bindet, die in derselben Formel sowohl den Platz eines (nicht-nominalisierten) Prädikates einnimmt als auch in der Position eines nominalisierten Prädikates steht.

Bei dem Vergleich von II(53)-II(56) mit II(57)-II(60) wurde angemerkt, daß sich jede prädikative Quantifikation mit einer Form von „sein“ in eine nominale Quantifikation umwandeln läßt. Allerdings ist das Ergebnis einer solchen Umwandlung nicht äquivalent zum Ausgangssatz; dies ergibt sich aus dem Vergleich von II(92) und II(93).

II(92) Für alles gilt: Wenn Julia es ist, dann ist es Marta.

II(93) Für alles gilt: Wenn Julia es hat, dann hat es Marta.

Aus II(93) folgt die Aussage II(94), weil II(93) gemäß den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt äquivalent mit II(95) ist, II(95) die Aussage II(96) logisch impliziert und darüber hinaus II(96) äquivalent mit II(94) ist. Dagegen folgt II(94) nicht aus II(92). Also sind II(92) und II(93) nicht äquivalent.

II(94) Wenn Julia geimpft wird, dann wird Marta geimpft.

II(95) Für jede einstellige Eigenschaft gilt: Wenn Julia die Eigenschaft hat, dann hat Marta sie.

II(96) Wenn Julia die Eigenschaft hat, geimpft zu werden, dann hat Marta die Eigenschaft, geimpft zu werden.

Um zu zeigen, daß II(92) und II(93) nicht äquivalent sind, wurde die Tatsache ausgenutzt, daß „sein“ nicht die Dummy-Funktion für beliebige Prädikate übernehmen kann. II(94) folgt nicht aus II(92), aber natürlich aus der Aussage II(97), die aus II(92) entsteht, wenn man „geschieht“ anstatt „ist“ verwendet. Wiederum lassen sich problemlos Beispiele finden, die aus II(93) folgen, aber nicht aus II(97), indem man auf Prädikate zurückgreift, die sich nicht für „es geschieht“ einsetzen lassen. Äquivalent wäre II(93) nur zu einer Aussage, in der unter Verwendung eines Dummy-Verbs , das für alle Prädikate stehen kann, prädikativ quantifiziert wird. In Ermangelung eines solchen Prädikates wird in II(98) eine Hilfskonstruktion verwendet, die ein solches Prädikat simuliert. Daher ist II(98) äquivalent zu II(93).

II(97) Für alles gilt: Wenn Julia es geschieht, dann geschieht es Marta.

II(98) Für alles gilt: Wenn es Julia hat bzw. tut bzw. geschieht, dann hat bzw. tut bzw. geschieht es Marta.

Anders formuliert: II(92) und II(93) sind äquivalent, wenn man die oben erwähnte Abstraktion vollzieht und von den Unterschieden zwischen den prädikativen Quantifikationen mit „sein“, „tun“, geschehen“ und anderen Dummy-Verben absieht. Die Entscheidung, diese Unterschiede zu vernachlässigen, wurde bereits dadurch getroffen, daß alle Formen der prädikativen Quantifikation durch die Verwendung derselben Variablen formal repräsentiert werden. Aus diesem Grund ist die Behauptung, daß die Aussagen II(53)-II(56) äquivalent zu den Aussagen II(57)-II(60) sind, im Nachhinein gerechtfertigt, außerdem sind II(74), II(75) und (76) miteinander äquivalent.

Das Ergebnis dieses Abschnittes besteht darin, daß sowohl die Positionen von Subjekttermini als auch die Positionen von Prädikaten in den natürlichen Sprachen quantifiziert werden können. Diese nominalen und prädikativen Quantifikationen sind in zwei Hinsichten verknüpft. Einerseits kann derselbe Quantor in einer Aussage einen Platzhalter für ein Prädikat und einen Platzhalter für einen Subjektterminus binden; es gibt also Beispiele, in denen ein Quantor gleichzeitig sowohl nominal als auch prädikativ quantifiziert. Andererseits läßt sich jede prädikative Quantifikation in eine nominale überführen.

6 Das Russell-Paradox

Jeder, der die natürlichen Sprachen unter Verwendung von formalen Systemen untersuchen möchte, steht vor der Aufgabe, ein formales System zu entwickeln, das einerseits der Vielfalt und den Ausdrucksmöglichkeiten der natürlichen Sprachen gerecht wird und andererseits widerspruchsfrei ist. Aus diesem Grund ist das Russell-Paradox der Prädikation[64] von großer Bedeutung für die Entwicklung einer formalen Theorie der Prädikation.

Um das Russell-Paradox zu motivieren, werden einige Aussagen betrachtet, die gleichzeitig weitere linguistische Daten liefern, welche in einer adäquaten Prädikationstheorie berücksichtigt werden müssen.

II(99) Die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein, hat die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein.

II(100) Die Eigenschaft, abstrakt zu sein, hat die Eigenschaft, abstrakt zu sein.

II(101) Die Eigenschaft, nicht sichtbar zu sein, hat die Eigenschaft, nicht sichtbar zu sein.

Die Aussagen II(99)-II(101) sind Beispiele für Aussagen, in denen eine Eigenschaft von sich selbst prädiziert wird. Aussagen dieser Form werde ich

[64] Da das mengentheoretische Russell-Paradox in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle spielt, wird der Zusatz „der Prädikation“ oft weggelassen.

„reflexive Prädikationen“ nennen. Unter Verwendung der formalen Sprache, die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelt wurde, lassen sich reflexive Prädikationen durch die Formel II(102) formalisieren.

II(102) $F^1 \leftarrow F^1$

Neben einigen Eigenschaften, die sich selbst zugesprochen werden können, gibt es Prädikate, die sich selbst nicht charakterisieren. Die formale Repräsentation von Aussagen wie II(103)-II(106) ist II(107).[65]

II(103) Die Eigenschaft, ein Gegenstand zu sein, hat nicht die Eigenschaft, ein Gegenstand zu sein.

II(104) Die Eigenschaft, konkret zu sein, hat nicht die Eigenschaft, konkret zu sein.

II(105) Die Eigenschaft, ein Hund zu sein, hat nicht die Eigenschaft, ein Hund zu sein.

II(106) Die Eigenschaft, rund zu sein, hat nicht die Eigenschaft, rund zu sein.

II(107) $\sim F^1 \leftarrow F^1$

Nennen wir die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein, die nicht wahrheitsgemäß von sich selbst prädiziert werden kann, die „Russell-Eigenschaft“. Dann haben folgende Eigenschaften die Russell-Eigenschaft: Die Eigenschaft, ein Gegenstand zu sein; die Eigenschaft, konkret zu sein; die Eigenschaft, ein Hund zu sein; die Eigenschaft, rund zu sein; die Eigenschaft, verheiratet zu sein etc. Dagegen haben die Eigenschaft, abstrakt zu sein, und die Eigenschaft, eine Eigenschaft zu sein, nicht die Russell-Eigenschaft. Mit Hilfe der Russell-Eigenschaft läßt sich ein Widerspruch ableiten, indem man sich fragt, ob die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

[65] Bei II(107) handelt es sich um die Negation von II(102), das Zeichen „~“ bezieht sich also nicht auf „F^1“, sondern auf „$F^1 \leftarrow F^1$“.

Das Russell-Paradox mit Kopula

(i) Für jede einstellige Eigenschaft X gilt: X hat die Russell-Eigenschaft genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Eigenschaft X die Eigenschaft X hat.

(ii) Die Russell-Eigenschaft hat die Russell-Eigenschaft genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

(iii) Angenommen, die Russell-Eigenschaft hat die Russell-Eigenschaft.

(iv) Aus (iii) und (ii) folgt, daß es nicht der Fall ist, daß die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

(v) Die Zeile (iv) widerspricht der Zeile (iii).

(vi) Also ist die Annahme (iii) falsch beziehungsweise die Negation der Annahme (iii) wahr.

(vii) Folglich ist es nicht der Fall, daß die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

(viii) Aus (vii) und (ii) folgt, daß die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

(ix) Die Zeile (viii) widerspricht der Zeile (vii).
Widerspruch!

Der Schritt (i) ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Russell-Eigenschaft. Die Zeile (ii) entsteht aus der Zeile (i), indem für „X“ der Ausdruck „die Russell-Eigenschaft“ eingesetzt wird. Ab Zeile (ii) ergibt sich das Paradox unter Verwendung von aussagenlogischen Schlüssen.

Das Russell-Paradox der Prädikation beruht nicht auf der Verwendung der Kopula. Denn es läßt sich zeigen, daß es auch ohne Gebrauch der Kopula formulierbar ist. Eine Eigenschaft, die die Russell-Eigenschaft hat, soll „russell-artig“ genannt werden.

Das Russell-Paradox ohne Kopula

(i) Für alle einstelligen Eigenschaften gilt: Die Eigenschaft X ist russell-artig genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Eigenschaft X X ist.

(ii) Die Eigenschaft, russell-artig zu sein, ist russell-artig genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Eigenschaft, russell-artig zu sein, russell-artig ist.

(iii) Angenommen, die Eigenschaft, russell-artig zu sein, ist russell-artig. Dann ist es nicht der Fall, daß die Eigenschaft, russell-artig zu sein, russell-artig ist. Widerspruch.

(iv) Angenommen, es ist nicht der Fall, daß die Eigenschaft, russell-artig zu sein, russell-artig ist. Dann ist die Eigenschaft, russell-artig zu sein, russell-artig. Widerspruch.

Der aussagenlogische Teil der Herleitung des Russell-Paradoxes ist etwas verkürzt dargestellt, weil ab Zeile (ii) die Schritte von oben wiederholt werden. Auf die Verwendung der Kopula kann deswegen verzichtet werden, weil in Zeile (i) durch den Quantor „für alle einstelligen Eigenschaften" sowohl nominal als auch prädikativ quantifiziert wird. Doch diese Mischquantifikation ist kein Einwand gegen (i), denn wie durch die Beispiele II(82)-II(87) gezeigt wurde, ist die Verwendung von solchen Mischquantoren durchaus normal.[66]

7 Typenhierarchie

Der von Russell vorgeschlagene und sicherlich auch der bekannteste Weg, das Russell-Paradox zu vermeiden, besteht darin, die Prädikate zu stufen und unter Verwendung der entstehenden Hierarchie Einschränkungen be-

[66] Bei den beiden dargestellten Versionen des Russell-Paradoxes wird jeweils ein einstelliges Prädikat (einmal in nominalisierter Form und einmal in nicht-nominalisierter Form) neu definiert. Daß das Russell-Paradox nicht von der Einstelligkeit abhängt, sieht man daran, daß sich ein entsprechendes Paradox für Relationen konstruieren läßt. Siehe Russell (1971b), S. 153.

züglich des Formelaufbaus zu treffen.[67] Diese Strategie kann man beispielsweise dadurch umsetzen, daß die bisher entwickelte Sprache so modifiziert wird, daß jedes Prädikat und jede Variable für Prädikate eine natürliche Zahl n ($1 \leq n$) als weiteren Index bekommt, der die Stufe des Prädikates beziehungsweise der Variablen angibt.[68] Hinter dieser Hierarchie steht die folgende Intuition: Die Prädikate der ersten Stufe drücken die Eigenschaften der konkreten Gegenstände aus, die Prädikate zweiter Stufe die Eigenschaften der Eigenschaften der ersten Stufe, die Prädikate der dritten Stufe die Eigenschaften der Eigenschaften der zweiten Stufe etc. Die Formeldefinition wird daher so gewählt, daß das Prädikat einer Aussage beziehungsweise das prädikativ gebrauchte nominalisierte Prädikat einer Aussage einer höheren Stufe angehört als die Argumente der Aussage. II(109) und II(111) sind zwei Beispiele für Formeln in dieser Variante eines Stufenkalküls.[69]

II(108) Julia ist schön, und Schönheit ist eine Tugend.

II(109) ${}^{1}SCH^{1}(j) \wedge {}^{2}TUG^{1}({}^{1}SCH^{1})$

II(110) Julia und Marta sind verwandt, und Verwandtschaft ist transitiv.

II(111) ${}^{1}VERW^{2}(j, m) \wedge {}^{2}TRANS^{1}({}^{1}VERW^{2})$

II(112) John irritiert Marta, und Schönheit irritiert Marta.

II(109) repräsentiert II(108). Während das rechte Superskript wie bisher die Stelligkeit festhält, gibt das linke Superskript von „${}^{1}SCH^{1}$“ die Stufe des Prädikates „x_1 ist schön“ an. Da „${}^{1}SCH^{1}$“ ein Prädikat der ersten Stufe repräsentiert, muß dem Prädikat „x_1 ist eine Tugend“ die zweite Stufe zugeordnet werden. Denn der Ausdruck „${}^{1}TUG^{1}({}^{1}SCH^{1})$“ ist nicht wohlge-

[67] Skizziert wurde diese Strategie von Russell bereits 1903 in *The Principles of Mathematics*. Siehe Russell (1951), Anhang B.

[68] Ebenso wie die Stelligkeit überträgt sich die Stufe eines Prädikates auf die durch das Prädikat ausgedrückte Eigenschaft.

[69] Den Namen „Stufenkalkül“ verwenden Hilbert und Ackermann, um ihre Version der einfachen Typentheorie zu benennen. (Siehe Hilbert/Ackermann (1949), S. 128.) Um die für diese Arbeit relevanten Punkte deutlich zu machen, reicht es, die Sprache einer sehr einfachen Variante einer einfachen Typentheorie informell einzuführen. Die Sprachen von Typentheorien können wesentlich elaborierter sein. (Vgl. beispielsweise Church (1940).)

formt, weil er gegen die Bedingung verstößt, daß in einer wohlgeformten Formel das Prädikat immer höherer Stufe sein muß als die Argumente. In II(110) wird zuerst die zweistellige Relation erster Stufe, verwandt zu sein, von Julia und Marta prädiziert, und dann wird dieser Relation die einstellige Eigenschaft zweiter Stufe, transitiv zu sein, zugesprochen; dies wird durch die Formel II(111) repräsentiert.

Problematisch an der Hierarchie der Symbole für die Prädikate in dem Stufenkalkül ist die Tatsache, daß es dafür in den natürlichen Sprachen keine Entsprechung gibt. In II(112) wird die erste Leerstelle von „x_1 irritiert x_2" sowohl mit dem Namen „John" als auch mit dem nominalisierten Prädikat erster Stufe „Schönheit" besetzt. Dies bedeutet innerhalb der Konzeption einer Typentheorie, daß das erste Vorkommen von „x_1 irritiert x_2" ein Prädikat erster Stufe und das zweite Vorkommen ein Prädikat zweiter Stufe ist, weil das erste Vorkommen die Relation zwischen Personen und das zweite Vorkommen die Relation zwischen einer Eigenschaft (erster Stufe) und einer Person ausdrückt. Daß in II(112) zwei verschiedene Prädikate vorkommen, ist – wenigstens prima facie – eine wenig überzeugende These, schließlich ist weder ein syntaktischer noch ein semantischer und nicht einmal ein orthographischer Unterschied erkennbar. Die Behauptung wird also nicht durch linguistische Daten gestützt, sondern ist nur innerhalb des Begründungszusammenhanges des Stufenkalküls plausibel und wird letztlich durch das Ziel legitimiert, das Russell-Paradox zu vermeiden.

Tatsächlich blockiert die Stufenhierarchie das Russell-Paradox; man sieht es daran, daß sich die Aussage II(114), die eine zentrale Rolle bei der Herleitung des Russell-Paradoxes ohne Kopula spielt, nicht adäquat formalisieren läßt.[70]

[70] Die Herleitung des Russell-Paradoxes mit Kopula wird auf analoge Weise blockiert.

II(113) Fifi ist ein Hund, und die Eigenschaft, ein Hund zu sein, ist russell-artig.

II(114) Die Eigenschaft, russell-artig zu sein, ist russell-artig.

II(115) ${}^{1}\mathrm{HUND}^{1}(f) \wedge {}^{2}\mathrm{RUS}^{1}({}^{1}\mathrm{HUND}^{1})$

II(116) ${}^{2}\mathrm{RUS}^{1}({}^{2}\mathrm{RUS}^{1})$

In II(113) wird Fifi die Eigenschaft zugesprochen, ein Hund zu sein. Dieser Eigenschaft wird selbst die Eigenschaft zugesprochen, russell-artig zu sein. Aus diesem Grund ist die Eigenschaft, russell-artig zu sein, (mindestens) eine Eigenschaft zweiter Stufe. Dies wird in der Formalisierung II(115) von II(113) berücksichtigt.

II(116) wäre der formale Ausdruck, der die Intention von II(114) erfaßt. Doch II(116) ist kein wohlgeformter Ausdruck, weil das Argument und das Prädikat Ausdrücke derselben Stufe sind. Daher läßt sich II(114) und damit das Argument, das zu dem Russell-Paradox führt, nicht angemessen in der formalen Sprache repräsentieren. Der Stufenkalkül ist deshalb antinomienfrei.

Das Ziel, Paradoxien zu umgehen, wird durch den Stufenkalkül erreicht. Aber es wäre schön, eine Begründung dafür zu haben, weshalb man dieses Ziel durch die Hierarchisierung der Prädikate und nicht auf einem anderen Weg erreichen sollte. Ist der Stufenkalkül eine ad hoc Lösung? Wenn die Einschränkung der Syntax im Stufenkalkül nur das Russell-Prädikat betreffen würde, dann könnte man sie durch die Behauptung rechtfertigen, daß das auftretende Paradox zeigen würde, daß Aussagen wie II(114) sinnlos sind. Doch die syntaktische Restriktion bezieht sich nicht nur auf II(114), sondern auf alle reflexiven Prädikationen; auch auf Aussagen, die nicht im Verdacht stehen, zu Paradoxien zu führen. Insbesondere bei reflexiven Prädikationen wie II(99)-II(101), die wahr sind oder von denen man wenigstens mit gutem Grund glauben kann, daß sie wahr sind, wäre es absurd zu behaupten, sie seien sinnlos. Wer die Stufung der Prädikate und die entsprechende Einschränkung der Syntax durch die Behauptung begründen möchte, daß auf diese Weise sinnvolle Aussagen von sinnlosen Aussagen unterschieden werden, steht vor der Aufgabe zu erklären, wie mit reflexiven Prädikationen wie II(99)-II(101) umgegangen werden soll.

Eine Hierarchie der Prädikate wie im Stufenkalkül oder in anderen Typentheorien löst das Russell-Paradox nicht, sie vermeidet es, indem die adäquaten formalen Repräsentationen der paradoxieverdächtigen Aussagen syntaktisch ausgeschlossen werden. Wenn man II(114) (oder eine andere reflexive Prädikation) in dem Stufenkalkül formalisieren möchte, ist man gezwungen, dem Prädikat eine höhere Stufe als dem Argument zuzuweisen, wie das in II(117) der Fall ist.

II(117) $^{3}RUS^{1}(^{2}RUS^{1})$

Bei der Verwendung des Stufenkalküls wird man also genötigt, das Prädikat „x_1 ist russell-artig“ unter Verwendung von zwei verschiedenen formalen Symbolen zu repräsentieren, die sich bezüglich ihrer Stufe unterscheiden. Daß man einen Ausdruck der natürlichen Sprache verschieden formalisiert, ist nicht ungewöhnlich. Beispielsweise ist es sinnvoll, das Prädikat „x_1 ist eine Bank“ auf zwei verschiedene Weisen zu symbolisieren, um zwischen den Bedeutungen „x_1 ist ein Geldinstitut (bestimmter Art)“ und „x_1 ist eine Sitzgelegenheit (bestimmter Art)“ zu unterscheiden. Doch es ist schwer zu rechtfertigen, weshalb eine Ambiguität dieser Art im Fall eines definierten Prädikates wie „x_1 ist russell-artig“ vorliegen soll.

Die sogenannte ‚Typenambiguität‘, die von Vertretern von Typentheorien in Anspruch genommen wird, um den Zusammenhang zwischen den Vorkommen von „x_1 irritiert x_2“ in II(112) oder zwischen dem Prädikat und dem Argument von reflexiven Prädikationen zu erklären, hat wenig mit dem semantischen Phänomen zu tun, das normalerweise mit dem Wort „Ambiguität“ bezeichnet wird. Das läßt sich bereits daran feststellen, daß sich normale Ambiguität aufdecken läßt, indem man den mehrdeutigen Ausdruck verschieden paraphrasiert; dies wurde am Beispiel von „… ist eine Bank“ vorgeführt. Derartige Paraphrasen sind im Fall der Vorkommen von „x_1 irritiert x_2“ in II(112) nicht möglich. Besonders pikant ist die Tatsache, daß die Mehrdeutigkeit von „x_1 irritiert x_2“, wenn man mit der Annahme von ‚Typenambiguität‘ den ersten Schritt vollzogen hat, außer Kontrolle gerät. Einerseits gibt es für jede Stufe von Eigenschaften ein „x_1 irritiert x_2“-Prädikat, denn unabhängig von der Stufe einer Eigenschaft F läßt sich die Aussage „F irritiert Marta“ bilden. Andererseits läßt sich „x_1 irritiert x_2“ von Propositionen prädizieren, die selbst den Ausdruck „x_1 irritiert x_2“ enthalten.

II(118) Julia irritiert, daß Marta irritiert, daß Julia schön ist.

II(119) Marta irritiert, daß Julia irritiert, daß Marta irritiert, daß Julia schön ist.

II(120) Julia irritiert, daß Marta irritiert, daß Julia irritiert, daß Marta irritiert, daß Julia schön ist.

Offenbar läßt sich die Selbst-Einbettung von „x_1 irritiert x_2“ wie in II(118)-II(120) beliebig oft wiederholen. Da im Rahmen von Typentheorien jedem Vorkommen von „x_1 irritiert x_2“ eine höhere Stufe zugewiesen werden muß als den Vorkommen von „x_1 irritiert x_2“ in den subordinierten daß-Sätzen, ergeben sich auch auf diese Weise potentiell unendlich viele „x_1 irritiert x_2“-Prädikate.[71] Doch was heißt es für einen sprachlichen Ausdruck, potentiell unendlich mehrdeutig zu sein? Ein Ausdruck wie „x_1 ist eine Bank“, den man beliebig oft völlig unterschiedlich paraphrasieren kann, ohne alle seine verschiedenen Bedeutungen auszuschöpfen, ist wohl schwer vorstellbar. Außerdem wäre eine Sprache, in der es solche Ausdrücke gibt, wohl kaum erlernbar.

[71] Bostock zieht daraus die Konsequenz, daß man typenneutrale Prädikate zulassen sollte. Siehe Bostock (1980).

Diese Argumente können und sollen nicht zeigen, daß der Ansatz der Typentheorie fehlerhaft ist. Aber sie dienen dazu, auf einen Etikettenschwindel aufmerksam zu machen. Ambiguität unterscheidet sich in einer wesentlichen Hinsicht von der sogenannten ‚Typenambiguität': Wenn ein sprachlicher Ausdruck (syntaktisch oder lexikalisch) ambig ist, dann läßt sich die Ambiguität durch eine (relativ kleine) endliche Anzahl von Paraphrasen explizit machen. Dies trifft auf ‚Typenambiguitäten' nicht zu. Deshalb sollte man nicht durch die Wahl des Namens suggerieren, daß die mit der Hierarchisierung der Prädikate in der Typentheorie einhergehenden Schwierigkeiten ein Sonderfall von bereits bekannten linguistischen Phänomenen sind. Die Frage, was die unterschiedlichen Eigenschaften verbindet, die die mannigfaltigen „x_1 irritiert x_2"-Prädikate ausdrücken, – daß die Eigenschaften nicht völlig unabhängig sind, erscheint mir offensichtlich – ist innerhalb des Ansatzes der Typentheorie schwer beantwortbar. Sicher ist nur, daß es keine Relation ist; denn eine solche Relation stünde außerhalb der Typenhierarchie.[72]

Ähnliche Schwierigkeiten wie bei reflexiven Prädikationen ergeben sich bei ‚zirkulären Prädikationen' wie II(121). Versucht man II(121) mit Hilfe des Stufenkalküls zu formalisieren, ist II(122) das Ergebnis.

II(121) Julia ist schön und Julia ist tugendhaft und Tugend ist schön und Schönheit ist tugendhaft.

II(122) $^1SCH^1(j) \wedge {}^1TUG^1(j) \wedge {}^2SCH^1({}^1TUG^1) \wedge {}^2TUG^1({}^1SCH^1)$

[72] Angenommen, es gäbe eine Relation R, die alle verschiedenen „x_1 irritiert x_2"-Prädikate miteinander verbindet. Da jede Relation im Stufenkalkül eine bestimmte Stufe hat, muß auch R ein Prädikat einer bestimmten Stufe sein. Welche Stufe n man auch immer wählt: Wie gezeigt worden ist, gibt es ein „x_1 irritiert x_2"-Prädikat auf der n-ten Stufe. Das „x_1 irritiert x_2"-Prädikat der n-ten Stufe kann aber – entgegen der Voraussetzung – nicht in der Relation R stehen, weil in jeder wohlgeformten Formel des Stufenkalküls das Prädikat einer höheren Stufe angehört als die Argumente. Damit ist gezeigt, daß keine derartige Relation R geben kann.

In II(122) werden nicht zwei, sondern vier Prädikatenkürzel verwendet, weil innerhalb der Konzeption des Stufenkalküls zwischen ‚Tugend-erster-Stufe' und ‚Tugend-zweiter-Stufe' beziehungsweise ‚Schönheit-erster-Stufe' und ‚Schönheit-zweiter-Stufe' unterschieden werden muß. Übersetzt man II(122) zurück, dann ergibt sich folgender Satz.

II(123) Julia ist schön-erster-Stufe und Julia ist tugendhaft-erster-Stufe und Tugend-erster-Stufe ist schön-zweiter-Stufe und Schönheit-erster-Stufe ist tugendhaft-zweiter-Stufe.

Die ‚Paraphrase' II(123) weicht vom Originalsatz II(121) in zweierlei Hinsicht wesentlich ab: Erstens läßt die Aussage II(123) offen, ob die Schönheit-zweiter-Stufe tugendhaft (dritter Stufe) ist, oder nicht. Die Möglichkeit, daß Schönheit (egal, welcher Stufe) nicht tugendhaft ist, läßt sich aber nicht mit II(121) vereinbaren, da der Schönheit uneingeschränkt zugesprochen wurde, tugendhaft zu sein. Um dies innerhalb des Ansatzes des Stufenkalküls einigermaßen angemessen auszudrücken, müßte man das Konjunkt „Schönheit ist tugendhaft" als die Menge der Aussagen „Schönheit-n-ter-Stufe ist tugendhaft-(n+1)-ter-Stufe" auffassen, wobei n = 1, 2, 3, … Diese Strategie setzt aber nicht nur unendlich viele ‚Schönheits' - und ‚Tugend' - Prädikate voraus, sondern führt außerdem zu der unangenehmen Konsequenz, daß eine einfache prädikative Aussage durch eine unendliche Menge von Formeln formal repräsentiert wird. – Zweitens impliziert II(121) darüber hinaus, daß es eine Eigenschaft gibt, die Julia und die Schönheit gemeinsam haben, nämlich tugendhaft zu sein. Weil Tugend-erster-Stufe und Tugend-zweiter-Stufe unterschiedliche Eigenschaften sind, ist dies bei II(123) nicht der Fall. Es gibt also Aussagen, die von II(121) logisch impliziert werden, jedoch nicht von II(123).

Also gibt es Aussagen, die inkonsistent mit II(121), aber konsistent mit II(123) sind, und es gibt Aussagen, die durch II(121), aber nicht durch

II(123) impliziert werden. Folglich ist II(123) keine adäquate Paraphrase von II(121). Dementsprechend ist II(122) keine angemessene formale Repräsentation von II(121).

Die Kritik an dem Stufenkalkül läßt sich wie folgt zusammenfassen: Erstens gibt es keine linguistischen Daten, die die Annahme unterstützen, daß es eine Hierarchie der Prädikate in den natürlichen Sprachen gibt. Es ist nicht der Fall, daß durch die Stufenhierarchie nur Aussagen ausgeschlossen werden, die zu Paradoxien führen, sondern es gibt Beispiele für reflexive Prädikationen wie II(99)-II(101), die wahr sind und die sich deshalb nicht als ‚sinnlos' wegerklären lassen. Gerechtfertigt wird diese Stufenhierarchie deshalb nur durch das Ziel, das Russell-Paradox (und verwandte Paradoxien) zu vermeiden. Findet man eine andere, inhaltlich motivierte Möglichkeit, Paradoxien zu vermeiden, dann ist die Stufenhierarchie obsolet. Zweitens führt die Annahme der Stufenhierarchie dazu, daß bestimmte Ausdrücke wie „x_1 irritiert x_2", „x_1 ist transitiv" und „x_1 ist russell-artig" mehreren Prädikaten entsprechen. Dies ist besonders im Fall von definierten Ausdrücken wie „x_1 ist russell-artig" seltsam, denn durch die Definition wurde nur ein Prädikat eingeführt. Besonders grotesk sind die Konsequenzen der Stufenhierarchie, wenn sie wie bei „x_1 irritiert x_2" dazu führt, daß einem Ausdruck potentiell unendlich viele Prädikate entsprechen. Obwohl es verschiedene Prädikate sind, lassen sich die Bedeutungsunterschiede nicht durch Paraphrasen explizieren; die Annahme einer Relation zwischen den verschiedenen Prädikaten, die einen Zusammenhang zwischen ihnen herstellen und die Erlernbarkeit natürlicher Sprachen erklären würde, ist nicht möglich, weil eine solche Relation außerhalb der Typenhierarchie stehen würde. Drittens läßt sich anhand von zirkulären Prädikationen zeigen, daß es Aussagen gibt, die nicht adäquat in der Sprache des Stufenkalküls dargestellt werden können. Formalisiert man II(121), ergibt sich II(122). Wenn man II(122) wieder zurückübersetzt, erhält man die Aussage II(123), die nicht äquivalent zu II(121) ist.

8 Dualistische Typentheorie

Eine interessante Variante der Strategie, das Russell-Paradox durch Stufung zu vermeiden, ist die dualistische Typentheorie, die darauf beruht, den Unterschied zwischen Prädikaten und Subjekttermini stark zu machen. Bealer beschreibt diesen von ihm „first-order approach“ genannten Weg wie folgt:

> „The first-order approach adopts the traditional linguistic distinction between subject and predicate, between noun and verb; the higher order approach does not. That is, on the first-order approach an absolute distinction is made between linguistic subjects and linguistic predicates such that a linguistic subject (noun) cannot except in cases of equivocation be used as a linguistic predicate (verb) and conversely.“[73]

Dies entspricht dem Axiom A1 von Wessels Terminitheorie.

> „Kein Subjektterminus ist ein Prädikatterminus und kein Prädikatterminus ist ein Subjektterminus.“[74]

Dieses Axiom wird von Shramko in *Relevante Eigenschaften* zum Ausgangspunkt für den Aufbau einer relevanten Theorie der Eigenschaften gemacht.[75] Dazu erweitert Shramko die Sprache der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe um zwei termbildende Operatoren.[76] Es sei A(x) eine Formel, die möglicherweise freie Vorkommen von x hat, und F ein Prädikat.

---

[73] Bealer (1982), S. 85. Siehe auch Bealer und Mönnich (1989) S. 201.

[74] Wessel (1995), S. 356.

[75] Siehe Shramko (1999a) und (1999b), Anhang B. In der folgenden Darstellung wurden Shramkos Begrifflichkeiten und Symbole an die in dieser Arbeit verwendeten angepaßt.

[76] Genaugenommen wird die Sprache der klassischen Prädikatenlogik um drei Operatoren erweitert: Zwei termbildende Operatoren und ein „derart, daß“-Operator. Da der syntaktische Status von Ausdrücken der Form „x, derart daß A“ aber unklar bleibt und dieser Operator immer im Zusammenhang mit einem der termbildenden Operatoren angewendet wird, betrachte ich den „derart, daß“-Operator als Teil dieses termbildenden Operators.

Dann gelten in der Sprache des Systems der relevanten Eigenschaften S^{rE} folgende Regeln:

PT Wenn F ein Prädikatenzeichen ist, dann ist πF ein Zeichen für einen Subjektterminus.

ST Wenn A(x) eine Formel ist, in der die Variable x möglicherweise frei vorkommt, dann ist [x.A(x)] ein Prädikatenzeichen.

Shramko kommentiert diese Regeln und bringt dabei den Grundgedanken der dualistischen Typentheorie auf den Punkt:

> „Den Ausdruck [x.Ax] liest man als ‚die Eigenschaft ein x derart zu sein, daß Ax‘, und πP als ‚die Eigenschaft P‘. Das heißt, daß wir zwischen zwei verschiedenen *Redemodi* bezüglich ein und derselben Eigenschaft unterscheiden. Der π-Operator gibt uns die Möglichkeit, eine Eigenschaft in die Subjektposition zu stellen, und das ist in unserer Theorie die einzige Möglichkeit, eine Eigenschaft in solch einer Position zu verwenden. [...] Man sieht leicht, daß das Russellsche Paradox jetzt gar nicht mehr formuliert werden kann, weil FF kein korrekt gebildeter Sprachausdruck ist. Trotzdem ist unsere Theorie (wie auch die von Wessel) keine (vollgültige) Typentheorie, weil wir keine besonderen Typen für jede Sprachebene einführen. Nur ein Prinzip ist konsequent durchgeführt – man unterscheidet zwischen dem Vorkommen einer Eigenschaft in einer Prädikatposition und dem in einer Subjektposition. Diese Lösung kann als eine eingeschränkte Typen-Theorie angesehen werden. Sie erlaubt genau *zwei* Typen von Termini, zieht aber keine Typen höherer als zweiter Ebene (wie es den gewöhnlichen Typentheorien eigen ist) in die Diskussion.“[77]

[77] Shramko (1999b), S. 161. Shramkos „[x.Ax]“ und „Ax“ sind andere Schreibweisen von „[x.A(x)]“ und „A(x)“ in der in dieser Arbeit verwendeten Notation.

Shramkos Unterscheidung von „zwei verschiedenen Redemodi bezüglich ein und derselben Eigenschaft“ entspricht der Unterscheidung zwischen nominalisierten Prädikaten und Prädikaten. Anstelle einer Konvention, die regelt, welche Vorkommen von Prädikatenzeichen als nominalisierte Prädikate und welche als (nicht-nominalisierte) Prädikate zu interpretieren sind, verwendet Shramko den termbildenden Operator π, der aus einem Zeichen für ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat ein Zeichen für das entsprechende nominalisierte Prädikat bildet. Der andere Operator [.] dient dazu, aus beliebigen Aussagefunktionen Zeichen für (nicht-nominalisierte) Prädikate zu bilden. Der Zusammenhang zwischen diesen ‚neuen‘ Prädikaten und den entsprechenden Aussagefunktionen wird durch das Abstraktionsschema AB hergestellt, wobei A[x/k] die Formel ist, die aus A(x) entsteht, indem alle Vorkommen der Variablen x durch Vorkommen der Individuenkonstante k in A(x) ersetzt werden:

AB $[x.A(x)](k) \equiv A[x/k]$

Die syntaktische Unterscheidung zwischen Prädikaten und nominalisierten Prädikaten führt zu den zwei unterschiedlichen Typen in S^{rE}, und diese dualistische Typenunterscheidung soll dazu dienen, das Russell-Paradox auszuschalten. Dies gelingt auch, wenn auch nicht dadurch, daß F(F) keine wohlgeformte Formel in S^{rE} ist. Denn einer Formel F(F) der in den letzten Abschnitten entwickelten logischen Sprache entspricht die Formel $F(\pi F)$ in S^{rE}. Und da in dem Abschnitt über das Russell-Paradox gezeigt wurde, daß sich ein Paradox mit Hilfe von aussagenlogischen Mitteln ergibt, wenn sich eine Formel der Form $F(F) \equiv {\sim}F(F)$ herleiten läßt, ist es evident, daß aufgrund derselben aussagenlogischen Schlüsse aus $F(\pi F) \equiv \sim F(\pi F)$ ein Paradox in S^{rE} ableitbar wäre. Das Paradox wird in S^{rE} dadurch blockiert, daß die Definition der Russell-Eigenschaft sich nicht in S^{rE} formalisieren läßt.

Der termbildende Operator π erlaubt es innerhalb des Ansatzes der dualistischen Typentheorie, viele Aussagen zu formalisieren, in denen über Eigenschaften prädiziert wird, wie II(124)-II(127) zeigen.

II(124) Verwandtschaft ist symmetrisch.

II(125) $SYM^1(\pi VERW^2)$

II(126) Sokrates ist weise und Weisheit ist eine Tugend.

II(127) $WEIS^1(s) \wedge TUG^1(\pi WEIS^1)$

Zu der Quantifikation von Eigenschaften äußert sich Shramko nicht explizit. Eine mögliche Formalisierung von II(128), die mit der Darstellung von S^{rE} durch Shramko verträglich wäre, ist II(129). Alternativ könnte man sich auch vorstellen, daß dem zweiten Vorkommen von „x^1" der π-Operator vorangestellt wird. Außerdem wäre es möglich, das Superskript von „x^1" wegzulassen und auf diese Weise auf die sortale Quantifikation zu verzichten.

II(128) Es gibt etwas, das eine Tugend ist.

II(129) $\exists x^1\ TUG^1(x^1)$

Unabhängig davon, welche Variante gewählt wird, der erste Schritt, der zur Herleitung des Russell-Paradoxes (ohne Kopula) führte, läßt sich in S^{rE} nicht darstellen. Er lautete:

II(130) Für alle einstelligen Eigenschaften X gilt: Die Eigenschaft X ist russell-artig genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Eigenschaft X X ist.

Da die Sprache von S^{rE} eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe ist, die um zwei Operatoren erweitert wird, läßt sich II(130) nicht in S^{rE} formalisieren, denn das dritte Vorkommen von „X" in II(124) steht an der Stelle eines Prädikates, und Variablen in Prädikatpositionen dürfen in einer Prädikatenlogik erster Stufe nicht vorkommen. Über die Kopula „haben" verfügt S^{rE} nicht. Daher läßt sich das Russell-Paradox in S^{rE} nicht formalisieren, S^{rE} ist also paradoxienfrei.

Für diese Paradoxienfreiheit wird jedoch ein hoher Preis bezahlt. Jede Form der prädikativen Quantifikation (inklusive der Mischquantifikationen wie in II(83), II(85) und II(87)) wird ausgeschlossen, und auch Sätze mit der Kopula „haben" können nicht adäquat dargestellt werden. Diese Einschränkungen sind sehr restriktiv: nicht einmal das Leibniz-Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren ist in S^{rE} formulierbar – etwas, was meines Erachtens eine Minimalanforderung an jede philosophisch interessante formale Eigenschaftstheorie darstellt.

Es liegt der Gedanke nahe, zu S^{rE} das Zeichen „$\leftarrow$" für die Kopula „hat" und sortale Quantoren hinzuzufügen; nennen wir das entstehende System $S^{rE\leftarrow}$.[78] Da auf der rechten Seite der Kopula nur nominalisierte Prädikate auftauchen und nominalisierte Prädikate in S^{rE} durch den termbildenden Operator „π" erhalten werden, nimmt das Prädikationsschema für S^{rE} für jedes Prädikat F und für beliebige Subjekttermini $k_1, k_2, \ldots, k_d$ folgende Gestalt an:

$$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow \pi F^d \text{ genau dann, wenn } F^d(k_1, \ldots, k_d)\ (0 \leq d)$$

Wie man an II(131) sieht, läßt sich in $S^{rE\leftarrow}$ das Leibniz-Prinzip formulieren, es erfüllt also dieses Minimalkriterium.[79]

$$\text{II(131)}\quad \forall x^{-1}\forall y^{-1}\forall Z^1\ ((x^{-1} \leftarrow Z^1 \equiv y^{-1} \leftarrow Z^1) \equiv (x^{-1} = y^{-1}))$$

[78] Wenn man die Prädikation nicht als Kopula, sondern als Relation auffaßt, ändert das nichts an der folgenden Argumentation.

[79] An dieser Stelle wird vorausgesetzt, daß sortal quantifiziert wird. Eine nicht-sortale Quantifikation würde dazu führen, daß einige Substitutionsinstanzen nicht wohlgeformt wären. Denn wenn ein prädikativ gebrauchtes nominalisiertes Prädikat in einer Formel die falsche Stelligkeit besitzt, ist die Formel nicht wohlgeformt. Vgl. die Diskussion in Abschnitt 4 dieses Kapitels.

Leider können dieselben Mittel, die dazu dienen, das Leibniz-Prinzip darzustellen, dazu verwendet werden, in $\mathcal{S}^{rE\leftarrow}$ das Russell-Paradox (mit Kopula) herzuleiten. $\mathcal{S}^{rE\leftarrow}$ ist also nicht konsistent.

Das Russell-Paradox in $\mathcal{S}^{rE\leftarrow}$

(i) $k \leftarrow \pi F^1 \equiv F^1(k)$

(ii) $\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \leftarrow \pi F^1 \equiv F^1(\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1])$

(iii) $\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \leftarrow \pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \equiv$
$[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1](\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1])$

(iv) $[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1](\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1]) \equiv$
${\sim}\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \leftarrow \pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1]$

(v) $\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \leftarrow \pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \equiv$
${\sim}\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1] \leftarrow \pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1]$

Zeile (i) ist das Prädikationsschema, das für beliebige einstellige Prädikate F^1 und beliebige Subjekttermini k gilt. (ii) ergibt sich aus (i), indem $\pi[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1]$ für k gewählt wird, und (iii) aus (ii), indem $[X^1.{\sim}X^1 \leftarrow X^1]$ für F^1 eingesetzt wird. (iv) ist eine Einsetzung in das Abstraktionsschema AB. (iii) und (iv) ergeben aussagenlogisch (v). Da (v) eine Formel der Form $p \equiv {\sim}p$ ist, folgt das Paradox aus (v) unter Verwendung von aussagenlogischen Schlüssen.

Die Ausdrucksmöglichkeiten von $\mathcal{S}^{rE}$ lassen sich also nicht erweitern, indem ein Zeichen für die Prädikation hinzugefügt wird, weil das resultierende System inkonsistent ist. Dies ist insofern nicht verwunderlich, weil die Strategie zur Vermeidung des Russell-Paradoxes in einer dualistischen Typentheorie darauf beruht, strikt zwischen Subjekttermini und Prädikaten zu unterscheiden. Diese Unterscheidung wird durch den Gebrauch einer Kopula oder einer Prädikationsrelation aufgeweicht, deshalb führt die

Erweiterung von S^{rE} um eine Kopula oder eine Prädikationsrelation zu der Widersprüchlichkeit des Systems. Das Russell-Paradox wird also in der dualistischen Typentheorie dadurch umgangen, daß starke syntaktische Einschränkungen getroffen werden – Einschränkungen, denen aber auch harmlose Aussagen zum Opfer fallen, unter anderem diejenigen, in denen wie im Leibniz-Prinzip prädikativ quantifiziert wird, aber auch so einfache Aussagen wie II(132), in denen die Kopula „hat" vorkommt.[80]

II(132) Sokrates hat die Eigenschaft, weise zu sein.

Das Ziel einer Typenhierarchie – sowohl einer normalen als auch einer dualistischen – besteht in der Vermeidung des Russell-Paradoxes durch eine Einschränkung der verwendeten logischen Sprache. Weil die möglicherweise paradoxien-auslösenden Aussagen in solchen logischen Sprachen nicht adäquat repräsentiert werden können, können diese Aussagen nicht mit Hilfe von logischen Systemen analysiert werden, die auf diesen Sprachen aufgebaut werden. Typenhierarchien sind also kein Weg zur logischen Analyse des Russell-Paradoxes, sondern verhindern sie.

9 Resümee

In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, daß Prädikate – in ihrer nominalisierten Form – an Argumentstellen in Aussagen vorkommen. Bereits diese Beobachtung ist ausreichend, um das Ziel inhaltlich zu motivieren, die Prädikatenlogik von dem Überrest der Russellschen Hierarchien zu reinigen, das in der Prädikatenlogik erster Stufe das Vorkommen von Prädikaten an Argumentstellen verhindert. Denn nach dem in der Einleitung formulierten Kriterium ist ein logisches System um so besser, je stärker es den vorhandenen linguistischen Daten gerecht wird. Des weiteren wurde

[80] Bealer und Mönnich sehen ebenfalls, daß die Verwendung einer Kopula beziehungsweise einer Prädikationsrelation (zusammen mit einem uneingeschränkten Comprehensionsprinzip) zu dem Russell-Paradox führt, und verzichten unter anderem deshalb auf die Verwendung eines ausgezeichneten Zeichens für die Prädikation.

gezeigt, daß nominalisierte Prädikate nicht nur in Argumentpositionen, sondern auch als prädikativ gebrauchte nominalisierte Prädikate zusammen mit der Kopula „haben“ vorkommen. Die Verwendung von (nicht-nominalisierten) Prädikaten und die Verwendung von einem prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikat sowie der Kopula sind zwei verschiedene, logisch äquivalente Möglichkeiten, eine Prädikation – verstanden als eine Sprachhandlung – zu vollziehen.

In den natürlichen Sprachen wird über Eigenschaften quantifiziert; und diese Quantifikation läßt sich nicht immer auf die Quantifikation über Gegenstände reduzieren. Die Platzhalter, die in den natürlichen Sprachen die Funktion von Variablen übernehmen, können Argumentpositionen, die Positionen von prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikaten und auch die Prädikatpositionen in Sätzen einnehmen und können dabei durch dieselben natürlichsprachlichen Quantoren gebunden werden. Dabei läßt sich eine Aussage, in denen ein Platzhalter in der Prädikatposition verwendet wird, in eine äquivalente Aussage umwandeln, in denen die Kopula „haben“ und ein Platzhalter in der Position eines prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikates verwendet wird.

Eine angemessene Theorie der Prädikation berücksichtigt alle angesprochenen Aspekte der natürlichen Sprachen. Doch gleichzeitig ist es notwendig, einen Weg zu finden, um das Russell-Paradox zu blockieren, weil sonst das entstehende System nicht widerspruchsfrei ist. Dabei ist die auf Russell zurückgehende Strategie, eine Typenhierarchie aufzubauen und den Formelaufbau unter der Verwendung dieser Hierarchie einzuschränken, kein guter Weg. Neben vielen anderen Gründen spricht gegen diese Strategie, daß es in den natürlichen Sprachen keine Hierarchie gibt und daß durch die Beschränkung des Formelaufbaus die intuitive Repräsentation vieler Aussagen syntaktisch ausgeschlossen wird, ohne daß es einen – von der Vermeidung des Russell-Paradoxes unabhängigen – Grund dafür gibt.

III Naive Prädikatenlogik

„Well, the way of paradoxes is the way of truth. To test reality we must see it on the tight rope. When the verities become acrobats, we can judge them.“

Oscar Wilde

The Picture of Dorian Gray

1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel soll ein prädikatenlogisches System entwickelt werden, das in der Lage ist, den in Kapitel II zusammengetragenen linguistischen Daten gerecht zu werden: Zeichen für Prädikate sollen nicht nur in der Prädikatposition, sondern auch in Argumentpositionen der Aussagen erlaubt sein, es soll eine Kopula geben, es soll möglich sein, über Eigenschaften zu quantifizieren etc. Gleichzeitig soll das System – wie in der Einleitung angekündigt – den Rahmen einer Prädikatenlogik erster Stufe nicht sprengen, schon um die wünschenswerten metalogischen Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe zu erhalten. Da auf eine Typenhierarchie oder andere Absicherungen verzichtet wird, scheint es trivialerweise der Fall zu sein, daß das entstehende System ebenso wie die naive Mengentheorie ein Opfer des Russell-Paradoxes wird. Doch es wird sich zeigen, daß Naivität nicht immer bestraft wird. Die Naive Prädikatenlogik ist ein typenfreies System, in dem über Eigenschaften quantifiziert wird und das trotzdem widerspruchsfrei ist.

Der scheinbare Widerspruch, ein System konstruieren zu wollen, in dem sowohl über Eigenschaften quantifiziert werden kann und das gleichzeitig nicht über die Prädikatenlogik erster Stufe hinausgeht, wird durch einen Kunstgriff aufgelöst. Bei der Naiven Prädikatenlogik NPL handelt es sich um eine mehrsortige Prädikatenlogik erster Stufe mit einem einzigen Prädikatenzeichen. Neben den normalen Individuenkonstanten für Gegenstände gibt es noch Individuenkonstanten für Eigenschaften (und zwar beliebiger Stelligkeit). Diese Individuenkonstanten repräsentieren die nominalisierten Prädikate. Das einzige Prädikatenzeichen repräsentiert die Kopula. Dieses Vorgehen mag auf den ersten Blick etwas befremdlich erscheinen, weil die ‚normalen' Prädikate auf einmal als Individuenkonstanten repräsentiert werden und das einzige Prädikatenzeichen für die Kopula reserviert wird, obwohl in Kapitel II dafür argumentiert wurde, daß es sich bei der Kopula nicht um ein Prädikat handelt. Die Gründe dafür werden deutlich werden.

Wie in Kapitel II gezeigt wurde, lassen sich Sätze, in denen ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat vorkommt, in eine Aussage umformen, in der die Funktion des (nicht-nominalisierten) Prädikates durch das entsprechende prädikativ gebrauchte nominalisierte Prädikat und die Kopula „haben" übernommen wird. Auf dieselbe Weise lassen sich Platzhalter für (nicht-nominalisierte) Prädikate in Platzhalter für nominalisierte Prädikate umwandeln. Deswegen ist es ausreichend, beim Aufbau der Naiven Prädikatenlogik nur nominalisierte Prädikate und die Kopula „haben" zu berücksichtigen und hinterher Aussagen, in denen nicht-nominalisierte Prädikate beziehungsweise Platzhalter in Prädikatpositionen vorkommen, zu definieren.[81]

Die Kopula „haben" nimmt eine wichtige Rolle ein. Wie gezeigt wurde, handelt es sich bei „haben" um eine syntaktische Markierung der Prädi-

---

[81] Dieses Vorgehen impliziert nicht die sprachphilosophische These, daß Aussagen mit nominalisierten Prädikaten primär gegenüber Aussagen sind, in denen (nicht-nominalisierte) Prädikate gebraucht werden. Dies ist ebensowenig der Fall, wie eine definitorische Einführung der Konjunktion durch die Subjunktion und die Negation die These impliziert, daß die Subjunktion logisch primär gegenüber der Konjunktion ist.
Ein ähnlicher Weg wurde übrigens bereits von Bolzano eingeschlagen, als er die allgemeine Form von (wahren) Urteilen mit dem Schema „A hat B" angab. Siehe Bolzano (1985), S. 133 und S. 147f.

kation, nicht um eine Relation, deshalb gibt es auch keine nominalisierte Form der Kopula. Aus diesem Grund wurde die Kopula nicht durch ein Prädikatenkürzel, sondern durch das Symbol „$\leftarrow$" in Aussagen der Form „$k_1, k_2, \ldots, k_d \leftarrow F^d$" dargestellt. Da es das Ziel ist, die Kopula in einer Prädikatenlogik erster Stufe adäquat zu repräsentieren, ohne die Syntax zu erweitern, wird die Kopula als das einzige Prädikatenzeichen dargestellt. Als Symbol für dieses Prädikatenzeichen wird „$\mathcal{P}$" verwendet. Beim Aufbau des Systems wird die Sonderrolle der Kopula als syntaktische Markierung der Prädikation berücksichtigt werden.

2 Das Alphabet

Das Alphabet der Naiven Prädikatenlogik ähnelt dem informell eingeführten Alphabet des Kapitel II in einigen Hinsichten, unterscheidet sich jedoch aus den in dem letzten Abschnitt angedeuteten Gründen. Es enthält nur das Prädikatenzeichen „$\mathcal{P}$" und neben den normalen Konstanten und Variablen für Gegenstände auch Konstanten und Variablen für Eigenschaften. Die Stelligkeit von *Eigenschaftskonstanten* oder *-variablen* wird durch einen Superskript gekennzeichnet. Nullstellige Eigenschaftskonstanten und -variablen werden als Zeichen für Aussagen interpretiert. Um eine einheitliche Darstellung zu erreichen, werden *Gegenstandskonstanten* und *-variablen* mit dem Superskript ‚-1' gekennzeichnet. Gegenstands- und Eigenschaftskonstanten sind *Individuenkonstanten*, Gegenstands- und Eigenschaftsvariablen sind *Individuenvariablen*. Individuenkonstanten und Individuenvariablen sind *Individuenzeichen*.

Das Alphabet der Naiven Prädikatenlogik[82] enthält daher folgende Zeichen:[83]

(a) abzählbar unendlich viele Individuenvariablen:

$\mathbf{V^{-1}_1, V^{-1}_2, V^{-1}_3}, \ldots, \mathbf{V^0_1, V^0_2}, \ldots, \mathbf{V^1_1, V^1_2}, \ldots, \mathbf{V^2_1, V^2_2}, \ldots, \mathbf{V^3_1, V^3_2}, \ldots$

(b) abzählbar unendlich viele Individuenkonstanten:

$\mathbf{K^{-1}_1, K^{-1}_2, K^{-1}_3}, \ldots, \mathbf{K^0_1, K^0_2}, \ldots, \mathbf{K^1_1, K^1_2}, \ldots, \mathbf{K^2_1, K^2_2}, \ldots, \mathbf{K^3_1, K^3_2}, \ldots$

(c) ein Prädikatenzeichen: $\mathcal{P}$

(d) zwei aussagenlogische Operatoren: $\sim$, $\supset$

(e) ein Quantorenzeichen: $\forall$

(f) die runden Klammern: **(**, **)**

(g) das Komma: **,**

„$\mathbf{V^{-1}_n}$“ wird die *alphabetisch n-te Gegenstandsvariable*, „$\mathbf{K^{-1}_n}$“ die *alphabetisch n-te Gegenstandskonstante*, „$\mathbf{V^d_n}$“ ($d \geq 0$) die *alphabetisch n-te d-stellige Eigenschaftsvariable* und „$\mathbf{K^d_n}$“ ($d \geq 0$) die *alphabetisch n-te d-stellige Eigenschaftskonstante* genannt. Eine *Formel* ist eine endliche, nichtleere Sequenz von Zeichen des Alphabets. Zwei Formeln sind genau dann identisch, wenn sie graphisch identisch sind. Ein Zeichen des Alphabets *kommt* genau dann in einer Formel *vor*, wenn es graphischer Bestandteil der Formel ist.

Bei der Einführung des Alphabets wurden die Zeichen nicht gebraucht,

[82] Im folgenden Text wird anstatt „Alphabet der Naiven Prädikatenlogik“, „Formel der Naiven Prädikatenlogik“, „Tautologie der Naiven Prädikatenlogik“ usw. nur „Alphabet“, „Formel“, „Tautologie“ usw. geschrieben, wenn es nicht zu Verwirrung führen kann.

[83] Das Komma wird bei der Darstellung des Alphabets in zwei verschiedenen Funktionen verwendet. In (a), (b), (d) und (f) dient es, um verschiedene Zeichen, die zum Alphabet gehören, zu trennen. Dagegen wird das Zeichen „ **,** “ in (g) nicht gebraucht, sondern angeführt, es ist also Teil des Alphabets. (Der Unterschied wird dadurch verdeutlicht, daß im Gegensatz zu den anderen Zeilen in Zeile (g) das Komma – wie alle Zeichen des Alphabets – fett gedruckt ist.)

sondern (durch Kommata getrennt) angeführt. Das Zeichen „$\mathbf{K^1_2}$“ ist also kein Name und auch keine Abkürzung, sondern nur ein Zeichen. Formeln sind daher Zeichenketten. Um sich bequem auf die Zeichen des Alphabets und auf Formeln beziehen zu können, ohne ständig Anführungszeichen zu verwenden, werden Namen verwendet, die sich von den Zeichen des Alphabets nur dadurch unterscheiden, daß sie nicht fett gedruckt werden. So ist beispielsweise „$\forall V^{-1}_3\ \forall V^1_5\ (\mathcal{P}(V^{-1}_3,\ \forall V^1_5) \supset \mathcal{P}(V^{-1}_3,\ K^1_3))$“ ein Name von III(1).

III(1) $\quad \boldsymbol{\forall V^{-1}_3\ \forall V^1_5\ (\mathcal{P}(V^{-1}_3,\ \forall V^1_5) \supset \mathcal{P}(V^{-1}_3,\ K^1_3))}$

Neben der Möglichkeit, sich durch diese Namen auf Zeichen des Alphabets und auf Formeln zu beziehen, werden noch Namenschemata benötigt. Namenschemata sind Platzhalter, die verwendet werden, um sich gleichzeitig auf viele Formeln beziehen zu können. Aussagen, in denen Namenschemata verwendet werden, werden zu Aussagen über Formeln, indem man alle Namenschemata durch passende Namen ersetzt. Als Namenschemata werden, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, folgende Symbole (mit und ohne Indizes) verwendet:

- A, B, C, D für Formeln;
- x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} für Gegenstandsvariablen;
- x^d, y^d, z^d, X^d, Y^d, Z^d für d-stellige Eigenschaftsvariablen ($d \geq 0$);
- x, y, z für Individuenvariablen;
- k^{-1}, l^{-1}, m^{-1} für Gegenstandskonstanten;
- k^d, l^d, m^d, F^d für d-stellige Eigenschaftskonstanten ($d \geq 0$);
- k, l, m für Individuenkonstanten;
- i, j für Individuenzeichen.

Daß die Zeichen des Alphabets und die Formeln der Naiven Prädikatenlogik als Zeichen und Zeichenketten aufgefaßt und ihnen hinterher Standardnamen zugeordnet werden, mag unnötig kompliziert erscheinen. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, daß auf diese Weise der Status von Formeln eindeutig geklärt wurde, während in vielen logischen Arbeiten ziemlich dunkel bleibt, worauf sich Formeln beziehen. Durch die Einführung der Standardnamen für die Zeichen des Alphabets und Formeln wurde die Sprache der Naiven Prädikatenlogik in gewisser Weise verdoppelt. Es wird sich zeigen, daß die Ebene der Namen in einiger Hinsicht interessanter ist als die Ebene der bezeichneten Symbole.

3 Wohlgeformte Formeln und Definitionen

Mit dem Ausdruck „(A)[i/j]" wird die Formel bezeichnet, die aus A entsteht, wenn jedes graphische Vorkommen von i in A durch j ersetzt wird.

Es sei A eine Formel, und es seien $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ($n \geq 0$) paarweise verschiedene Individuenzeichen sowie $j_1, j_2, \ldots, j_n$ beliebige Individuenzeichen. Ferner seien $i'_1, i'_2, \ldots, i'_n$ in alphabetischer Ordnung die ersten Gegenstandskonstanten, die nicht in A vorkommen und außerdem paarweise verschieden von $i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n$ sind. Dann sei die *simultane Substitution* von $j_1, j_2, \ldots, j_n$ für $i_1, i_2, \ldots, i_n$ in der Formel A wie folgt definiert:

$$(A)[i_1, i_2, \ldots, i_n/j_1, j_2, \ldots, j_n] \equiv_{df}$$
$$(\ldots((((\ldots(((A)[i_1/i'_1])[i_2/i'_2])\ldots)[i_n/i'_n])[i'_1/j_1])\,[i'_2/j_2])\ldots)\,[i'_n/j_n]$$

Ferner gilt: Wenn $n = 0$, dann $(A)[i_1, i_2, \ldots, i_n/j_1, j_2, \ldots, j_n] = A$. Außerdem fallen, wenn keine Ambiguität droht, die Klammern um „A" weg.

Wohlgeformte Formel (wff):

(a) Formeln der Art $\mathcal{P}(k_1, k_2, \ldots, k_d, F^d)$ ($d \geq 0$) sind wff;

(b) wenn A eine wff ist, dann ist $\sim A$ eine wff;

(c) wenn A und B wff sind, dann ist $(A \supset B)$ eine wff;

(d) wenn $A[x^d/k^d]$ ($d \geq -1$) eine wff ist, dann ist $\forall x^d$ A eine wff;

(e) eine wff liegt nur aufgrund der vorhergehenden Punkte vor.

Eine Formel $\mathcal{P}(k_1, k_2, \ldots, k_d, F^d)$ ($d \geq 2$) wird „$k_1, k_2, \ldots, k_d$ stehen in der Relation F^d“, eine Formel $\mathcal{P}(k_1, F^1)$ wird „k_1 hat die Eigenschaft F^1“ und eine Formel $\mathcal{P}(F^0)$ wird „Es ist der Fall, daß F^0“ gelesen. Die Sequenz $\forall x$ aus dem Quantorenzeichen $\forall$ und einer Individuenvariable x wird „*Quantor*“ genannt. Gemäß Punkt (e) ist $\forall x$ A keine wff, wenn in A bereits der Quantor $\forall x$ vorkommt, weil in diesem Fall das Ergebnis der Ersetzung jedes Vorkommens von x in A durch k, A[x/k], keine wff ist. Daher sind Formeln, in denen sich die Wirkungsbereiche identischer Quantoren überlappen, keine wohlgeformten Formeln. Ferner gilt: Wenn $\forall x$ A wohlgeformt ist und A wohlgeformt ist, dann kommt x nicht in A vor.

Der Formelaufbau der Naiven Prädikatenlogik entspricht fast dem einer normalen mehrsortigen prädikatenlogischen Sprache. Die einzige Abweichung betrifft das Prädikatenzeichen $\mathcal{P}$, dem keine bestimmte Stelligkeit zugeordnet wurde.[84] Dies ist der Fall, weil „$\mathcal{P}$“ zwar ‚offiziell‘ ein Prädikatenzeichen ist, aber letztlich die Kopula „haben“ repräsentieren soll, und die Kopula hat – wie wir in Kapitel II gesehen haben – keine Stelligkeit. Wollte man diese Abweichung von dem normalen Aufbau einer prädikatenlogischen Sprache beseitigen, könnte man für jede Stelligkeit n ein Prädikatenzeichen „$\mathcal{P}^n$“ einführen. Doch die Zersplitterung der Kopula in unendlich viele Symbole ist meines Erachtens wesentlich uneleganter, als eine kleine Abweichung von dem normalen Aufbau einer prädikatenlogischen Sprache in Kauf zu nehmen.

$A[k^d/x^d]$ ist eine *quasi-wohlgeformte Formel* (qwff) genau dann, wenn A eine wff oder eine qwff ist, die Individuenkonstante k^d in A vorkommt und die Individuenvariable x^d nicht in A vorkommt.

[84] Den Hinweis, daß die Sprache der Naiven Prädikatenlogik in dieser Hinsicht von einer Standard-Prädikatenlogik abweicht, verdanke ich Heinrich Wansing.

Von nun an bezeichnen die Namenschemata A, B, C, D, soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, wff oder qwff. Des weiteren werden von jetzt an die Superskripte der Individuenkonstanten und der Individuenvariablen unterdrückt, wenn es der Kontext erlaubt; insbesondere wird – sofern nicht ausdrücklich anders erwähnt – davon ausgegangen, daß in A[i/j] die Individuenzeichen i, j dieselben Superskripte bzw. in $A[i_1, i_2, \ldots, i_n/j_1, j_2, \ldots, j_n]$ i_k und j_k ($1 \leq k \leq n$) dieselben Superskripte haben. Ferner wird A *atomar* genannt genau dann, wenn keines der Zeichen ~, ⊃, ∀ in A vorkommt. Die Außenklammern von Namen von wff oder qwff dürfen weggelassen werden.

Eine wff oder eine Menge von wff, in der keine Individuenvariable vorkommt, wird *quantorenfrei* genannt; eine, in der keine Individuenkonstante vorkommt, wird *geschlossen* genannt; eine, die nicht geschlossen ist, wird *offen* genannt. Eine wff oder eine Menge von wff, in der unendlich viele Gegenstandskonstanten und für jedes d ($d \geq 0$) unendlich viele d-stellige Eigenschaftskonstanten nicht vorkommen, wird *unendlich erweiterbar* genannt. Aus der Definition von „Formel“ folgt, daß jede wff und jede endliche Menge von wff unendlich erweiterbar sind.

Eine *unmittelbare Teilformel* von einer wff oder qwff A liegt nur aufgrund der folgenden Bestimmungen vor:

(a) Wenn es eine wff oder qwff B gibt, so daß A = ~B, dann ist B die unmittelbare Teilformel von A.

(b) Wenn es wff oder qwff B, C gibt, so daß A = B ⊃ C, dann sind B und C die unmittelbaren Teilformeln von A.

(c) Wenn es eine wff oder qwff B und eine Individuenvariable x^d gibt, so daß $A = \forall x^d\, B$, dann sind $B[x^d/K^d_1]$, $B[x^d/K^d_2]$, $B[x^d/K^d_3]$, … die unmittelbaren Teilformeln von A.

Eine *Teilformel* von A liegt nur aufgrund der folgenden Bestimmungen vor:

(a) A ist eine Teilformel von A.

(b) Jede unmittelbare Teilformel einer Teilformel von A ist eine Teilformel von A.

Eine *unmittelbare Komponente* von einer wff oder qwff A liegt nur aufgrund der folgenden Bestimmungen vor:

(a) Wenn es eine wff oder qwff B gibt, so daß $A = {\sim}B$, dann ist B die unmittelbare Komponente von A.

(b) Wenn es wff oder qwff B, C gibt, so daß $A = B \supset C$, dann sind B und C die unmittelbaren Komponenten von A.

(c) Wenn es eine wff oder qwff B und eine Individuenvariable x^d gibt, so daß $A = \forall x^d\, B$, dann ist B die unmittelbare Komponente von A.

Eine *Komponente* von A liegt nur aufgrund der folgenden Bestimmungen vor:

(a) A ist eine Komponente von A.

(b) Jede unmittelbare Komponente einer Komponente von A ist eine Komponente von A.

Ein Individuenzeichen i^d ($d \geq 0$) kommt in A genau dann *prädikativ* vor, wenn es Individuenzeichen $j_1, j_2, \ldots, j_d$ gibt, so daß $\mathcal{P}(j_1, j_2, \ldots, j_d, i^d)$ eine Komponente von A ist.

Es wird die Länge einer wff oder qwff A (Abkürzung: L[A]) wie folgt definiert:

(a) $L[A] = 1$ genau dann, wenn A atomar ist;

(b) $L[{\sim}A] = L[A] + 1$;

(c) $L[A \supset B] = L[A] + L[B] + 1$;

(d) $L[\forall x\, A] = L[A] + 1$.

Die Menge der Gegenstandskonstanten wird mit „KON_{-1}" bezeichnet, die Menge der d-stelligen Eigenschaftskonstanten wird mit „KON_d" bezeichnet, die Menge der Individuenkonstanten wird mit „KON" bezeichnet, die Menge der Gegenstandsvariablen wird mit „VAR_{-1}" bezeichnet, die Menge der d-stelligen Eigenschaftsvariablen wird mit „VAR_d" bezeichnet, die Menge der Individuenvariablen wird mit „VAR" bezeichnet, und die Menge der wff wird mit „WFF" und die Menge der qwff mit „QWFF" bezeichnet. Die Menge der atomaren wff wird mit „WFF_a" bezeichnet. Von jetzt an wird das Zeichen ‚M' (unter Umständen unter Verwendung zusätzlicher Indizes), wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, für Teilmengen von WFF verwendet.

Die aussagenlogischen Operatoren $\wedge$, $\vee$, $\equiv$ und der Existenzquantor $\exists$ werden standardmäßig definiert. Während diese Definitionen ihrem Inhalt nach wohlbekannt sind, gibt es manchmal Verwirrungen über den Status von Definitionen. Deswegen wird an dieser Stelle auf sie eingegangen.

III(2) $(A \vee B) \equiv_{df} (\sim A \supset B)$

III(3) $(\mathcal{P}(V^{-1}{}_2, K^1{}_3) \vee \mathcal{P}(K^{-1}{}_3, K^1{}_3)) \equiv_{df} (\sim\mathcal{P}(V^{-1}{}_2, K^1{}_3) \supset \mathcal{P}(K^{-1}{}_3, K^1{}_3))$

Die Definition III(2) dient dazu, neue Namen einzuführen. In III(2) werden die Namenschemata „A" und „B" als Platzhalter für wff beziehungsweise qwff verwendet. Um aus III(2) eine Aussage über Formeln (also Zeichenketten) zu gewinnen, müssen diese Namenschemata durch Namen von Formeln ersetzt werden. Ersetzt man „A" durch „$\mathcal{P}(V^{-1}{}_2, K^1{}_3)$" und „B" durch „$\mathcal{P}(K^{-1}{}_3, K^1{}_3)$", dann ergibt sich III(3). III(3) ist eine andere, kürzere Formulierung der Aussage III(4), woraus unmittelbar III(5) folgt.[85]

[85] Die Zeichen „$\equiv$" und „$\equiv_{df}$" haben völlig unterschiedliche Funktionen. Das Zeichen „$\equiv$" ist Teil von definierten Namen von Zeichenketten, das Zeichen „$\equiv_{df}$" steht für die Relation „Der Name ‚x_1' ist ein anderer Name für die Formel, die der Name ‚x_2' bezeichnet." Die Zeichen sind deswegen so gewählt, weil es bei einer sinnvoll gewählten Definition Abk $\equiv_{df}$ B („Abk" ist eine Zeichenkette) einen Ausdruck der Form „$\forall x_1\ \forall x_2 \ldots \forall x_n$ (Abk $\equiv$ B)" gibt, der ein Name eines Theorems ist.

III(4) Der Name „$(\mathcal{P}(V^{-1}_{2}, K^{1}_{3}) \vee \mathcal{P}(K^{-1}_{3}, K^{1}_{3}))$“ ist ein anderer Name für die Formel, die durch den Namen „$(\sim\mathcal{P}(V^{-1}_{2}, K^{1}_{3}) \supset \mathcal{P}(K^{-1}_{3}, K^{1}_{3}))$“ bezeichnet wird.

III(5) „$(\mathcal{P}(V^{-1}_{2}, K^{1}_{3}) \vee \mathcal{P}(K^{-1}_{3}, K^{1}_{3}))$“ ist ein Name der Formel „$\boldsymbol{(\sim\mathcal{P}(V^{-1}_{2}, K^{1}_{3}) \supset \mathcal{P}(K^{-1}_{3}, K^{1}_{3}))}$“.

Durch die Definition III(2) wird also das Alphabet nicht erweitert. Eine Definition wird dazu verwendet, um (in der Regel kürzere) Namen von Zeichenketten einzuführen.[86] Diese kürzeren Namen dienen einerseits den simplen Zielen, Platz zu sparen und die Formeln übersichtlicher zu gestalten. Eine dritte, mindestens ebenso wichtige Funktion besteht aber darin, sich den Ausdrucksmöglichkeiten der natürlichen Sprachen zu nähern, ohne das logische System unnötig zu komplizieren. Auf diesen Punkt wird jetzt genauer eingegangen.

Wenn man III(6) in der Naiven Prädikatenlogik repräsentieren möchte und K^{-1}_{1} als Symbol für „Julia“, K^{-1}_{2} für „Marta“, „K^{1}_{1}“ für „die Eigenschaft, schön zu sein“ sowie K^{1}_{2} für „die Eigenschaft zu schlafen“ wählt, erhält man III(7).

III(6) Julia hat die Eigenschaft, schön zu sein, und Marta hat die Eigenschaft zu schlafen.

III(7) $\boldsymbol{\sim(\mathcal{P}(K^{-1}_{1}, K^{1}_{1}) \supset \sim\mathcal{P}(K^{-1}_{2}, K^{1}_{2}))}$

[86] Quine stellt Definitionen als Übersetzungsregeln zwischen zwei formalen Systemen dar. (Vgl. Quine (1979), S. 32f.) Es gibt tatsächlich Beispiele für Regeln, die eine Formel eines Systems (beispielsweise der intuitionistischen Aussagenlogik) in eine Formel eines anderen Systems (beispielsweise einer bestimmten Modallogik) übersetzen. Diese Übersetzungsregeln können zu interessanten Erkenntnissen über Zusammenhänge zwischen verschiedenen logischen Systemen führen, aber solche Übersetzungsregeln nennt man nicht „Definitionen“. Dagegen ist in keinem mir bekannten Lehrbuch bei der Definition der aussagenlogischen Operatoren von zwei logischen Systemen die Rede, die durch die Definitionen in Zusammenhang gebracht werden sollen. Aus diesem Grund erscheinen mir Quines Behauptungen über den Status von Definitionen unplausibel.

III(7) ist eine Formel der Naiven Prädikatenlogik, die nicht besonders lang ist, es besteht daher kein Grund dafür, nach einer Abkürzung für III(7) zu suchen. Was man an III(7) jedoch als störend empfinden kann, ist die Tatsache, daß III(7) die aussagenlogische Struktur von III(6) nicht wiedergibt. In III(7) werden „Julia", „Marta", „die Eigenschaft, schön zu sein", „die Eigenschaft zu schlafen" und sogar die Kopula „hat" jeweils durch ihr eigenes Zeichen repräsentiert, nur das logisch besonders interessante Wort „und" bekommt kein eigenes Symbol. Anstelle eines Zeichens für „und" wird eine Kombination von ~ und ⊃ verwendet, obwohl weder „nicht" noch „wenn …, dann …" in III(6) vorkommen. Dies führt unter anderem dazu, daß der Unterschied zwischen III(6) und III(8) nicht repräsentiert werden kann.

III(8) Es ist folgendes nicht der Fall: Wenn Julia die Eigenschaft hat, schön zu sein, hat Marta nicht die Eigenschaft zu schlafen.

Selbstverständlich sind III(6) und III(8) logisch äquivalent. Trotzdem handelt es sich um unterschiedliche Aussagen, es wäre daher wünschenswert, diesen Unterschied irgendwie darstellen zu können. Eine einfache Lösung wäre es, III(9) als formale Repräsentation von III(6) zu wählen.

III(9) $(\mathcal{P}(\mathbf{K}^{-1}{}_{1}, \mathbf{K}^{1}{}_{1}) \wedge \mathcal{P}(\mathbf{K}^{-1}{}_{2}, \mathbf{K}^{1}{}_{2}))$

Doch dies setzt voraus, daß man „∧" dem Alphabet hinzufügt. Wenn man dieselbe Lösung für die anderen abgeleiteten Operatoren wählt, würde dies zu einer unnötigen Aufblähung des Alphabets führen, die insbesondere bei der Durchführung von Induktionsbeweisen unbequem wäre. Die eleganteste Lösung besteht darin, Aussagen der natürlichen Sprache durch Namen von Formeln zu repräsentieren. Beispielsweise werden III(8) durch III(12) und III(6) – unter Verwendung der Definition III(10) – durch III(11) dargestellt. (III(10) entspricht der Definition III(2) für die Konjunktion.)

III(10) $(A \wedge B) \equiv_{df} \sim(A \supset \sim B)$

III(11) $(\mathcal{P}(K^{-1}{}_1, K^1{}_1) \wedge \mathcal{P}(K^{-1}{}_2, K^1{}_2))$

III(12) $\sim(\mathcal{P}(K^{-1}{}_1, K^1{}_1) \supset \sim\mathcal{P}(K^{-1}{}_2, K^1{}_2))$

Durch dieses Vorgehen werden sowohl die aussagenlogische Struktur von III(6) als auch der Unterschied zwischen den natürlichsprachlichen Aussagen III(6) und III(8) angemessen dargestellt. Der Tatsache, daß es keine logische Differenz zwischen III(6) und III(8) gibt, wird dadurch Rechnung getragen, daß III(11) und III(12) zwei verschiedene Namen derselben Formel sind, nämlich von III(7).

Nachdem der Status von Definitionen an einfachen Beispielen veranschaulicht wurde, wird ein interessanterer Fall betrachtet. Es handelt sich um die bereits angekündigte Definition, die den Zusammenhang zwischen $F^d(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ und $\mathcal{P}(i_1, i_2, \ldots, i_d, F^d)$ herstellt. Inhaltlich handelt es sich um eine verallgemeinerte Version des Prädikationsschemas.[87]

$\mathcal{P}$-Schema:

Für jede atomare wff oder qwff $\mathcal{P}(i_1, i_2, \ldots, i_d, j^d)$ gilt:

$j^d(i_1, i_2, \ldots, i_d) \equiv_{df} \mathcal{P}(i_1, i_2, \ldots, i_d, j^d)$, wenn $d \geq 1$, und $j^d \equiv_{df} \mathcal{P}(j^d)$, wenn $d = 0$.

Unter Verwendung des $\mathcal{P}$-Schemas läßt sich der Unterschied zwischen III(13) und III(14) durch die verschiedenen Formalisierungen III(15) und III(16) darstellen. Wie das $\mathcal{P}$-Schema auf komplexere Formeln angewendet werden kann, verdeutlichen III(17) und III(18). In III(17) und III(18) wurden Namenschemata verwendet, weil der Zusammenhang unabhängig

[87] Siehe Abschnitt 2 von Kapitel II.

davon gilt, welche Namen man einsetzt.[88]

III(13) Die Eigenschaft, abstrakt zu sein, ist abstrakt.

III(14) Die Eigenschaft, abstrakt zu sein, hat die Eigenschaft, abstrakt zu sein.

III(15) $K^1{}_3(K^1{}_3)$

III(16) $\mathcal{P}(K^1{}_3, K^1{}_3)$

III(17) $\forall y^{-1}\ \forall X^1\ (\mathcal{P}(y^{-1}, X^1) \supset \mathcal{P}(y^{-1}, X^1))$

III(18) $\forall y^{-1}\ \forall X^1\ (X^1(y^{-1}) \supset X^1(y^{-1}))$

III(18) sieht überhaupt nicht mehr wie eine Formel einer Prädikatenlogik erster Stufe, sondern wie eine Formel einer Prädikatenlogik höherer Stufe aus. In gewisser Hinsicht stimmt das auch, denn in III(18) wird eindeutig über Eigenschaften quantifiziert. Andererseits ist III(18) genauso wie III(17) ein Name einer Formel einer mehrsortigen Prädikatenlogik erster Stufe, nämlich von III(19).

III(19) $\boldsymbol{\forall y^{-1}\ \forall X^1\ (\mathcal{P}(y^{-1}, X^1) \supset \mathcal{P}(y^{-1}, X^1))}$

Dies ist einer der Kunstgriffe, die die sprachliche Vielfalt bei gleichzeitiger Beibehaltung der wünschenswerten metalogischen Eigenschaften der Naiven Prädikatenlogik ermöglichen. Durch geeignete Definitionen, insbesondere durch das $\mathcal{P}$-Schema, werden Namen von Formeln eingeführt, so daß die Sprache der Namen sehr ausdrucksstark ist. Es ist offensichtlich, daß sich beispielsweise jede Formel des Stufenkalküls in einen Namen einer Formel der Naiven Prädikatenlogik übersetzen läßt.

---

[88] Weil die durch das $\mathcal{P}$-Schema eingeführten Namen so aussehen wie übliche prädikatenlogische Formeln in der Standardschreibweise und sie außerdem kürzer sind als die Namen, in denen das Zeichen „$\mathcal{P}$“ vorkommt, wird von diesen neu eingeführten Namen nicht nur Gebrauch gemacht, um Unterschiede zwischen Aussagen in den natürlichen Sprachen zu repräsentieren, sondern auch um die Lesbarkeit von Formeln zu erhöhen.

Aus dem in diesem Abschnitt getroffenen Definitionen und Konventionen ergeben sich folgende Theoreme:

L3.1

(a) $(\sim A)[i/j] = \sim A[i/j]$.

(b) $(A \supset B)[i/j] = A[i/j] \supset B[i/j]$.

(c) $(\forall i\ A)[j/j'] = \forall i\ A[j/j']$, wenn $i \neq j$.

(d) $(\forall i\ A)[j/j'] = \forall j'\ A[j/j']$, wenn $i = j$.

(e) $A[i/i] = A$.

(f) $A[i/j] = A$, wenn i nicht in A vorkommt.

(g) $A[i/i'] = A[i/j]\ [j/i']$, wenn j nicht in A vorkommt.

(h) In $A[i/j]$ kommt i nicht vor.

(i) $A[x/i]\ [i/k] = A[i/k]\ [x/k]$.

(j) $A[i_1/k_1]\ [i_2/k_2] = A[i_2/k_2]\ [i_1/k_1]$, wenn $i_1 \neq i_2$, $k_1 \neq i_2$, $k_2 \neq i_1$.

L3.2

(a) $A \in WFF$ gdw $A[k_1/k_2] \in WFF$.

(b) $\sim A \in WFF$ gdw $A \in WFF$.

(c) $A \supset B \in WFF$ gdw $A \in WFF$ und $B \in WFF$.

(d) $\forall x\ A \in WFF$ gdw $A[x/k] \in WFF$, für ein beliebiges k.

4 Abbildung

Für die Definition der semantischen Konsistenz einer Menge von wff M wird nicht nur die Erfüllbarkeit von M, sondern auch die Erfüllbarkeit der Mengen betrachtet werden, die durch die Vertauschung der Individuenkonstanten der wff aus M entstehen. Deshalb wird in diesem Abschnitt eine Art ‚Vertauschungsfunktion' eingeführt.

ϕ ist eine *KON-Abbildung* genau dann, wenn ϕ eine eineindeutige Funktion von $KON \cup VAR$ in $KON \cup VAR$ ist, für die gilt:

1. Wenn $x \in VAR$, dann $\phi(x) = x$;
2. Wenn $k \in KON_d$, dann $\phi(k) \in KON_d$ $(d \geq -1)$;

Von jetzt an wird das Zeichen „ϕ“, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, für KON-Abbildungen verwendet.

B ist eine *Abbildungsformel von* A *bezüglich* einer KON-Abbildung ϕ [kurz: Abb(A, B, ϕ)] genau dann, wenn sich das aufgrund folgender Bestimmungen ergibt:

1. Abb($\mathcal{P}(i_1, \ldots, i_n)$, $\mathcal{P}(\phi(i_1), \ldots, \phi(i_n))$, ϕ) ($n \geq 1$);
2. Wenn Abb(A, B, ϕ), so Abb(~A, ~B, ϕ);
3. Wenn Abb(A, B, ϕ) und Abb(C, D, ϕ), so Abb($A \supset C$, $B \supset D$, ϕ);
4. Wenn Abb(A, B, ϕ), dann Abb($\forall x$ A,$\forall \phi(x)$ B, ϕ).

B ist eine *Abbildungsformel* von A genau dann, wenn es eine KON-Abbildung ϕ gibt, so daß Abb(A, B, ϕ). M′ ist die *Abbildungsmenge* von M *bezüglich* einer KON-Abbildung ϕ genau dann, wenn M′ die Menge aller B ist, für die gilt: Es gibt ein $A \in M$, so daß Abb(A, B, ϕ). M′ ist eine *Abbildungsmenge* von M genau dann, wenn es eine KON-Abbildung ϕ gibt, so daß M′ die *Abbildungsmenge* von M *bezüglich* ϕ ist.

Wenn B die Abbildungsformel[89] von A bezüglich ϕ ist, dann ist der Ausdruck, der entsteht, wenn man einen Namen von A in eckige Klammern einschließt und rechts oben einen Namen von ϕ anfügt, ein Name von B. Beispielsweise gilt: $B = [A]^{\phi}$. Wenn ϕ eine Abbildung und M eine Menge von wff ist, dann ist der Ausdruck, der entsteht, wenn man einen Namen von M in eckigen Klammern einschließt und rechts oben einen Namen von ϕ anfügt, ein Name der Menge aller Formeln A, für die gilt: Es gibt ein $B \in M$ mit $A = [B]^{\phi}$.

[89] Daß es genau eine gibt, wird in L4.1(a) bewiesen.

L4.1

(a) Für jedes A gibt es genau ein B mit Abb(A, B, ϕ).

(b) $[\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}]^\phi = \{[A_1]^\phi, [A_2]^\phi, \ldots, [A_n]^\phi, \ldots\}$.

(c) $[M \cup M']^\phi = [M]^\phi \cup [M']^\phi$.

L4.2

(a) $[\sim A]^\phi = \sim[A]^\phi$.

(b) $[A \supset B]^\phi = [A]^\phi \supset [B]^\phi$.

(c) $[\forall x\, A]^\phi = \forall x\, [A]^\phi$.

(d) $[A[x/k]]^\phi = [A]^\phi[x/\phi(k)]$, wenn $[A[x/k]]^\phi$ eine wff oder qwff ist.

(e) Wenn $A \in$ WFF, dann $[A]^\phi \in$ WFF.

(f) Es sei Σ eine nichtleere, endliche Klasse von Individuenkonstanten. Dann gilt, daß es für jede KON-Abbildung ϕ eine KON-Abbildung φ gibt, so daß:

(i) $\varphi(\phi(k)) = k$, für jedes $k \in \Sigma$;

(ii) $[[A]^\phi]^\varphi = A$, für jedes A, in dem keine Individuenkonstante k vorkommt mit $k \notin \Sigma$.

5 Axiomatisierung

In diesem Abschnitt wird eine Axiomatisierung der Naiven Prädikatenlogik vorgestellt. Da es sich bei der Naiven Prädikatenlogik letztlich um eine mehrsortige Prädikatenlogik handelt, kann – unter Beachtung der eingeführten Konventionen für die verschiedenen Variablen und Konstanten – eine übliche Axiomatisierung der Prädikatenlogik erster Stufe für die Naive Prädikatenlogik übernommen werden.[90]

[90] In Axiomen, die dem fünften Axiomenschema entsprechen, kommt die Individuenvariable x nicht in A vor. Wenn x als Teil eines Quantors $\forall x$ oder im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ in A vorkommen würde, dann wäre $\forall x\, A$ keine wff und deswegen entgegen der Voraussetzung $A \supset \forall x\, A$ keine wff. Wenn x in A vorkommt, aber nicht als Teil eines Quantors und auch nicht im Wirkungsbereich eines Quantors, dann wäre A keine wff und damit entgegen der Voraussetzung $A \supset \forall x\, A$ keine wff.

Eine wff ist ein Axiom genau dann, wenn es sich aufgrund (i) der Axiomenschemata oder (ii) der Generalisierungsregel ergibt.

(i) Axiomenschemata:

A1 $A \supset (B \supset A)$

A2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

A3 $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

A4 $\forall x(A \supset B) \supset (\forall x\, A \supset \forall x\, B)$

A5 $A \supset \forall x\, A$

A6 $\forall x\, A \supset A[x/k]$

(ii) Generalisierungsregel:

Jede wff der Form $\forall x\, A$ ist ein Axiom, wenn es eine Individuenkonstante k gibt, so daß k nicht in $\forall x\, A$ vorkommt und $A[x/k]$ ein Axiom ist.

Schlußregel:

MP: Wenn $A \supset B$ und A, dann B.

Alle Axiome der Form A1 - A6 haben den Grad 0. Wenn $A[x/k]$ den Grad n hat und $\forall x\, A$ gemäß (ii) ein Axiom ist, dann hat $\forall x\, A$ den Grad n+1.

Ein *Ableitung* einer wff A aus einer Menge M von wff ist eine endliche Folge von wff $B_1, B_2, \ldots, B_n$, für die gilt:

1. $B_n = A$;
2. für jedes p ($1 \leq p \leq n$): B_p ist ein Axiom, oder $B_p \in M$, oder B_p ergibt sich durch Anwendung von MP auf vorhergehende Zeilen der Ableitung.

Ein *Beweis* von A ist die Ableitung aus der leeren Menge. Wenn es eine Ableitung von A aus M gibt, dann ist A aus M *ableitbar* (kurz: $M \vdash A$). Wenn es einen Beweis von A gibt, dann ist A *beweisbar* (kurz: $\vdash A$).

Jede wff, die aufgrund von Generalisierungsregel (ii) als Axiom gilt, hat die Form $\forall x_1\forall x_2 \ldots \forall x_n$ A, und es gibt $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ($n>0$) Individuenkonstanten, so daß k_i ($i = 1, \ldots, n$) nicht in $\forall x_i \forall x_{i+1} \ldots \forall x_n$ $A[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}/ k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}]$ vorkommt und $A[x_1, x_2, \ldots, x_n/k_1, k_2, \ldots, k_n]$ eine wff der Art A1 - A6 in (i) ist.

M ist *syntaktisch konsistent* genau dann, wenn es keine Formel A derart gibt, daß M ⊢ A und M ⊢ ~A. M ist *syntaktisch inkonsistent* genau dann, wenn M nicht konsistent ist. M ist *syntaktisch vollständig* genau dann, wenn für jede wff A gilt: M ⊢ A oder M ⊢ ~A. M ist *syntaktisch unvollständig* genau dann, wenn M nicht syntaktisch vollständig ist. M ist *syntaktisch äquivalent* mit M′ genau dann, wenn für jede wff A gilt: M ⊢ A genau dann, wenn M′ ⊢ A.

L5.1 Es sei M eine beliebige Teilmenge von WFF.

(a) Wenn M ⊢ A, dann gibt es eine endliche Menge M′ mit M′ ⊆ M und M′ ⊢ A.

(b) Wenn M ⊢ A, dann M ∪ M′ ⊢ A; für jede Menge von wff M′.

(c) Wenn A ∈ M, dann M ⊢ A.

(d) Wenn A ein Axiom ist, dann M ⊢ A.

(e) Wenn M ⊢ A und M ⊢ A ⊃ B, dann M ⊢ B.

(f) Wenn M ⊢ A oder M ⊢ ~A ⊃ ~B, dann M ⊢ B ⊃ A.

(g) Wenn M ⊢ ~A, dann M ⊢ A ⊃ B.

(h) Wenn M ⊢ A ⊃ (B ⊃ C) und M ⊢ A ⊃ B, dann M ⊢ A ⊃ C.

(i) M ⊢ A ⊃ A.

(j) M ∪ {B} ⊢ A gdw M ⊢ B ⊃ A (Deduktionstheorem).

(k) M ⊢ ~~A ⊃ A.

(l) Wenn M ⊢ ~~A, dann M ⊢ A.

(m) Wenn M ∪ {A} ⊢ B und M ∪ {A} ⊢ ~B, dann M ⊢ ~A.

(n) Wenn M ∪ {~A} ⊢ B und M ∪ {~A} ⊢ ~B, dann M ⊢ A.

(o) Wenn $M \vdash A$, dann $M \vdash \forall x\ A$; wenn x nicht in A vorkommt.

(p) Wenn $M \vdash \forall x(A \supset B)$, dann $M \vdash \forall x\ A \supset \forall x\ B$.

(q) Wenn $M \vdash \forall x(A \supset B)$ und $M \vdash \forall x\ A$, dann $M \vdash \forall x B$.

(r) Wenn $M \vdash \forall x^d\ A$, dann $M \vdash A[x^d/k^d]$; für jede Individuenkonstante k^d.

(s) $M \vdash \forall y(\forall x\ A \supset A[x/y])$.

(t) Wenn $M \vdash A[x/k]$ und wenn k weder in $\forall x\ A$ noch in einer der Formeln in M vorkommt, dann $M \vdash \forall x\ A$.

L5.2

(a) Wenn M syntaktisch inkonsistent ist, dann gilt für jedes M′ mit $M \subseteq M'$, daß M′ inkonsistent ist.

(b) Wenn $M \cup \{\sim A\}$ syntaktisch inkonsistent ist, dann $M \vdash A$.

L5.3

(a) Wenn A ein Axiom ist, dann ist $A[k_1/k_2]$ ein Axiom.

(b) Wenn A ein Axiom ist, ist (für beliebige ϕ) $[A]^\phi$ ein Axiom.

(c) Wenn $M \vdash A$, dann gilt (für beliebige ϕ) $[M]^\phi \vdash [A]^\phi$.

(d) Es sei M′ eine Abbildungsmenge von M. Wenn M syntaktisch konsistent ist, dann ist auch M′ syntaktisch konsistent.

6 Semantik

Um eine Semantik für die Naive Prädikatenlogik zu entwickeln, ist es offenbar möglich, das Zeichen für die Kopula $\mathcal{P}$ als Elementrelation und die Konstanten für Gegenstände und Eigenschaften als Elemente und Teilmengen eines gegebenen Interpretationsbereichs zu interpretieren. Die reflexiven Prädikationen führen jedoch zu Problemen mit dieser referentiellen Interpretation der Naiven Prädikatenlogik. Denn F(F) beziehungsweise $\mathcal{P}$(F, F) wäre unter dieser Interpretation genau dann wahr, wenn die Interpretation von F ein Element der Interpretation von F wäre. Daher würde man das Russell-Paradox der Elementrelation in der Metasprache zu lösen haben, um das Russell-Paradox der Prädikation in der

Objektsprache zu untersuchen. Aus diesem Grund ist es zweckmäßiger, einen alternativen semantischen Ansatz zu wählen – eine Wahrheitswert-semantik im Sinne von Leblanc ist angemessen für diese Aufgabe.[91]

Eine Funktion α von WFF_a in $\{0, 1\}$ wird *Grundbewertung* genannt. BEW_α ist die[92] mit α übereinstimmende *Bewertung* genau dann, wenn

- α eine Grundbewertung ist;
- BEW_α eine Funktion von WFF in $\{0, 1\}$ ist;
- für jedes $A \in WFF_a$ gilt: $\alpha(A) = BEW_\alpha(A)$;
- für jede wff A, B und jede Individuenvariable x gilt:
  - (i) $BEW_\alpha({\sim}A) = 1$ genau dann, wenn $BEW_\alpha(A) = 0$;
  - (ii) $BEW_\alpha(A \supset B) = 1$ genau dann, wenn $BEW_\alpha(A) = 0$ oder $BEW_\alpha(B) = 1$;
  - (iii) $BEW_\alpha(\forall x^d\ A) = 1$ genau dann, wenn $BEW_\alpha(A[x^d/k^d]) = 1$, für jede Individuenkonstante k^d.

Anstatt „$BEW_\alpha(A)$" wird auch „$[\![A]\!]_\alpha$" geschrieben.

M ist *erfüllbar* genau dann, wenn es eine Grundbewertung α gibt, so daß für alle $A \in M$ gilt: $[\![A]\!]_\alpha = 1$. M ist *semantisch konsistent* genau dann, wenn es eine Abbildungsmenge M′ von M gibt, so daß M′ erfüllbar ist. M ist *semantisch inkonsistent* genau dann, wenn M nicht semantisch konsistent ist. Eine wff A ist eine *semantische Konsequenz aus* M (kurz: $M \vDash A$) genau dann, wenn $M \cup \{{\sim}A\}$ semantisch inkonsistent ist. A ist *gültig* (A ist eine *Tautologie*, $\vDash A$) genau dann, wenn $\varnothing \vDash A$. M ist *semantisch vollständig* genau dann, wenn für jede wff A gilt: $M \vDash A$ oder $M \vDash {\sim}A$. M ist *semantisch unvollständig* genau dann, wenn M nicht semantisch vollständig ist. M ist *semantisch äquivalent* mit M′ genau dann, wenn für jede wff A

[91] Siehe Leblanc (1976) und Leblanc (1983).

[92] Daß es tatsächlich zu jeder Grundbewertung α genau eine mit α übereinstimmende Bewertung gibt, läßt sich leicht zeigen.

gilt: $M \vDash A$ genau dann, wenn $M' \vDash A$. A ist *erfüllbar* genau dann, wenn $\{A\}$ erfüllbar ist. A ist semantisch äquivalent mit B genau dann, wenn $\{A\}$ semantisch äquivalent mit $\{B\}$ ist.

Bei der Unterscheidung von semantischer Konsistenz und Erfüllbarkeit wird von der in Abschnitt 4 definierten ‚Vertauschungsfunktion' Gebrauch gemacht. Eine Menge M von wohlgeformten Formeln ist semantisch konsistent, wenn es eine erfüllbare Menge M′ gibt, die sich von M höchstens darin unterscheidet, daß die Indizes der Individuenkonstanten (nach bestimmten Regeln) vertauscht wurden. Dies hat zur Folge, daß nicht jede semantisch konsistente Menge auch erfüllbar ist. Beispielsweise ist $M = \{\sim\forall V^{-1}{}_1\, K^1{}_1(V^{-1}{}_1)\} \cup \{K^1{}_1(K^{-1}{}_n) \mid n \geq 1\}$ nicht erfüllbar, weil für jede beliebige Grundbewertung α $[\![\sim\forall V^{-1}{}_1\ K^1{}_1(V^{-1}{}_1)]\!]_\alpha = 0$ beziehungsweise $[\![\forall V^{-1}{}_1\, K^1{}_1(V^{-1}{}_1)]\!]_\alpha = 1$ gilt, wenn für jedes n $[\![K^1{}_1(K^{-1}{}_n)]\!]_\alpha = 1$ gilt. Dennoch ist $\{\sim\forall V^{-1}{}_1\, K^1{}_1(V^{-1}{}_1)\} \cup \{K^1{}_1(K^{-1}{}_n) \mid n \geq 1\}$ semantisch konsistent. Es sei M′ die Abbildungsmenge von M, die dadurch entsteht, daß man die Subskripte aller Individuenkonstanten verdoppelt. Es gilt dann $M' = \{\sim\forall V^{-1}{}_1\, K^1{}_2(V^{-1}{}_1)\} \cup \{K^1{}_2(K^{-1}{}_n) \mid n = 2, 4, 6, \ldots\}$. M′ ist beispielsweise erfüllbar durch eine Grundbewertung α, für die gilt: $[\![K^1{}_2(K^{-1}{}_n)]\!]_\alpha = 1$ genau dann, wenn n eine gerade natürliche Zahl ist. Da M′ erfüllbar und eine Abbildungsmenge von M ist, ist M definitionsgemäß semantisch konsistent.

Der Unterschied zwischen semantischer Konsistenz und Erfüllbarkeit ist bei der Definition von „logische Konsequenz" und „Tautologie" wichtig. Würde man $M \vDash A$ über die Nicht-Erfüllbarkeit von $M \cup \{\sim A\}$ definieren, so wäre $\forall V^{-1}{}_1\, K^1{}_1(V^{-1}{}_1)$ eine logische Konsequenz aus $\{K^1{}_1(K^{-1}{}_n) \mid n \geq 1\}$. Dadurch, daß $M \vDash A$ über die semantische Inkonsistenz von $M \cup \{\sim A\}$ definiert wird, werden auch Annahmemengen berücksichtigt, in denen nicht alle Individuenkonstanten (mit einem bestimmten Superskript) vorkommen. Mit anderen Worten, es werden ‚Vertauschungsfunktionen' berücksichtigt, die aus der Annahmemenge eine unendlich erweiterbare Menge machen.

Dasselbe Ergebnis könnte man erreichen, wenn man die Sprache um neue Individuenkonstanten erweitert.[93] Dieser Weg ist technisch etwas einfacher, führt aber zum Verlust der Kompositionalität der Semantik oder – um es vorsichtiger zu formulieren – es scheint wenigstens so, als wenn dieser Weg zum Verlust der Kompositionalität führt, weil dann die Bewertung von komplexen Aussagen nicht von ihren Teilformeln, sondern von ihren Teilformeln in anderen, um neue Individuenkonstanten erweiterten Sprachen abhängt.[94]

L6.1

(a) $\vDash A \supset (B \supset A)$.

(b) $\vDash (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

(c) $\vDash ({\sim}A \supset {\sim}B) \supset (B \supset A)$.

(d) $\vDash \forall x\,(A \supset B) \supset (\forall x\, A \supset \forall x\, B)$.

(e) $\vDash A \supset \forall x\, A$.

(f) $\vDash \forall x\, A \supset A[x/k]$.

(g) Wenn $\vDash A$, dann $\vDash [A]^{\phi}$.

(h) Wenn $\vDash A \supset B$ und $\vDash A$, dann $\vDash B$.

(i) $M \cup \{A\} \vDash B$ gdw $M \vDash A \supset B$.

(j) Wenn $M \vDash A$, dann $M \cup M' \vDash A$.

Bei Wahrheitswertsemantiken handelt es sich um eine Erweiterung der Methode, die der Verwendung von Wahrheitstafeln in der Aussagenlogik zugrunde liegt. Es gibt eine Grundbewertung α, die jeder atomaren wohlgeformten Formel einen Wahrheitswert zuweist, und die Wahrheitswerte der komplexen Aussagen werden rekursiv über ihre Teilformeln bestimmt. Dies

[93] Dieses Vorgehen findet man unter anderem in Leblanc (1983) und in etwas anderer Form in Lavine (2000).

[94] Lavine diskutiert in seiner Arbeit die Frage, ob eine Erweiterung der Sprache tatsächlich zu dem Verlust der Kompositionalität führt und kommt zu dem Ergebnis, daß seine Semantik ebenso kompositionell wie eine normale referentielle Semantik sei. Da mir Lavines Argumentation nicht zwingend erscheint, habe ich mich für KON-Abbildungen entschieden.

geschieht im Falle der aussagenlogischen Operatoren wie aus der Aussagenlogik bekannt (vgl. (i) und (ii)). Der Wahrheitswert einer wff $\forall x$ A wird über alle wff der Form A[x/k] (für beliebige k mit demselben Superskript wie der von x) bestimmt. Für die Wahrheitswertsemantik spricht ihre Einfachheit, der technische Aufwand übersteigt den einer Semantik für die Aussagenlogik nur minimal. Daß die semantische Bewertung in einer Wahrheitswertsemantik nur wff, aber nicht Teile von wff wie Konstanten oder das Prädikatenzeichen betrifft, hat erstens den Vorteil, daß dadurch ein mögliches Russell-Paradox der Elementrelation in der Metasprache vermieden wird. Der zweite Vorzug dieses Vorgehens besteht darin, daß so philosophische Neutralität gewahrt werden kann. Zu einer (normalen) referentiellen Semantik gehört, daß man durch die Interpretationsfunktion jeder Konstanten ein Element aus einem Individuenbereich oder ein mengentheoretisches Konstrukt zuweist. Viele Philosophen, insbesondere Vertreter von formalen Eigenschaftstheorien, neigen dazu, derartige Semantiken als Modelle der Wirklichkeit aufzufassen. Würde beispielsweise eine Semantik vorgestellt werden, in der die Interpretationsfunktion jeder Eigenschaftskonstante eine Menge von Entitäten zuweist, dann würde dies von diesen Philosophen so aufgefaßt werden, daß in der Naiven Prädikatenlogik Eigenschaften mit Mengen identifiziert werden würden. Das würden diejenigen Philosophen ablehnen, die Eigenschaften als intensionale Gebilde auffassen. Philosophen, die darauf bestehen, daß der Unterschied zwischen (nicht-nominalisierten) Prädikaten und nominalisierten Prädikaten eine wichtige ontologische Differenz widerspiegelt, würden eine Semantik ablehnen, in der die Interpretationsfunktion nominalisierte Prädikate und (nicht-nominalisierte) Prädikate gleich behandelt; die Gegenfraktion wäre nicht glücklich mit einer Semantik, in der die Interpretationsfunktion sie nicht gleich behandelt. Aus diesem Grund ist es die beste Lösung, mit der Wahrheitswertsemantik eine Semantik zu wählen, die sich völlig neutral zu ontologischen Fragestellungen verhält und damit mit den verschiedenen Vorstellungen kompatibel ist.

Die ontologische Neutralität der Wahrheitswertsemantik hängt insbesondere damit zusammen, daß die Quantoren durch eine Substitutionsinterpretation interpretiert werden. Gegen die Substitutionsinterpretation wurde von verschiedenen Autoren Bedenken geäußert.[95] Es gibt zwei wichtige Einwände gegen eine Substitutionsinterpretation. Der erste lautet, daß die Aussage III(20) unter der Substitutionsinterpretation des Existenzquantors, die aus der Substitutionsinterpretation des Allquantors und der Definition des Existenzquantors folgt, aus logischen Gründen falsch sei (obwohl III(20) vermutlich eine wahre Aussage ist).

III(20) Es gibt Gegenstände, die keinen Eigennamen haben (und die auch noch nie einen Eigennamen gehabt haben und die nie einen haben werden).

Dieser Einwand beruht darauf, daß gemäß der Substitutionsinterpretation des Existenzquantors $[\![\exists x^d A]\!]_\alpha = 1$ genau dann gilt, wenn es eine Konstante k^d gibt, so daß $[\![A[x/k^d]]\!]_\alpha = 1$ gilt, und ferner darauf, daß Individuenkonstanten mit Eigennamen identifiziert werden. Daher scheint sich für III(20) folgende Wahrheitsbedingung zu ergeben:

III(21) „Es gibt Gegenstände, die keinen Eigennamen haben (und die auch noch nie einen Eigennamen gehabt haben und die nie einen haben werden)“ ist wahr genau dann, wenn es einen Namen ‚N‘ gibt, so daß gilt „N hat keinen Eigennamen (und hat auch noch nie einen gehabt wird nie einen haben)“ wahr ist.

Wenn III(21) die Wahrheitsbedingungen von III(20) korrekt angeben würde, dann wäre III(20) unter beliebigen Belegungen falsch, weil es kein Objekt

[95] Siehe beispielsweise Quine (1970) S. 91ff, Haack (1978), S. 39ff, Castañeda (1976) , S. 56f, Swoyer (2000), S. 17.

geben kann, das von dem Namen ‚N' bezeichnet wird und die Eigenschaft hat, keinen Namen zu besitzen.

Der zweite große Kritikpunkt an der Substitutionsinterpretation betrifft die Frage, ob es nicht zuwenig Namen gibt. Angenommen, K^1_1 steht für das Prädikat „x_1 ist gerade", K^{-1}_1 steht für „2", K^{-1}_2 steht für „4", K^{-1}_3 steht für „6" usw. Dann ist III(22) wahr (unter dieser Belegung); denn alle Konstanten bezeichnen natürliche Zahlen, die gerade sind. Dies scheint ein gewaltiger Nachteil gegenüber einer referentiellen Interpretation zu sein, weil dort ‚unbenannte' Individuen im Individuenbereich genauso wie benannte für die Interpretation beziehungsweise Belegung der Variablen berücksichtigt werden und deswegen III(22) in einer referentiellen Semantik falsch ist.

III(22) $\forall V^{-1}_1 K^1_1(V^{-1}_1)$

Für die Substitutionssemantik scheinen also nicht nur unbenennbare, sondern auch unbenannte Gegenstände ein Problem darzustellen. Besonders dringend wäre dieses Problem im Fall der reellen Zahlen. Denn da es überabzählbar unendlich viele reelle Zahlen und nur abzählbar unendlich viele Namen (in der Sprache der Naiven Prädikatenlogik und in anderen ‚normalen' formalen Sprachen) gibt, folgt daraus, daß es (in ‚normalen' formalen Sprachen) unbenannte reelle Zahlen gibt. Wie soll der Ausdruck „alle reelle Zahlen" in einer Substitutionssemantik angemessen aufgefaßt werden, wenn einige reelle Zahlen unbenannt bleiben?

Wenn diese Einwände auf Wahrheitswertsemantiken angewendet werden, wird ein entscheidender Unterschied mißachtet: Bewertungen sind keine Modelle! Eine formale Sprache wird in einer referentiellen Semantik anhand eines Modells[96] interpretiert. In einer normalen referentiellen Semantik für eine Standard-Prädikatenlogik erster Stufe ist ein Modell ein geordnetes

[96] Was ich mit „Modell" bezeichne, wird auch oft „Struktur" genannt.

Paar aus einer nichtleeren Trägermenge und einer Interpretationsfunktion, die jeder Gegenstandskonstante ein Element und jedem d-stelligen Prädikatenzeichen eine Teilmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Trägermenge zuweist. Ein Beispiel für ein Modell ist das geordnete Paar aus der Menge der natürlichen Zahlen und einer Funktion, die jeder Gegenstandskonstante eine gerade natürliche Zahl und jedem d-stelligen Prädikatenzeichen eine Teilmenge der d-ten Cartesischen Potenz der natürlichen Zahlen zuweist. Während für Logiker Modelle ein Weg sind, um etwas über logische Wahrheiten (und über logische Konsequenzrelationen) herauszufinden, indem sie *alle* Modelle betrachten, sind für viele Philosophen bereits einzelne Modelle interessant. Dies ist der Fall, weil sie die Modelle nicht als mengentheoretische Konstrukte auffassen, die ein bequemes Hilfsmittel sind, um Nicht-Tautologien herauszufinden, sondern sie als Modelle der Welt verstehen. Aus diesem Blickwinkel betrachtet, hat die Interpretationsfunktion (eines Modells) die Aufgabe, die Referenz der nicht-logischen Zeichen einer Sprache (bezüglich dieses Modells) festzulegen; „logische Wahrheit“ wird folglich als „wahr unter jeder möglichen Referenz der nicht-logischen Zeichen“ aufgefaßt. Wenn man sich auf diese Sichtweise einläßt, dann legt ein Modell fest, worüber in der entsprechenden formalen Sprache geredet wird. Paare aus formalen Sprachen und Modellen (einer passenden referentiellen Semantik) – auch „interpretierte Sprachen“ genannt – sind deshalb insbesondere für ontologisch interessierte Philosophen ein nützliches Hilfsmittel. Beispielsweise bezieht sich Quines bekanntes Existenzkriterium „To be is to be a value of a variable“ auf interpretierte Sprachen.

Die Bewertungen spielen eine ähnliche Rolle in der Wahrheitswertsemantik wie die Modelle in einer referentiellen Semantik. In einer Standardsemantik der Prädikatenlogik erster Stufe ist die Aussage $K^1_1(K^{-1}_1)$ bezüglich eines Modells genau dann wahr, wenn die Interpretation von K^{-1}_1 ein Element der Interpretation von K^1_1 ist; in der Wahrheitswertsemantik hängt der Wert von $[\![K^1_1(K^{-1}_1)]\!]_\alpha$ von der Bewertung von $K^1_1(K^{-1}_1)$ durch die Grundbewertung α

ab. Es ist verführerisch, eine Grundbewertung α als implizite Bestimmung eines Modells aufzufassen und $[\![K^1{}_1(K^{-1}{}_1)]\!]_\alpha = 1$, $[\![K^1{}_1(K^{-1}{}_2)]\!]_\alpha = 1$, $[\![K^1{}_1(K^{-1}{}_3)]\!]_\alpha = 1$, … als andere Formulierung dafür zu lesen, daß es ein Modell <D, I> gibt, so daß $I(K^{-1}{}_1) \in I(K^1{}_1)$, $I(K^{-1}{}_2) \in I(K^1{}_1)$, $I(K^{-1}{}_3) \in I(K^1{}_1)$ usw. gilt. Versteht man Bewertungen als obskure Formulierungen von Modellen, dann wird die Referenz der nicht-logischen Zeichen einer formalen Sprache durch eine Bewertung genauso festgelegt, wie es durch ein Modell getan wird, und dementsprechend bildet das Paar aus einer formalen Sprache und einer Belegung eine interpretierte Sprache; beispielsweise lassen sich dann $K^1{}_1$ als formale Repräsentation von „x_1 ist gerade" und $K^{-1}{}_1$, $K^{-1}{}_2$, $K^{-1}{}_3$, … als formale Repräsentationen von „2", „4", „6", … auffassen. Man könnte diesen Blickwinkel wählen und dann gegen die Substitutionsinterpretation einwenden, daß unter der gewählten Grundbewertung α $[\![\forall V^{-1}{}_1\ K^1{}_1(V^{-1}{}_1)]\!]_\alpha = 1$ beziehungsweise „Alle natürlichen Zahlen sind gerade" wahr ist, obwohl das trivialerweise nicht der Fall ist.

Der dieser Kritik zugrunde liegende Fehler besteht darin, daß die ontologische Neutralität der Wahrheitswertsemantik nicht ernst genommen und Bewertungen als Modelle mißverstanden werden. Die Definition von „logischer Wahrheit" in einer Wahrheitswertsemantik lautet nicht „wahr unter jeder möglichen Referenz der nicht-logischen Zeichen", sondern wie in der Standardsemantik der Aussagenlogik „wahr unter allen möglichen Bewertungen der atomaren Teilformeln".[97] Für eine Wahrheitswertsemantik ist $K^1{}_1$ in $K^1{}_1(K^{-1}{}_1)$ semantisch nur insofern relevant, daß durch die Indizes festgelegt wird, daß die Bewertung von $K^1{}_1(K^{-1}{}_1)$ unabhängig von der Bewertung von $K^1{}_n(K^{-1}{}_1)$ ($n>1$) und daß $K^1{}_1(K^{-1}{}_1)$ beispielsweise eine Teilformel von $\forall V^1{}_4\, V^1{}_4(K^{-1}{}_1)$ ist. $K^1{}_1$ wird in einer Wahrheitswertsemantik keine Referenz zugewiesen, und $K^1{}_1$ wird auch nicht in einer anderen

---

[97] In Leblanc (1976) wird an vielen Beispielen gezeigt, wie die beiden verschiedenen Auffassungen von logischer Wahrheit zu äquivalenten Semantiken führen. Dies gilt insbesondere für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe (auch wenn man überabzählbare Individuenbereiche für referentielle Semantiken zuläßt).

Hinsicht semantisch interpretiert. Dementsprechend ist es angesichts des Aufbaus einer Wahrheitswertsemantik inadäquat, wenn man eine bestimmte Grundbewertung α fixiert und $K^1{}_1$ als „x_1 ist gerade" und $K^{-1}{}_1$, $K^{-1}{}_2$, $K^{-1}{}_3$, … als „2", „4", „6", … auffaßt und dann gegen die Wahrheitswertsemantik einwendet, daß in der mit α übereinstimmenden Bewertung $\forall V^{-1}{}_1\ K^1{}_1(V^{-1}{}_1)$ als wahr bewertet wird, obwohl doch nicht alle natürlichen Zahlen gerade sind. Modelle dienen dazu, die Referenz der nicht-logischen Zeichen einer formalen Sprache zu fixieren, Bewertungen sollen und können das nicht leisten. Folglich ist es nicht verwunderlich, daß es zu Problemen kommt, wenn man diesen Anspruch an Bewertungen stellt.

Die Frage, ob es ‚zuwenig' Namen für die Substitutionsinterpretation in einer Wahrheitswertsemantik gibt, beruht auf einem ähnlichen Mißverständnis. Sie stellt sich nur, wenn man Wahrheitswertsemantik und referentielle Semantik unzulässigerweise vermischt, indem man neben den semantischen Apparat der Wahrheitswertsemantik einen Individuenbereich ins Spiel bringt und sich Gedanken über das Verhältnis von Konstanten und Individuen (beziehungsweise passenden mengentheoretischen Objekten mit diesen Individuen als Urelementen) macht. Individuenbereiche spielen sowohl per definitionem als auch inhaltlich keine Rolle für eine Wahrheitswertsemantik, weil „logische Wahrheit" nicht über die mögliche Referenz der nicht-logischen Zeichen, sondern über mögliche Wahrheitswertbelegungen der Teilformeln definiert wird.

Eine entsprechende Kritik trifft den Einwand, der mit III(20) zusammenhängt. Die referentielle Semantik wurde von Tarski entwickelt, um einen Wahrheitsbegriff zu definieren. Deshalb spielen Aussagen der Form „X ist wahr (bezüglich eines Modells) genau dann, wenn Y (in dem Modell) der Fall ist" wie III(21), bei denen „X" ein Name einer (*möglicherweise atomaren*) Aussage und „Y" eine Wahrheitsbedingung ist, im Rahmen einer referentiellen Semantik eine wichtige Rolle. Dies ist bei Wahrheitswertsemantiken, jedenfalls bei atomaren Aussagen, nicht der Fall. Jenen Aussagen entsprechen in einer Wahrheitswertsemantik (wie beispielsweise der Standardsemantik der klassischen Aussagenlogik) Sätze wie „p $\wedge$ q ist bezüglich einer Grundbewertung α genau dann mit ‚wahr' bewertet, wenn p bezüglich α mit ‚wahr' bewertet ist und q bezüglich α mit ‚wahr' bewertet ist". Während es im Fall von logisch zusammengesetzten Aussagen Bewertungsbedingungen gibt, die den Wahrheitsbedingungen bei referentiellen Semantiken entsprechen, gilt das nicht für atomare Aussagen. Während sich also die Frage „Weshalb wird p $\wedge$ q bezüglich α mit ‚wahr' bewertet?" noch durch den Verweis auf die Bewertungen von p und q sinnvoll beantworten läßt, ist die Frage „Weshalb wird p bezüglich α mit ‚wahr' bewertet?" unsinnig. Dies gilt nicht nur für Wahrheitswertsemantiken der Aussagenlogik, sondern auch für prädikatenlogische Systeme wie die Naive Prädikatenlogik. Dies ist selbstverständlich eine andere Facette der Tatsache, daß in Wahrheitswertsemantiken die Bestandteile von Aussagen nicht semantisch interpretiert werden. Betrachten wir nun wieder die Aussage III(20) (= III(23)).

III(23) Es gibt Gegenstände, die keinen Eigennamen haben (und die auch noch nie einen Eigennamen gehabt haben und die nie einen haben werden).

Die Aussage III(23) wird in der Naiven Prädikatenlogik durch eine Formel der Form $\exists x\, F(x)$ dargestellt, und für jede beliebige Grundbewertung α gilt: $[\![\exists x\, F(x)]\!]_\alpha = 1$ genau dann, wenn es ein k gibt, so daß $[\![F(k)]\!]_\alpha = 1$. Wer diese Bewertungsbedingung so versteht, daß III(23) genau dann wahr ist, wenn es einen Gegenstand gibt, der keinen Eigennamen hat (…), der hat gleich zwei Fehler begangen. F(k) wird bei dieser Lesart als Teil einer interpretierten Sprache und deswegen k als irgendein Eigenname und F als „x_1 hat keinen Eigennamen (…)" aufgefaßt. Wie bereits gezeigt wurde, legen Bewertungen nicht die Referenz von Ausdrücken fest, sie sind keine Modelle und können daher auch nicht verwendet werden, um die Rolle von Modellen in interpretierten Sprachen zu übernehmen. III(23) wird durch F(k) repräsentiert, aber das Zeichen F in F(k) bekommt keine eigenständige Interpretation, und deshalb ist es unsinnig, es so aufzufassen, als ob es für „x_1 hat keinen Eigennamen (…)“ stehen würde – das ist der erste Fehler. Der zweite, darauf aufbauende Fehler besteht darin, daß „Es gibt ein k, so daß $[\![F(k)]\!]_a = 1$“ durch die referentielle Brille als „Es gibt einen Gegenstand, der keinen Eigennamen hat (…)“ gelesen wird und nicht als „Es gibt ein k, so daß F(k) bezüglich *a* mit ‚wahr‘ bewertet ist“. Der Unterschied besteht darin, daß es für Bewertungen irrelevant ist, ob F(k) eine wahre oder falsche Aussage repräsentiert. Beispielsweise wird in der Aussagenlogik, um herauszufinden, daß III(24) keine aussagenlogische Tautologie ist, III(24) durch die Formel $p \supset q$ repräsentiert und p mit „wahr“ und q mit „falsch“ bewertet, obwohl p eine falsche und q eine wahre Aussage repräsentiert.

III(24) Wenn Pluto größer als der Jupiter ist, dann ist $2 + 2 = 4$.

Deswegen ist es innerhalb einer Wahrheitswertsemantik genauso unproblematisch, III(25) mit „wahr“ zu bewerten, wie es innerhalb der Standardsemantik der Aussagenlogik unproblematisch ist, III(26), III(27) und III(28) mit „wahr“ zu bewerten.

III(25) Hans hat keinen Eigennamen.

III(26) $2 + 5 = 8$

III(27) Die Aussage III(27) ist falsch.

III(28) Es gibt keine Wahrheitswerte.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die üblichen Einwände gegen eine Substitutionsinterpretation der Quantoren nur dann auf Wahrheitswertsemantiken scheinbar zutreffen, wenn man Wahrheitswertsemantiken als verdeckte referentielle Semantiken liest. Wenn man Wahrheitswertsemantiken ernst nimmt, dann stellen sich diese Einwände als unhaltbar heraus. Dabei ist es wichtig, sich vor Augen zu führen, daß eine Formel wie F(k) nicht als Teil einer interpretierten Sprache gelesen werden darf, in der k für beispielsweise für „Fifi“ und F für „x_1 ist ein Hund“ steht. Formeln werden von Logikern verwendet, um die Aspekte von natürlichen Sprachen zu repräsentieren, die notwendig sind, um Argumente zu analysieren und zu evaluieren.[98] Wahrheitswertsemantiken sind dazu geeignet, durch Bewertungen herauszufinden, ob die eine durch eine Formel repräsentierte Aussage logisch wahr, logisch falsch oder logisch indeterminiert ist, und können darüber hinaus dazu dienen zu überprüfen, ob ein durch Formeln repräsentiertes Argument korrekt ist oder nicht. Völlig unzweckmäßig sind sie für die Aufgabe, das Verhältnis von Sprache und Welt zu untersuchen. Das macht sie für Ontologen ungeeignet, einen Logiker stört es nicht.

7 *Korrektheit*

L7.1 Wenn A ein Axiom ist, dann $\vDash$ A.

Beweis:

IA: Wenn der Grad von A = 0 ist, ergibt sich $\vDash$ A unmittelbar aus L6.1(a)-(f).

IH: Wenn der Grad von A $\leq$ n ist, dann $\vDash$ A.

IS: Angenommen, der Grad von A = n+1. Dann gibt es ein B, eine Individuenvariable x und eine Individuenkonstante k, so daß A = $\forall$x B, k nicht in $\forall$x B vorkommt und B[x/k] ein Axiom vom Grad n ist. Jetzt sei k_1 irgendeine Individuenkonstante mit demselben Superskript wie x und k. Aufgrund von L5.3(a) ist B[x/k] [k/k_1] auch ein Axiom vom Grad n. Da k nicht in $\forall$x B vorkommt, kommt k auch nicht in B vor, und daher B[x/k] [k/k_1] = B[x/k_1] (L3.1(g)). Folglich ist B[x/k_1] ein Axiom vom Grad n, und deshalb gilt aufgrund der IH $\vDash$ B[x/k_1]. Da das für jedes k_1 mit dem passenden Superskript gilt, gilt gemäß den Bewertungsregeln auch $\vDash$ $\forall$x B.

[98] Siehe Einleitung, Seite 9ff.

L7.2 Schwache Korrektheit: Wenn $\vdash$ A, dann $\vDash$ A.

Beweis:

Wenn $\vdash$ A, dann gibt es einen Beweis B_1, B_2, …, B_n für A. Es wird nun gezeigt, daß $\vDash B_p$, für jedes p ($1 \leq p \leq n$).

a) Angenommen, B_p ist ein Axiom. Dann folgt aufgrund von L7.1 $\vDash B_p$.
b) Angenommen, B_p folgt unter Anwendung von MP auf zwei vorhergehende Zeilen $B_m \supset B_p$ und B_m, für die bereits gezeigt wurde $\vDash B_m \supset B_p$ und $\vDash B_m$. Dann folgt aufgrund von L6.1(h), daß $\vDash B_p$.

L7.3 Starke Korrektheit: Wenn M $\vdash$ A, dann M $\vDash$ A.

Beweis:

Da M $\vdash$ A, gibt es gemäß L5.1(a) eine endliche Teilklasse M′ von M, so daß M′ $\vdash$ A. Dann gibt es Formeln B_1, B_2, …, B_n, so daß M′ = $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Folglich $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \vdash$ A und aufgrund des Deduktionstheorems L5.1(j) $\vdash B_1 \supset (B_2 \supset (\ldots \supset (B_n \supset A)\ldots))$. Daraus folgt aufgrund L7.2 $\vDash B_1 \supset (B_2 \supset (\ldots \supset (B_n \supset A)\ldots))$. Daraus folgt aufgrund L6.1(i) $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \vDash$ A und daher M′ $\vDash$ A. Also aufgrund L6.1(j) M $\cup$ M′ $\vDash$ A und, da M′ eine Teilmenge von M ist, folglich M $\vDash$ A.

L7.4 Widerspruchsfreiheit: Es gibt kein A, so daß $\vdash$ A und $\vdash$ ~A.

Beweis:

Angenommen, $\vdash$ A und $\vdash$ ~A. Dann gilt aufgrund L7.2 $\vDash$ A und $\vDash$ ~A. Folglich sind {~A} und {~~A} semantisch inkonsistent, es gibt also kein ϕ derart, daß $[\{\sim A\}]^{\phi} = \{[\sim A]^{\phi}\}$ (L4.1(b)) oder $[\{\sim\sim A\}]^{\phi} = \{\sim[\sim A]^{\phi}\}$ (L4.1(b), L4.2(a)) erfüllbar ist. Betrachten wir eine Grundbewertung α. Dann gilt $[\![[\sim A]^{\phi}]\!]_{\alpha} = 0$ und $[\![\sim[\sim A]^{\phi}]\!]_{\alpha} = 0$. Aufgrund der Definition von Bewertungen folgt aus $[\![[\sim A]^{\phi}]\!]_{\alpha} = 0$, daß $[\![\sim[\sim A]^{\phi}]\!]_{\alpha} = 1$. Die Annahme von $\vdash$ A und $\vdash$ ~A führt also zum Widerspruch.

8 Vollständigkeit

M ist *maximal konsistent* genau dann, wenn

1) M syntaktisch konsistent ist;
2) für jede wff A gilt: wenn $A \notin M$, dann ist $M \cup \{A\}$ inkonsistent.

M ist *ω-vollständig* genau dann, wenn für alle A und alle d ($d \geq -1$) gilt:

$M \vdash \forall x^d A$, wenn $M \vdash A[x^d/k^d]$, für alle k^d.

L8.1 Für jede maximal konsistente Formelklasse M gilt:

(a) $M \vdash A$ gdw $A \in M$.

(b) $A \in M$ gdw $\sim A \notin M$.

(c) $A \supset B \in M$ gdw $A \notin M$ oder $B \in M$.

(d) $\forall x^d A \in M$ gdw $A[x^d/k^d] \in M$, für alle k^d; wenn M ω-vollständig ist.

L8.2 Wenn M maximal konsistent und ω-vollständig ist, dann sei α_M die Funktion von WFF_a in $\{1, 0\}$, für die gilt: $\alpha_M(A) = 1$ genau dann, wenn $A \in M$. Es sei BEW_M die mit α_M übereinstimmende Bewertung. Dann gilt für jedes $A \in WFF$: $A \in M$ genau dann, wenn $BEW_M(A) = 1$.

Daher gilt:

L8.3 Wenn M maximal konsistent und ω-vollständig ist, dann ist M erfüllbar.

L8.4 Lindenbaumlemma: Wenn M syntaktisch konsistent und unendlich erweiterbar ist, dann gibt es eine maximal konsistente und ω-vollständige Menge von wff M_H, so daß $M \subseteq M_H$.

Es sei $A_0, A_1, A_2, \ldots$ eine Aufzählung aller wff. Es wird induktiv eine Folge von Formelklassen definiert:

(i) $M_0 = M$;

(ii) Wenn $M_n \cup \{A_n\}$ syntaktisch inkonsistent ist, dann $M_{n+1} = M_n$;

(iii) Wenn $M_n \cup \{A_n\}$ syntaktisch konsistent ist und es kein B und x^d gibt, so daß $A_n = {\sim}\forall x^d\, B$, dann $M_{n+1} = M_n \cup \{A_n\}$;

(iv) Wenn $M_n \cup \{A_n\}$ syntaktisch konsistent ist und es ein B und x^d gibt, so daß $A_n = {\sim}\forall x^d\, B$, dann $M_{n+1} = M_n \cup \{A_n, {\sim}B[x^d/k^d]\}$, wobei k^d die alphabetisch nächste Individuenkonstante mit dem Superskript d ist, die in keiner Formel aus $M_n \cup \{A_n\}$ vorkommt.

Die *Henkin-Erweiterung* M_H von M sei die Formelklasse, für die gilt: $B \in M_H$ genau dann, wenn es ein n (n≥0) gibt, so daß $B \in M_n$.

Offenbar gilt $M \subseteq M_H$. Es läßt sich außerdem zeigen, daß

(a) für jedes n (n≥0) gilt: M_n ist syntaktisch konsistent;

(b) M_H syntaktisch konsistent ist;

(c) M_H maximal konsistent ist;

(d) M_H ω-vollständig ist.

L8.5 Wenn M unendlich erweiterbar und syntaktisch konsistent ist, dann ist M erfüllbar.

Beweis:

Wenn M unendlich erweiterbar und syntaktisch konsistent ist, dann ist gemäß L8.4 die Henkin-Erweiterung M_H von M maximal konsistent und ω-vollständig. Daraus folgt mit L8.3, daß M_H erfüllbar ist, es also eine Grundbewertung α gibt, so daß für alle $B \in M_H$ gilt: $[\![B]\!]_\alpha = 1$. Da $M \subseteq M_H$, gilt also auch für alle $B \in M$: $[\![B]\!]_\alpha = 1$. Folglich ist M erfüllbar.

L8.6 Wenn M syntaktisch konsistent ist, dann gibt es eine unendlich erweiterbare und syntaktisch konsistente Abbildungsmenge M′ von M.

Beweis:

Angenommen, M ist syntaktisch konsistent. Es sei ϕ die KON-Abbildung, so daß für jedes d (d≥-1) und jedes n (n≥1) gilt: $\phi(K^d{}_n) = K^d{}_{2n}$. Ferner sei M′

die Abbildungsmenge von M bezüglich ϕ. Da für jedes d (d≥-1) K^d_1, K^d_3, K^d_5, … in keinem Element von M′ vorkommt, ist M′ unendlich erweiterbar. Aus L5.3(d) folgt außerdem, daß M′ syntaktisch konsistent ist.

L8.7 Wenn M syntaktisch konsistent ist, ist M semantisch konsistent.

Beweis:
Angenommen, M ist syntaktisch konsistent. Aufgrund L8.6 gibt es eine unendlich erweiterbare und syntaktisch konsistente Abbildungsmenge M′ von M. Das impliziert aber gemäß L8.5, daß M′ erfüllbar ist. Definitionsgemäß ist M dann semantisch konsistent.

L8.8 Starke Vollständigkeit: Wenn $M \vDash A$, so $M \vdash A$.

Beweis:
Angenommen, $M \vDash A$. In diesem Fall ist $M \cup \{\sim A\}$ definitionsgemäß nicht semantisch konsistent. Daraus folgt mit L8.7, daß $M \cup \{\sim A\}$ nicht syntaktisch konsistent ist. Aufgrund von L5.2(b) folgt daraus, daß $M \vdash A$.

L8.9 Kompaktheit: Wenn $M \vDash A$, dann gibt es eine endliche Menge M′ mit $M' \subseteq M$ und $M' \vDash A$.

Beweis:
Angenommen, $M \vDash A$. Aufgrund von L8.8 gilt dann $M \vdash A$. Dann gibt es aufgrund von L5.1(a) eine endliche Menge M′ mit $M' \subseteq M$ und $M' \vdash A$. $M' \vdash A$ und L7.3 implizieren $M' \vDash A$. Folglich gibt es eine Menge M′ mit $M' \subseteq M$ und $M' \vDash A$.

9 Unvollständigkeit

Die naive Prädikatenlogik ist also widerspruchsfrei, korrekt, kompakt und vollständig. Außerdem läßt sich offensichtlich jede Formel eines Stufenkalküls[99] in eine Formel der Naiven Prädikatenlogik übersetzen, aber nicht umgekehrt. In diesem Sinne verbindet die Naive Prädikatenlogik einen über bestimmte Typentheorien hinausgehenden sprachlichen Reichtum mit den metalogischen Eigenschaften der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe. Dies scheint im Widerspruch zu klassischen Ergebnissen, insbesondere zum ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu stehen. In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, weshalb viele Erweiterungen der Prädikatenlogik erster Stufe unvollständig sind, die Naive Prädikatenlogik aber nicht, und dazu werden drei Strategien diskutiert, mit denen sich die Unvollständigkeit eines Systems beweisen läßt.

Eine Möglichkeit, die Unvollständigkeit eines logischen Systems S zu zeigen, besteht im Ausnutzen des engen Zusammenhangs zwischen Kompaktheit und Vollständigkeit. S sei ein beliebiges logisches System, in dem Ableitungen als endliche Folgen von Formeln definiert wurden und für das die Korrektheit bereits bewiesen wurde. Dann genügt es, eine unendliche Menge M und eine wff A zu finden, so daß $M \vDash_S A$ und $M' \nvDash_S A$ für jede endliche Teilmenge M′ von M gilt, um die Unvollständigkeit zu zeigen. Wäre das System S vollständig, würde sich die Kompaktheit genauso wie in dem Beweis von L8.9 zeigen lassen. Da die Menge M und die wff A ein Gegenbeispiel gegen die Kompaktheit bilden, kann das System S nicht kompakt sein. Folglich ist S nicht vollständig.

Enderton (1972) wählt diese Strategie und zeigt die fehlende Kompaktheit einer Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik über eine Formel A_{unend}, die Modelle mit einem unendlichen Individuenbereich charakterisiert: Der Individuenbereich ist unendlich genau dann, wenn es eine (transitive, irreflexive) Nachfolgerrelation R gibt, so daß jedes Element aus dem Individuenbereich einen Nachfolger besitzt. Für jedes $n \geq 2$ gibt es

[99] Eine Formulierung eines solchen Stufenkalküls findet sich beispielsweise in Hilbert/ Ackermann (1949).

außerdem eine wff B_n, so daß B_n den Satz „Es gibt mindestens n Gegenstände“ repräsentiert. Daher lassen sich Modelle mit einem unendlichen Individuenbereich auch durch die Menge $M = \{B_2, B_3, B_4, \ldots\}$ charakterisieren. Es gilt also einerseits $M \vDash_{SOL} A_{unend}$ und andererseits $M' \nvDash_{SOL} A_{unend}$ für jede endliche Teilmenge M' von M.[100] Folglich ist die Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik weder kompakt, noch vollständig.[101]

Was unterscheidet die Naive Prädikatenlogik von der Prädikatenlogik zweiter Stufe (mit Standardsemantik)? Wieso ist das eine System vollständig und das andere nicht? Um diese Fragen genauer zu untersuchen, wird jetzt versucht, Endertons Gegenbeispiel zu übertragen. A_{unend} läßt sich durch III(29) darstellen.

$$\text{III(29)} \quad \exists V^2_1((\forall V^{-1}_1 \forall V^{-1}_2 \forall V^{-1}_3(V^2_1(V^{-1}_1, V^{-1}_2) \supset (V^2_1(V^{-1}_2, V^{-1}_3) \supset V^2_1(V^{-1}_1, V^{-1}_3))) \wedge \forall V^{-1}_1 \sim V^2_1(V^{-1}_1, V^{-1}_1,)) \wedge \forall V^{-1}_1 \exists V^{-1}_2 V^2_1(V^{-1}_1, V^{-1}_2))$$

Vernachlässigen wir kurz, daß das Alphabet der Naiven Prädikatenlogik nicht über ein Identitätszeichen verfügt, und nehmen wir an, daß die Mindestanzahlaussagen $B_2, B_3, B_4, \ldots$ korrekt in der Sprache der Naiven Prädikatenlogik formalisiert wurden. Betrachten wir eine Grundbewertung α, für die gilt: $\alpha(K^1_m(K^{-1}_n)) = 1$ genau dann, wenn n = m; und für alle n $(n \geq 1)$ $\alpha(K^2_n(K^{-1}_1, K^{-1}_1)) = 1$. Dann gilt für alle n und m: Wenn $n \neq m$, $[\![K^1_n(K^{-1}_n)]\!]_\alpha = 1$ und $[\![K^1_n(K^{-1}_m)]\!]_\alpha = 0$. Zwei beliebige, unterschiedliche Gegenstandskonstanten bezeichnen also unter der mit α übereinstimmenden

[100] Das Zeichen „$\vDash_{SOL}$“ wird für die semantische Konsequenzrelation der Standardsemantik für die Prädikatenlogik zweiter Stufe verwendet.

[101] Dieselbe Strategie wählen Ebbinghaus, Flum und Thomas (1978). Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, daß in Modellen mit endlichen Individuenbereichen jede injektive Funktion eine surjektive ist und sich dieser Zusammenhang in einer Prädikatenlogik höherer Stufe ausdrücken läßt. Weil sich zwischen diesem Ansatz und dem von Enderton keine relevanten Unterschiede ergeben, wird in der folgenden Diskussion nur Endertons berücksichtigt.

Bewertung Gegenstände mit unterschiedlichen Eigenschaften. Auf diese Weise wird sichergestellt, daß $[\![B_2]\!]_a = 1$, $[\![B_3]\!]_a = 1$, $[\![B_4]\!]_a = 1$, … Gleichzeitig gilt für jedes beliebige n ($n \geq 1$) $[\![K^2{}_n(K^{-1}{}_1, K^{-1}{}_1)]\!]_a = 1$, folglich ergibt sich $[\![\forall V^{-1}{}_1 \sim K^2{}_n(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_1)]\!]_a = 0$, und damit gilt:

III(30) $$[\![(\forall V^{-1}{}_1 \forall V^{-1}{}_2 \forall V^{-1}{}_3 (K^2{}_n(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_2) \supset (K^2{}_n(V^{-1}{}_2, V^{-1}{}_3) \supset K^2{}_n(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_3))) \wedge \forall V^{-1}{}_1 \sim K^2{}_n(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_1)) \wedge \forall V^{-1}{}_1 \exists V^{-1}{}_2 K^2{}_n(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_2)]\!]_a = 0.$$

Da dies für jedes $n \geq 1$ gilt, ergibt sich $[\![A_{unend}]\!]_a = 0$ bzw. $[\![\sim A_{unend}]\!]_a = 1$. Also ist $\{\sim A_{unend}, B_2, B_3, B_4, \dots\}$ erfüllbar, woraus sich $M \not\models A_{unend}$ ergibt. Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung des Existenzquantors funktioniert Endertons Beispiel gegen die Kompaktheit innerhalb seiner referentiellen Semantik, aber nicht in der Wahrheitswertsemantik der Naiven Prädikatenlogik.[102]

Daß eine Prädikatenlogik höherer Stufe (mit einer Standardinterpretation) auch nicht im schwachen Sinn vollständig ist, läßt sich ebenfalls unter Verwendung von Formeln zeigen, die Modelle mit endlichen Individuenbereichen charakterisieren.[103] Für eine solche Formel A_{endl} gilt: A_{endl} ist in einem Modell $\mathfrak{M}$ wahr genau dann, wenn der Individuenbereich von $\mathfrak{M}$

[102] Ein Beispiel gegen die Kompaktheit läßt sich auch nicht konstruieren, indem man in A anstatt der zweistelligen Eigenschaftsvariable eine entsprechende zweistellige Eigenschaftskonstante, beispielsweise $K^2{}_1$, einsetzt, um die Besonderheiten des Existenzquantors zu umgehen. A* sei folgende Formel:

$$(\forall V^{-1}{}_1 \forall V^{-1}{}_2 \forall V^{-1}{}_3 (K^2{}_1(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_2) \supset (K^2{}_1(V^{-1}{}_2, V^{-1}{}_3) \supset K^2{}_1(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_3))) \wedge \forall V^{-1}{}_1 \sim K^2{}_1(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_1)) \wedge \forall V^{-1}{}_1 \exists V^{-1}{}_2 K^2{}_1(V^{-1}{}_1, V^{-1}{}_2)$$

In einer Menge M*, die dazu geeignet ist, die Kompaktheit zu widerlegen, müßten unendlich viele wff die Eigenschaften von $K^2{}_1$ festlegen. Naheliegend wäre es, folgende Menge zu betrachten: $M^* = \{\sim K^2{}_1(K^{-1}{}_n, K^{-1}{}_m) \mid n \geq m\} \cup \{K^2{}_1(K^{-1}{}_n, K^{-1}{}_m) \mid n < m\}$. Jedoch gilt für M*, daß $M^* \cup \{\sim A^*\}$ zwar nicht erfüllbar, aber sehr wohl semantisch konsistent ist. Daher gilt $M^* \not\models A^*$.

[103] Siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas (1978).

endlich ist. Die Negation von der oben diskutierten A_{unend} ist ein Beispiel für eine solche Formel.

Ein unendlicher Individuenbereich läßt sich innerhalb der Wahrheitswertsemantik der Naiven Prädikatenlogik – wie oben geschehen – simulieren, indem die Grundbewertung α so gewählt wird, daß für zwei beliebige Individuenkonstanten K^{-1}_n, K^{-1}_m mit $n \neq m$ gilt, daß $[\![\exists V^1_1\ (V^1_1(K^{-1}_n) \wedge {\sim}V^1_1(K^{-1}_m))]\!]_\alpha = 1$. Doch – wie gezeigt wurde – ist es auch unter einer solchen Grundbewertung α möglich, daß $[\![A_{endl}]\!]_\alpha = 1$. Endliche Individuenbereiche lassen sich also nicht innerhalb der Naiven Prädikatenlogik charakterisieren; in diesem Sinne ist die Ausdrucksfähigkeit der Naiven Prädikatenlogik schwächer als die von prädikatenlogischen Systemen höherer Stufen (unter einer Standardinterpretation). Aus diesem Grund läßt sich auch diese Beweistechnik nicht auf die Naive Prädikatenlogik anwenden.

Eine dritte Strategie, um die Unvollständigkeit eines formalen Systems S zu zeigen, nutzt den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Dazu reicht es, eine Formel A zu finden, so daß A die Arithmetik kategorisch axiomatisiert, das heißt für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von S gilt: $\mathfrak{M} \vDash_S A$ gdw $\mathfrak{M}$ isomorph zu den natürlichen Zahlen mit Nachfolgerrelation, Addition und Multiplikation ist. Da die Naive Prädikatenlogik ohne Identität aufgebaut wurde und für Wahrheitswertsemantiken Modelle keine Rolle spielen, läßt sich diese Beweismethode nicht unmittelbar auf die Naive Prädikatenlogik anwenden. Um zu zeigen, weshalb auch dieser Weg nicht zu einem Unvollständigkeitsbeweis führen kann, wird eine alternative Semantik für die Prädikatenlogik zweiter Stufe betrachtet.

In der Standardsemantik wird einer d-stelligen Prädikatenvariable ein Element der Potenzmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Trägermenge zugewiesen; deshalb ist die Potenzmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Trägermenge in einem gewissen Sinne der Interpretationsbereich einer d-stelligen Prädikatenvariable. In einer Henkin-Semantik wird das Standardmodell erweitert, indem die Interpretationsbereiche für die Prädikatenkonstanten und -variablen explizit angegeben werden, wobei der Interpretationsbereich für d-stellige Eigenschaftskonstanten und -variablen eine (nichtleere) Teilmenge der Potenzmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Trägermenge ist. Weil dies keine echte Teilmenge sein muß, läßt sich leicht zeigen, daß man ein Standardmodell $\mathfrak{M}$ in ein Henkin-Modell $\mathfrak{M}'$ überführen kann, so daß für jede wohlgeformte Formel A gilt, daß A genau dann in $\mathfrak{M}$ wahr ist, wenn A in $\mathfrak{M}'$ wahr ist.[104] Dies wird erreicht, indem als Interpretationsbereich von d-stelligen Eigenschaftskonstanten und –variablen die Potenzmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Trägermenge gewählt wird. Umgekehrt läßt sich nicht jedes Henkin-Modell in ein Standardmodell überführen. $\mathfrak{M}$ sei beispielsweise ein Henkin-Modell, dessen Trägermenge aus den Elementen 1 und 2 besteht und dessen Interpretationsbereich für einstellige Prädikatenkonstanten- und variablen nur ein Element enthält, nämlich $\{1, 2\}$. Es sei darüber hinaus I die Interpretationsfunktion von $\mathfrak{M}$ und $I(k_1) = 1$ und $I(k_2) = 2$. In diesem Fall gilt $\mathfrak{M} \vDash_H \forall X^1 (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2))$ und außerdem $\mathfrak{M} \vDash_H k_1 \neq k_2$.[105] Da ferner $\vDash_{SOL} \forall X^1 (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$ und mithin für jedes Standardmodell $\mathfrak{M}'$ gilt, daß $\mathfrak{M}' \vDash_{SOL} \forall X^1 (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$, läßt sich $\mathfrak{M}$ in kein Standardmodell $\mathfrak{M}'$ überführen, so daß für jedes A gilt: $\mathfrak{M} \vDash_H$ A gdw $\mathfrak{M}' \vDash_{SOL}$ A. Also gibt es mehr Henkin-Modelle als Standardmodelle, die bei der Betrachtung der Gültigkeit einer Formel herangezogen werden müssen. Dies ist der Fall, weil bei Standardmodellen die Interpretationsbereiche der Eigenschaftsvariablen durch die Wahl der Trägermenge festgelegt wird, während sich bei Henkin-Modellen die Interpretationsbereiche auch

[104] Es werden wie in den vorherigen Abschnitten nur Formeln ohne freie Variablen betrachtet. Daher kann auf die Angabe von Belegungen verzichtet werden.
[105] Das Zeichen „$\vDash_H$“ wird für die semantische Konsequenzrelation der Henkin-Semantik für die Prädikatenlogik zweiter Stufe verwendet.

zwischen Modellen mit derselben Trägermenge unterscheiden können. Deshalb gilt zwar für alle A: Wenn $\vDash_H$ A, dann $\vDash_{SOL}$ A, aber nicht umgekehrt; beispielsweise gilt $\vDash_{SOL} \forall X^1 \, (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$ und gleichzeitig $\nvDash_H \forall X^1 \, (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$. Daß in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik weniger Formeln gültig sind, führt zur Vollständigkeit der Prädikatenlogik zweiter Stufe, während die Prädikatenlogik zweiter Stufe unter der Standardsemantik bekanntlich unvollständig ist.[106]

Das heißt im Umkehrschluß, daß in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik die Arithmetik nicht kategorisch axiomatisiert werden kann. So charakterisiert in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik die Konjunktion der drei Peano-Axiome $\forall x \; Sx \neq 0$, $\forall x \, \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$, $\forall X^1(X^1(0) \wedge \forall y(X^1(y) \rightarrow X^1(Sy)) \rightarrow \forall y \, X^1(y))$ die natürlichen Zahlen, das heißt, alle Modelle der Peano-Axiome sind isomorph zu den natürlichen Zahlen.[107] Dagegen gibt es in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik Modelle dieser Axiome, die nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen sind. Betrachten wir beispielsweise ein Henkin-Modell mit der Trägermenge $D = \{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl oder 0 oder eine ungerade negative ganze Zahl$\}$. Es sei $G = \{<x, y> \mid x \in D \wedge y = x + 2\}$ Element des Interpretationsbereichs für zweistellige Eigenschaftskonstanten und -variablen und $I(S) = G$.[108] Außerdem sei das einzige Element des Interpretationsbereichs für einstellige Eigenschaftskonstanten und -variablen die Menge $\{1\}$. Wie sich leicht überprüfen läßt, sind in diesem Fall die Peano-Axiome wahr, das zugrunde liegende Modell ist aber nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen.

[106] Siehe dazu unter anderem Church (1996).
[107] Enderton (1972). „S“ ist ein einstelliges Funktionenzeichen. „Sx“ wird „Der Nachfolger von x“ gelesen. Es reicht für unsere Zwecke, auf eine Axiomatisierung für die natürlichen Zahlen einzugehen, weil die Addition und die Multiplikation für die folgenden Argumente keine Rolle spielen.
[108] Die Funktion S wird also über ihren Graphen interpretiert.

Das Ziel, ein Modell zu finden, das nicht zu den natürlichen Zahlen isomorph ist, wurde erreicht, indem der Individuenbereich für die einstellige Prädikatenvariable X^1 so gewählt wurde, daß 0 kein Element eines Elements des Individuenbereichs ist. Denn auf diese Weise ist unabhängig von der Belegung von X^1 die Formel $X^1(0)$ nicht erfüllt und damit $(X^1(0) \wedge \forall y(X^1(y) \rightarrow X^1(Sy))) \rightarrow \forall y\ X^1(y)$ immer erfüllt, weshalb $\forall X^1((X^1(0) \wedge \forall y(X^1(y) \rightarrow X^1(Sy))) \rightarrow \forall y\ X^1(y))$ wahr ist. Diese Vorgehensweise ist in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik nicht möglich, weil die Variable X^1 mit allen Elementen der Produktmenge von D belegt werden kann. So ist ein Standardmodell $\mathfrak{M}$ mit D als Trägermenge und einer Interpretation I, die der Nachfolgerrelation S die oben genannte Interpretation zuweist, kein Modell der Peano-Axiome, weil $\mathfrak{M} \nvDash \forall X^1((X^1(0) \wedge \forall y(X^1(y) \rightarrow X^1(Sy))) \rightarrow \forall y\ X^1(y))$, denn $(X^1(0) \wedge \forall y(X^1(y) \rightarrow X^1(Sy))) \rightarrow \forall y\ X^1(y)$ ist nicht erfüllt, wenn X^1 mit $\{x \mid x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl oder } 0\}$ belegt wird. Der wesentliche Unterschied zwischen Standardsemantik und Henkin-Semantik besteht also in der Behandlung der Quantoren: In der Standardsemantik wird sozusagen immer über ‚alle möglichen Eigenschaften' quantifiziert, in der Henkin-Semantik dagegen nicht. Dies ist der Grund, weshalb sich die Arithmetik in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik charakterisieren läßt, aber in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik nicht.

An dieser Stelle möchte ich kurz auf das unter Logikern verbreitete Vorurteil eingehen, daß die Prädikatenlogik zweiter Stufe notorisch unvollständig ist. Der wahre Kern dieses Vorurteils ist folgende Tatsache: Die Standardsemantik einer Prädikatenlogik zweiter Stufe läßt sich nicht vollständig axiomatisieren. Ein Axiomensystem einer Prädikatenlogik zweiter Stufe läßt sich also nicht durch das Hinzufügen neuer Axiome so erweitern, daß die Tautologien und nur die Tautologien der Standardsemantik auch Theoreme des erweiterten Axiomensystems sind. Aber es gibt umgekehrt Semantiken wie die Henkin-Semantik, in bezug auf die ein

Axiomensystem der Prädikatenlogik zweiter Stufe korrekt und vollständig ist. Ob die Prädikatenlogik zweiter Stufe vollständig ist oder nicht, ist auch eine Frage des Fokus: Wer die Prädikatenlogik zweiter Stufe mit der Menge der Tautologien der Standardsemantik identifiziert, kommt zu dem Ergebnis, daß die Prädikatenlogik zweiter Stufe essentiell unvollständig ist. Wer sie jedoch mit der Menge der Theoreme einer ihrer Axiomatisierungen identifiziert, kommt zu dem entgegengesetzten Resultat. Meines Erachtens spricht wenig dafür, der ersten Alternative den Vorzug zu geben.

Wenn man als Logiker das Ziel verfolgt, Argumente zu analysieren und zu evaluieren, dann bildet – wie in der Einleitung betont wurde – die Untersuchung von in den natürlichen Sprachen formulierten Argumentationen die Ausgangsbasis. Zu den relevanten linguistischen Daten gehört auch die Information, welche Schlüsse von den Sprechern der natürlichen Sprachen intuitiv als korrekt akzeptiert oder abgelehnt werden. Da Schlüsse in den natürlichen Sprachen durch die Ableitungsbeziehung in formalen Systemen repräsentiert werden und die Ableitbarkeitsrelation eines Systems unmittelbar mit den Theoremen des Systems zusammenhängt, die wiederum durch die Axiome und Schlußregeln bestimmt werden, gibt es oft gute linguistische Evidenzen dafür, was eine angemessene Axiomatisierung ist und was nicht. Im konkreten Fall gibt es – wenigstens soweit mir bekannt ist – keine linguistische Daten, die dafür sprechen, daß wir die Quantoren der natürlichen Sprache wie „alle“ und „es gibt“, wenn sie Platzhalter für nominalisierte Prädikate binden, anders verwenden, als wenn sie Platzhalter für Namen von Gegenständen binden. In einer angemessenen Prädikatenlogik zweiter Stufe sollten daher die Quantoren $\exists x^{-1}$ und $\exists X^{d}$ beziehungsweise $\forall x^{-1}$ und $\forall X^{d}$ sich nur dadurch unterscheiden, daß sie unterschiedliche Variablen binden, sich aber sonst gleich verhalten. Dies spricht dafür, die Prädikatenlogik zweiter Stufe mit einem Axiomensystem zu identifizieren, das aus einem Axiomensystem der Prädikatenlogik erster Stufe hervorgeht, indem man Variablen für Prädikatpositionen hinzufügt und die

Regeln für die Quantoren aus der Prädikatenlogik erster Stufe auf die neuen Variablen ausdehnt. Auf der anderen Seite gibt es keine linguistischen Daten, die den Modellbegriff in der Standardsemantik in irgendeiner Hinsicht vor dem Modellbegriff der Henkin-Semantik auszeichnen. Daher ist es nur vernünftig, sich von der sogenannten ‚Standardsemantik' für die Prädikatenlogik zweiter Stufe zu verabschieden, die Henkin-Semantik zum neuen ‚Standard' zu erheben und die Vorzüge eines vollständigen (und korrekten) Systems zu genießen.[109]

Kehren wir zu der Betrachtung der Naiven Prädikatenlogik zurück. Wahrheitswertsemantiken haben mit Henkin-Semantiken gemein, daß nicht über ‚alle möglichen Eigenschaften' quantifiziert wird. Deshalb ist $\forall X^1(X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset \forall X^2(X^2(k_1, k_3) \equiv X^2(k_2, k_3))$ in einer Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik gültig, aber nicht in einer Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik oder in der Naiven Prädikatenlogik.[110] Ein anderes Beispiel dafür, daß in einer Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik ‚mehr Eigenschaften' betrachtet werden als in einer Wahrheitswertsemantik, bieten Aussagen über natürliche Zahlen mit der Form $\forall X^1$ A: Weil in diesem Fall der Interpretationsbereich von X^1

[109] In Church (1996) wird die Standardsemantik als die intendierte Semantik dargestellt, von der die Henkin-Semantik dadurch abweicht, daß mehr als die intendierten Modelle betrachtet werden. Bezieht man sich auf die Intentionen, die bei der Entwicklung der Prädikatenlogik höherer Stufen eine Rolle gespielt haben, dann ist das sicherlich richtig. Denn viele Gründungsväter der mathematischen Logik wie Frege, Russell und Ramsey haben ein logizistisches Programm verfolgt, und wer das Ziel hat, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen, der gibt auf jeden Fall der Standardsemantik, mit der sich die Arithmetik kategorisch axiomatisieren läßt, den Vorzug gegenüber der Henkin-Semantik, die das nicht leistet. Heutzutage hegen die meisten Logiker keine logizistischen Intentionen mehr, aber Vollständigkeit wird von vielen als positive metatheoretische Eigenschaft von logischen Systemen anerkannt. Deshalb wäre es eher angemessen, die Henkin-Semantik als ‚intendiert' zu bezeichnen.

[110] Weshalb $\forall X^1(X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset \forall X^2(X^2(k_1, k_3) \equiv X^2(k_2, k_3))$ in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Standardsemantik, aber nicht in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik gültig ist, ergibt sich aus der Diskussion über $\forall X^1(X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$ weiter oben. $\forall X^1(X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset \forall X^2(X^2(k_1, k_3) \equiv X^2(k_2, k_3))$ wurde anstelle von $\forall X^1\ (X^1(k_1) \equiv X^1(k_2)) \supset k_1 = k_2$ gewählt, weil die Naive Prädikatenlogik über kein Identitätszeichen verfügt. Um festzulegen, daß k_1, k_2, k_3 Gegenstandskonstanten sind, müssen k_1, k_2, k_3 in der Naiven Prädikatenlogik die entsprechende Superskripte bekommen, die Formel lautet dann $\forall X^1(X^1(k^{-1}{}_1) \equiv X^1(k^{-1}{}_2)) \supset \forall X^2(X^2(k^{-1}{}_1, k^{-1}{}_3) \equiv X^2(k^{-1}{}_2, k^{-1}{}_3))$.

in der Standardsemantik die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist, ist der Interpretationsbereich von X^1 überabzählbar unendlich; dagegen erfolgt die Bewertung einer allquantifizierten Aussage $\forall X^1$ A in einer Wahrheitswertsemantik anhand der Bewertungen der Formeln der Form $A[X^1/F^1]$ (für jedes $F^1 \in KON_1$), also anhand von abzählbar unendlich vielen Formeln.[111] Auch wenn der Zusammenhang zwischen Wahrheitswertsemantiken und Henkin-Semantiken an dieser Stelle nur angedeutet werden kann,[112] sollte dies genügen, um zu erklären, weshalb die Naive Prädikatenlogik vollständig ist, ohne dadurch in Konflikt mit dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu geraten. Weil in der Naiven Prädikatenlogik genauso wie in der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik nicht über ‚alle möglichen' Eigenschaften quantifiziert wird, läßt sich die Arithmetik mit dem System der Naiven Prädikatenlogik (genauso wie mit der Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Henkin-Semantik) nicht charakterisieren.[113] Die hier diskutierte dritte Strategie, um die Unvollständigkeit eines logischen Systems zu zeigen, kann also nicht angewendet werden.

10 Formale Eigenschaftstheorien

In diesem Kapitel wurde mit der Naiven Prädikatenlogik ein prädikatenlogisches System präsentiert, daß den in Kapitel II herausgearbeiteten Anforderungen entspricht. Technisch gesehen handelt es sich bei der Naiven Prädikatenlogik um eine mehrsortige Prädikatenlogik mit $\mathcal{P}$ als einzigem Prädikatenzeichen. Interessant wird das System, indem man (i) $\mathcal{P}$ als Zeichen für die Kopula sowie (ii) bestimmte Konstanten als nominalisierte Prädikate auffaßt und (iii) neue (Namen von) Formeln durch Definitionen

[111] Da die Naive Prädikatenlogik über ein abzählbar unendliches Alphabet verfügt, ist auch die Menge der Zeichenketten über dieses Alphabet abzählbar unendlich, und damit ist die Menge der wff mit der Form $A[X^1/F^1]$ abzählbar unendlich.

[112] In Leblanc (1976) wurde für die Prädikatenlogik zweiter Stufe gezeigt, daß sich für (verschiedene) Henkin-Semantiken entsprechende Wahrheitswertsemantiken aufbauen lassen, so daß es für jedes Modell $\mathfrak{M}$ ein Bewertungsgegenstück α gibt, so daß für jede wff A gilt: $\mathfrak{M} \models A$ gdw $[\![A]\!]_\alpha = 1$.

[113] Dies gilt auch für das System, das bei der Erweiterung der Naiven Prädikatenlogik um ein Identitätszeichen entsteht.

einführt. Punkt (i) entspricht der Beobachtung aus Kapitel II, daß es eine Kopula gibt. Durch (ii) wird berücksichtigt, daß (nominalisierte) Prädikate in den natürlichen Sprachen an Argumentstellen vorkommen. Mit $\mathcal{P}$ und den Eigenschaftskonstanten lassen sich Aussagen formalisieren, in denen die Kopula und ein prädikativ gebrauchtes nominalisiertes Prädikat die Funktion eines (nicht-nominalisierten) Prädikates übernehmen beziehungsweise in der ein Platzhalter die Position eines prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikates einnimmt. Größere Ausdrucksmöglichkeiten erhält die Naive Prädikatenlogik unter anderem durch das $\mathcal{P}$-Schema, das zur Definition von (Namen von) Formeln dient, die Aussagen repräsentieren, in denen ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat gebraucht wird beziehungsweise Platzhalter für (nicht-nominalisierte) Prädikate vorkommen. Dadurch lassen sich die beiden unterschiedlichen Möglichkeiten, eine Prädikation zu vollziehen, einerseits verschieden repräsentieren, andererseits wird der Umstand, daß es sich um verschiedene Realisationen *derselben* Handlung handelt, berücksichtigt. Auf dieselbe Weise wird durch das $\mathcal{P}$-Schema gewährleistet, daß der gewünschte Zusammenhang zwischen nominaler Quantifikation und prädikativer Quantifikation besteht und daß durch denselben Quantor Platzhalter für nominalisierte Prädikate und (nicht-nominalisierte) Prädikate gebunden werden können.

Jede wohlgeformte Formel eines Stufenkalküls läßt sich problemlos in eine wohlgeformte Formel der Naive Prädikatenlogik übersetzen, indem man die Indizes, die die Stufen angeben, ignoriert.[114] Umgekehrt ist das nicht der Fall, weil Formeln der Form F(F) in einem Stufenkalkül nicht wohlgeformt sind. Die Naive Prädikatenlogik übersteigt daher die Ausdrucksfähigkeit eines Stufenkalküls. Daß dabei die wünschenswerten Eigenschaften der

[114] Genaugenommen übersetzt man auf diese Weise die Formel in einen Namen einer wohlgeformten Formel der Naiven Prädikatenlogik.

Prädikatenlogik erster Stufe erhalten bleiben, liegt daran, daß der logische Kern der Naiven Prädikatenlogik eine mehrsortige Prädikatenlogik erster Stufe ist. Es ließ sich deshalb zeigen, daß die Naive Prädikatenlogik widerspruchsfrei, korrekt, kompakt und vollständig ist. Aus der Widerspruchsfreiheit folgt unmittelbar, daß sich das Russell-Paradox und das Grelling-Paradox in der Naiven Prädikatenlogik nicht konstruieren lassen. Weshalb das genau der Fall ist, wird im nächsten Kapitel ausführlich untersucht.

Der Dreh- und Angelpunkt der Naiven Prädikatenlogik ist die Kopula $\mathcal{P}$. Die Kopula erlaubt es, das typische Merkmal von Logik höherer Stufe, nämlich Variablen in Prädikatpositionen, in eine Logik erster Stufe einzubinden. Doch die Verwendung der Kopula ist nicht nur ein nützlicher Kunstgriff, um die Naive Prädikatenlogik als Logik erster Stufe aufbauen zu können; und ihre Bedeutung beschränkt sich auch nicht darauf, bestimmten linguistischen Daten gerecht zu werden. Wie gezeigt wurde, markiert die Kopula die Prädikation syntaktisch. Dadurch, daß die Kopula im Zentrum der Naiven Prädikatenlogik steht, wird die Naive Prädikatenlogik ihrer Rolle als formaler Theorie der Prädikation gerecht.

Die Naive Prädikatenlogik wurde als logische Theorie entwickelt, und aus diesem Grund war es – gemäß den in der Einleitung formulierten Kriterien – ein Ziel dieser Arbeit, die Naive Prädikatenlogik möglichst neutral in Hinblick auf philosophische, insbesondere ontologische Positionen zu formulieren. Diese Zurückhaltung kann man natürlich aufgeben und die Naive Prädikatenlogik zu einer formalen Eigenschaftstheorie ausbauen.

Unter einer formalen Eigenschaftstheorie verstehe ich einen bestimmten methodischen Zugang zu den philosophischen Problemen, die mit Eigenschaften (Universalien, Begriffen etc.) verbunden sind: Eine formale Eigenschaftstheorie zeichnet sich dadurch aus, daß (mindestens) ein formales System mit dem Anspruch untersucht wird, daß die Ergebnisse dieser

Untersuchung signifikant für ontologische Fragen sind, die Eigenschaften (Universalien, Begriffe etc.) betreffen; dabei erfolgt die Analyse des logischen Systems unter anderem vor dem Hintergrund von linguistischen Daten. So, wie der Begriff an dieser Stelle verstanden werden soll, ist eine Theorie der Eigenschaften, die auf formale Methoden zurückgreift, keine formale Eigenschaftstheorie, wenn kein starker inhaltlicher Zusammenhang zwischen den Behauptungen der Theorie und den Eigenschaften des verwendeten formalen Systems besteht. Eine formale Eigenschaftstheorie liegt ebenfalls nicht bloß deshalb vor, weil ein Autor (mindestens) ein formales System in Beziehung zu Sätzen der normalen Sprachen setzt, in denen über Eigenschaften (Universalien, Begriffe etc.) gesprochen wird. Wenn jemand beispielsweise behauptet, daß eine typenfreie Logik bestimmten Aspekten der natürlichen Sprachen gerechter wird als eine Typentheorie, dann handelt es sich um eine These zur Prädikationstheorie. Wenn allerdings diese sprachphilosophische beziehungsweise logische Position in Beziehung zu dem ontologischen Standpunkt gesetzt wird, daß es in der Welt keine Hierarchie der Eigenschaften (Universalien, Begriffe etc.) gibt, dann wird der Schritt von der Prädikationstheorie zur formalen Eigenschaftstheorie vollzogen. Formale Eigenschaftstheorien lassen sich also durch folgenden Leitgedanken charakterisieren: Eine formale Theorie der Prädikation ist ein zentraler Bestandteil einer Theorie der Eigenschaften.

Die Annahme, daß formale Systeme in irgendeiner Hinsicht relevant für Fragestellungen der Ontologie, also „the search for the most general and pervasive structural aspects of reality“[115], sind, erscheint mir durchaus einer Erklärung bzw. Rechtfertigung zu bedürfen. Dies sehen die meisten Autoren, die formale Eigenschaftstheorien aufstellen, offenbar nicht so, da sie sich – abgesehen von Castañeda (1976) – nur sehr dürftig zu diesem Thema äußern. Es gibt zwei verschiedene Wege, wie die Autoren formale Eigenschaftstheorien aufstellen. Der erste besteht darin, daß bestimmte

[115] Castañeda (1976), S. 45.

philosophische Positionen bezüglich ontologischer Fragestellungen, die Eigenschaften (Universalien, Begriffe) betreffen, eingenommen oder vorausgesetzt werden und dann ein formales System mit einer entsprechenden Semantik konstruiert wird, die bestimmten Aspekten dieser philosophischen Positionen entspricht. Diesen Ansatz verfolgen beispielsweise Bealer und Mönnich, so daß in ihrem Artikel im *Handbook of Philosophical Logic* zu „Property Theories" den 15 Seiten, auf denen zwei formale Systeme (inklusive Vollständigkeitsbeweisen) abgehandelt werden, ganze 75 Seiten vorangehen, auf denen die philosophischen Überlegungen dargestellt werden, die beim Aufbau der formalen Systeme im zweiten Teil eine Rolle gespielt haben.[116] Wenn man diese formalen Systeme als logische Systeme – in dem Sinne, wie „Logik" in dieser Arbeit verstanden wird – auffassen würde, dann wären sie völlig mißlungen, denn diese Systeme würden nur von Philosophen zur Evaluierung von Argumenten akzeptiert werden, die mit den auf den ersten 75 Seiten des Artikels formulierten philosophischen Positionen übereinstimmen; sie sind also alles andere als philosophisch neutral. Da Bealer und Mönnich ihre Systeme offenbar nicht mit der Absicht aufgestellt haben, logische Systeme zu konstruieren, stellt sich die Frage, wozu sie sonst dienen sollen.

Cocchiarella beantwortet diese Frage für die in *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals* dargestellten formalen Systeme.[117] Diese formalen Systeme sind ebenfalls nicht philosophisch neutral; jedes der Systeme wird jeweils einer ontologischen Position (Nominalismus, unterschiedliche Varianten des Konzeptualismus und des Realismus) zugeordnet. Dabei wird für jede ontologische Position kurz begründet, weshalb sie nach Cocchiarellas Auffassung eine bestimmte Wahl der Axiome und der Semantik impliziert. Während Bealer und Mönnich also für eine bestimmte Version des Realismus argumentieren und deshalb der erste

[116] Siehe Bealer und Mönnich (1989).
[117] Cocchiarella (1986). Siehe auch Cocchiarella (1989).

Teil ihres Artikels unabhängig von dem logischen Teil philosophisch interessant ist, stellt Cocchiarella die formalen Systeme, die den verschiedenen ontologischen Positionen entsprechen sollen, nebeneinander, ohne daß die Positionen inhaltlich diskutiert werden. Begründet wird dieses Vorgehen durch folgende kurze Bemerkung in der Einleitung:

> „[…] we need not assume the truth or superiority of any one theory of universals over another. Indeed, an appropriate preliminary to any such assumption might well consist of a comparative analysis of some of the different formal theories of predication that can be semantically associated with these different theories of universals: for just as the latter provide a semantics for the former, it is only through the logical syntax of a formal theory of predication that the logical structure of a theory of universals can be rendered perspicuous. That, in any case, is the principal methodological assumption for the approach to the problems of universals we shall undertake in the present monograph […]“[118]

Cocchiarella konstruiert also verschiedene formale Systeme der Prädikation und vergleicht sie miteinander, um Erkenntnisse über die Eigenschaftstheorien zu gewinnen, die er den jeweiligen formalen Systemen zuordnet. Dieses Vorgehen begründet er mit der These, daß die ‚logische Struktur‘ von philosophischen Eigenschaftstheorien nur durch formale Systeme der Prädikation klar dargestellt werden könnte.

Durch die Eigenschaften der formalen Systeme werden aber nur wenige Aspekte der verschiedenen ontologischen Positionen repräsentiert. Deshalb ist es sehr fraglich, ob ein Vergleich dieser formalen Systemen zu philosophisch interessanten Einsichten bezüglich Eigenschaftstheorien führt.

[118] Cocchiarella (1986), S. 10.

(Letztlich unterscheiden sich die von Cocchiarella konstruierten Systeme in erster Linie nur durch die Formulierung des Comprehensionsaxioms.[119]) Wäre es so, dann würde man doch vermuten, daß Cocchiarella, nachdem er die Systeme aufgestellt und verglichen hat, philosophische Ergebnisse präsentiert und im besten Fall sogar Gründe für die Wahl einer bestimmten ontologischen Position vorbringt. Daß dies nicht der Fall ist, stützt die Vermutung, daß der gesamte Ansatz philosophisch unfruchtbar ist.

Ob eine formale Eigenschaftstheorie, die entsteht, indem man eine vorgefaßte oder vorausgesetzte ontologische Position als Grundlage zu der Entwicklung einer formalen Theorie der Prädikation nimmt, zu philosophisch interessanten Resultaten führt, erscheint mir sehr fragwürdig. Es gibt aber einen anderen Zugang, der von Castañeda sowie auch von Chierchia und Turner verfolgt wird,[120] bei dem durch die Untersuchung von sprachlichem Material eine formale Eigenschaftstheorie entwickelt wird, die über die ontologische Struktur der Welt Aufschluß geben soll. Dieser Zugang läßt sich durch folgenden Gedankengang rechtfertigen:

Die Art und Weise, wie wir über die Welt reden, spiegelt die Struktur der Welt wider. Aus diesem Grund können Philosophen durch die Reflexion auf die natürlichen Sprachen etwas über abstrakte Gegenstände wie Eigenschaften herausfinden. Es sind dabei aber nicht alle linguistischen Daten wichtig, sondern nur bestimmte syntaktische Eigenschaften von (Aussage-) Sätzen und intuitiv akzeptablen Schlüssen. Wie das Russell-Paradox zeigt, kann es vorkommen, daß verschiedene logische Regeln zusammen zu Widersprüchen führen, auch wenn jede einzelne logische Regel intuitiv völlig akzeptabel zu sein scheint. Aus diesem Grund ist es notwendig, ein

---

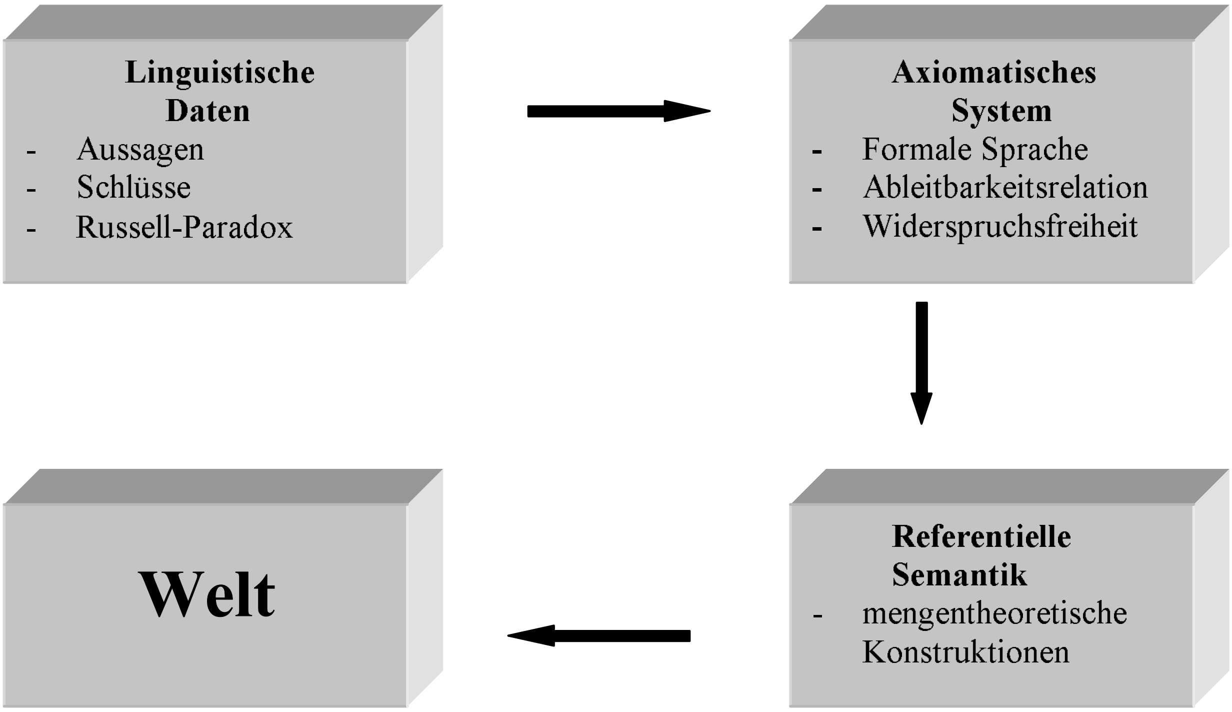
[119] Ein Comprehensionsaxiom ist ein Axiom der Form $\exists X^d \forall y_1 \ldots \forall y_d (X^d(y_1, \ldots, y_d) \equiv A)$, wobei bestimmte Einschränkungen für die Formel A getroffen werden. Inhaltlich gedeutet, legt das Comprehensionsaxiom fest, daß es eine Eigenschaft gibt, die durch das (möglicherweise komplexe) Prädikat A ausgedrückt wird. In Abschnitt 3 von Kapitel IV wird das Comprehensionsaxiom ausführlich dargestellt.

[120] Siehe Castañeda (1976) sowie Chierchia und Turner (1988).

formales System S zu entwickeln, in dem die inferentiellen Wechselwirkungen zwischen den intuitiv akzeptierten Schlüssen überprüft werden können. Das bedeutet, daß erstens eine formale Sprache entwickelt wird, in der die relevanten syntaktischen Merkmale repräsentiert werden können. (Daß die irrelevanten Aspekte natürlicher Sprachen in einer geeigneten formalen Sprache nicht vorhanden sind, ist ein erwünschter Nebeneffekt.) Zweitens wird auf dieser Sprache eine Ableitungsrelation so definiert, daß (im optimalen Fall) für jeden der intuitiv akzeptierten Schlüsse gilt: Die formale Repräsentation der Konklusion ist aus der Menge der formalen Repräsentationen der Prämissen in S ableitbar. Die Verträglichkeit der akzeptierten logischen Regeln kann dadurch belegt werden, daß die Widerspruchsfreiheit des Systems S bewiesen wird. Der Weg von der sprachlichen Ebene zur Ontologie führt über eine korrekte referentielle Semantik für S. In einer modelltheoretischen Interpretation werden den nicht-logischen Zeichen der formalen Sprache mengentheoretische Objekte zugewiesen. Aus der Struktur der mengentheoretischen Objekte können dann Rückschlüsse auf die Wirklichkeit gezogen werden, insbesondere darüber, welche Eigenschaften es (in einem noch zu erklärenden Sinne) gibt und was ihre Identitätskriterien sind.

Der skizzierte Gedankengang (und die abschließende Behauptung) soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Nehmen wir des Arguments halber an, daß ein einfacher Stufenkalkül die beste Möglichkeit ist, alle relevanten linguistischen Daten zu repräsentieren, die Eigenschaften betreffen; außerdem soll die Standardsemantik als Semantik des Stufenkalküls vorausgesetzt werden. Betrachten wir die Sätze. (a) „Fifi ist braun“, (b) „Fifi ist ein Dackel“ und (c) „Braun ist eine Farbe“. Die formale Repräsentation der Beispielsätze sei dann (a′) ${}^{1}\mathrm{BRA}^{1}(\mathrm{f})$, (b′) ${}^{1}\mathrm{DAC}^{1}(\mathrm{f})$ und (c′) ${}^{2}\mathrm{FARB}^{1}({}^{1}\mathrm{BRA}^{1})$, wobei f eine Individuenkonstante, ${}^{1}\mathrm{BRA}^{1}$ und ${}^{1}\mathrm{DAC}^{1}$ einstellige Prädikatenkonstanten erster Stufe und ${}^{2}\mathrm{FARB}^{1}$ eine einstellige Prädikatenkonstante zweiter Stufe ist. In einem Standardmodell für den Stufenkalkül wird durch die Interpretationsfunktion I einer Individuenkonstante ein Element des Individuenbereichs, einer einstelligen Prädikatenkonstante erster Stufe eine Teilmenge des Individuenbereichs und einer einstelligen Prädikatenkonstante zweiter Stufe eine Menge von Teilmengen des Individuenbereichs zugewiesen. Es sei I(f) = **f**, I(^{1}BRA^1) = **BRA**, I(^{1}DAC^1) = **DAC** und I(^{2}FARB^1) = **FARB**. Die These einer formalen Eigenschaftstheorie (der zweiten Art) besteht nun darin, daß, wenn der Stufenkalkül die relevanten linguistischen Daten am besten repräsentiert, die Natur der Eigenschaften sich enthüllen läßt, indem man die mengentheoretischen Konstrukte betrachtet, die zur Interpretation der syntaktischen Einheiten des Stufenkalküls dienen, die diejenigen Ausdrücke aus der natürlichen Sprache repräsentieren, mit denen wir Eigenschaften prädizieren und auf Eigenschaften referieren. In unserem Beispiel würde man daher unter anderem folgende Lehren ziehen können: (i) Adjektive und Common Nouns referieren auf dieselben Entitäten, denn „x_1 ist ein Dackel" und „x_1 ist braun" werden in der Sprache des Stufenkalküls durch dieselbe Art von Konstanten repräsentiert und daher in der Semantik durch denselben Typ von mengentheoretischen Objekten dargestellt. (ii) Es gibt eine Hierarchie der Eigenschaften, die sich in der Hierarchie der Sprache des Stufenkalküls und ihrer entsprechenden semantischen Objekte widerspiegelt. (iii) In prädikativen Verwendungen von Adjektiven wird auf dieselbe Entität referiert wie in nominalisierten Verwendungen, denn die Ausdrücke „x_1 ist braun" und „Braun" werden semantisch durch dieselbe Menge repräsentiert. (iv) Die Eigenschaft F_1 und die Eigenschaft F_2 sind genau dann identisch, wenn alle Individuen die Eigenschaft F_1 genau dann haben, wenn sie die Eigenschaft F_2 haben. Wenn also beispielsweise alle braunen Gegenstände Dackel sind und alle Dackel braun sind, dann gilt **BRA** = **DAC**, folglich werden ^{1}BRA^1 und ^{1}DAC^1 durch I auf dieselbe Weise interpretiert. (v) Jede beliebige Menge von Gegenständen entspricht einer und zwar genau einer Eigenschaft. Daraus folgt insbesondere, daß es zu jedem komplexen Prädikat wie „x_1 ist ein Dackel und x_1 ist braun" eine entsprechende Eigenschaft gibt.

Abbildung 2



Das Vorgehen in formalen Eigenschaftstheorien (der zweiten Art) wird in Abbildung II schematisch dargestellt. Meines Erachtens ist dieser philosophische Ansatz höchst problematisch. Bereits die Grundannahme, daß die Art und Weise wie wir über die Welt reden, die Struktur der Welt widerspiegelt und deshalb durch die Reflexion auf die natürlichen Sprachen Rückschlüsse auf ontologische Fragestellungen möglich seien, erscheint mir begründungsbedürftig. Aber selbst wenn man diese These des Arguments wegen akzeptiert, funktioniert der methodologische Ansatz von formalen Eigenschaftstheorien nicht, weil die Ontologie durch die linguistischen Daten ‚unterbestimmt' ist. Wie bereits in der Einleitung angesprochen wurde,[121] gibt es für einen Logiker beziehungsweise formalen Ontologen

[121] Siehe Seite 9.

immer Grenzfälle bei der Beantwortung der Frage, was als relevante linguistische Daten zählt und was nicht. Dieser Spielraum überträgt sich und potenziert sich bei der Wahl einer geeigneten formalen Sprache und eines geeigneten Axiomensystem, weil es durchaus möglich ist, denselben linguistischen Daten durch unterschiedliche formale Sprachen und durch unterschiedliche Axiomensysteme gerecht zu werden. Beispielsweise unterscheiden sich bestimmte Modallogiken nur durch die Behandlung von iterierten Notwendigkeits- und Möglichkeitsoperatoren. Diese Systeme werden den linguistischen Daten alle gleich gut oder gleich schlecht gerecht, weil iterierte Modalitäten in den natürlichen Sprachen de facto keine Rolle spielen und deshalb die Sprecher der natürlichen Sprachen keine Intuitionen darüber haben, wie man die Worte „notwendig“ und „möglich“ in diesen Fällen gebraucht. Während sich noch einigermaßen gesichert feststellen läßt, was relevante linguistische Daten sind, und diese die Möglichkeiten, die formale Sprache und die Ableitungsrelation zu gestalten, stark einschränken, ist beim Aufbau einer Semantik der formalen Phantasie eines Logikers beziehungsweise Ontologen kaum eine Grenze gesetzt. Das einzige Kriterium für eine angemessene Semantik ist aus dem Blickwinkel eines Vertreters einer formalen Eigenschaftstheorie, daß jedes Theorem des aufgestellten Axiomensystems auch eine Tautologie sein sollte. Daß das Axiomensystem auch vollständig in bezug auf die Semantik ist, kann von ihm nicht gefordert werden; denn die referentielle Semantik soll Rückschlüsse auf die Realität erlauben, und es wäre möglich, daß die logisch wahren Aussagen über Eigenschaften (verstanden als Bestandteile der Realität) nicht vollständig axiomatisierbar sind. Faßt man beispielsweise den Stufenkalkül mit Standardsemantik und den Stufenkalkül mit Henkin-Semantik als formale Theorien von Eigenschaften auf, dann läßt sich nicht bestimmen, welche von beiden die bessere ist, weil das Axiomensystem korrekt in bezug auf die beiden Semantiken ist.

Dadurch, daß so viel Spielraum bei der Konstruktion von Semantiken zu gegebenen axiomatischen Systemen besteht, ist jeder Vertreter einer formalen Eigenschaftstheorie (der zweiten Art) an dieser Stelle zu einer letztlich willkürlichen (oder von vorher formulierten philosophischen Positionen abhängigen) Entscheidung gezwungen. Das Ziel, etwas über die ontologische Struktur der Wirklichkeit über eine durch die Reflexion auf sprachliches Material gewonnene formale Eigenschaftstheorie herauszufinden, läßt sich deshalb nicht verwirklichen. Dies ist insbesondere deshalb der Fall, weil die beiden zentralen ontologischen Fragen „Welche Eigenschaften gibt es?" und „Was sind die Identitätskriterien für Eigenschaften?" sich durch die Besinnung auf linguistische Daten kaum klären lassen. Die erste Frage hängt mit dem Comprehensionsaxiom zusammen, das im dritten Abschnitt des nächsten Kapitels ausführlich diskutiert werden wird.

Die Frage nach Identitätskriterien von Eigenschaften ist notorisch umstritten. Einige Philosophen, insbesondere Quine, kommen zu dem Ergebnis, daß die Identitätskriterien von Eigenschaften so hoffnungslos unklar sind, das es besser ist, auf die Art von Entitäten zu Gunsten von Mengen zu verzichten, weil zwei Mengen genau dann identisch sind, wenn sie dieselben Elemente besitzen, und daher ein klares Identitätskriterium vorliegt. Wenn man diese Position aus einem anderen Blickwinkel betrachtet, dann erkennen diese Philosophen die Existenz von Eigenschaften an (sie nennen sie bloß „Mengen") und behaupten, daß zwei Eigenschaften genau dann identisch sind, wenn sie extensionsgleich sind. Die Gegenposition besteht darin, Eigenschaften als ‚intensionale Entitäten' aufzufassen, was an dieser Stelle nicht mehr bedeuten soll, als daß zwei verschiedene Eigenschaften extensionsgleich sein können. Philosophen, die diese Position vertreten, berufen sich darauf, daß es kontraintuitiv sei, daß zwei Eigenschaften identisch sein sollen, bloß weil sie zufällig auf dieselben Gegenstände zutreffen. Wenn beispielsweise die Eigenschaft, ein römischer Eroberer Galliens zu sein, und die Eigenschaft, der Adoptivvater von Brutus zu sein, dieselbe Extension haben, dann bedeute dies nicht, daß es sich um dieselbe Eigenschaft handelt. Ein Vorschlag für ein nicht-extensionales Identitätskriterium lautet, daß zwei Eigenschaften identisch seien, wenn sie notwendig dieselbe Extension besitzen. Dieses sogenannte ‚grobkörnige' intensionale Identitätskriterium wird oft in prädikatenlogischen Modallogiken, insbesondere in der Montague-Semantik verwendet. In diesem System ist eine Eigenschaft eine Funktion von möglichen Welten in Mengen von Gegenständen. Da es mögliche Welten gibt, in denen der Adoptivvater von Brutus kein Eroberer Galliens ist, unterscheiden sich die beiden Beispieleigenschaften nach diesem Ansatz. Identisch sind jedoch auch nach diesem Ansatz die Eigenschaft, ein Dackel zu sein und braun zu sein, und die Eigenschaft, braun zu sein und ein Dackel zu sein, weil die Aussagen „k ist ein Dackel und k ist braun" und „k ist braun und k ist ein Dackel" logisch äquivalent und die entsprechenden Eigenschaften daher notwendig extensionsgleich sind. Um zwischen diesen beiden Eigenschaften unterscheiden zu können, besteht die Möglichkeit, bei komplexen Eigenschaften neben der notwendigen Extensionsgleichheit ihren Aufbau als Identitätskriterium zu berücksichtigen. Eines noch feinkörnigeren intensionalen Identitätskriteriums bedarf es, wenn man die Eigenschaft, ein gleichseitiges Dreieck zu sein, und die Eigenschaft, ein gleichwinkliges Dreieck zu sein, als nicht-identisch einstufen möchte, obwohl es sich um atomare Eigenschaften handelt, die aus mathematischen Gründen notwendig extensionsgleich sind. Die Intuition, daß die Prädikate „x_1 ist gleichwinklig" und „x_1 ist gleichseitig" unterschiedliche Eigenschaften ausdrücken, während beispielsweise „x_1 ist ein Metzger" und „x_1 ist ein Fleischer" dieselbe Eigenschaft ausdrücken, hängt offenbar mit Intuitionen über die ‚Synonymität' von Prädikaten zusammen. ‚Synonymität' der Prädikate wäre natürlich ein sehr feinkörniges Kriterium für die Identität der ausgedrückten Eigenschaften, allerdings hinge die Brauchbarkeit dieses Kriteriums von einer zufriedenstellenden Explikation von „Synonymität" ab.

Während die Entscheidung zwischen einer extensionalen und einer intensionalen Auffassung leicht fällt, wenn man die Art und Weise, wie Menschen reden, als Entscheidungskriterium akzeptiert, ist es deutlich schwerer, anhand von linguistischen Daten abzuschätzen, wie feinkörnig man die Identitätskriterien von Eigenschaften gestalten sollte. Es spricht vieles dafür, daß wir in den natürlichen Sprachen je nach Kontext grobkörnige wie feinkörnige Identitätskriterien verwenden, vielleicht ist es deshalb sinnvoll, sie wie Bealer und Mönnich nebeneinanderzustellen.[122] Neben notwendiger Extensionsgleichheit, notwendiger Extensionsgleichheit plus Strukturgleichheit und ‚Synonymie' gibt es – wenigstens auf den ersten Blick – einen weiteren Identitätsbegriff, auf den Putnam aufmerksam gemacht hat.[123] Beispielsweise ist die Eigenschaft, eine bestimmte Temperatur zu haben, identisch mit der Eigenschaft, eine bestimmte molekulare Energie zu haben. Identitätsaussagen dieser Art dienen dazu, (innerhalb von Theorien) bestimmte Eigenschaften auf andere zu reduzieren. Offenbar handelt es sich nicht um einen Fall von ‚Synonymie'; denn es bedarf empirischer Untersuchungen, um zu dieser Identitätsaussage zu kommen. Aus demselben Grund scheint es sich nicht um eine notwendige Extensionsgleichheit zu handeln – schließlich waren die bisher betrachteten Beispiele aufgrund von logischen oder mathematischen Zusammenhängen notwendig extensionsgleich.

Allerdings könnte man darauf verweisen, daß es aufgrund von physikalischen Gesetzen notwendig ist, daß eine bestimmte Temperatur einer bestimmten molekularen Energie entspricht und daß es sich bei Putnams Beispiel deshalb um einen Fall der grobkörnigen intensionalen Identität handelt. Wer sich darauf einläßt, muß dann auch die Eigenschaft, ein Lebewesen mit Nieren zu sein, und die Eigenschaft, ein Lebewesen mit Herz zu sein, miteinander identifizieren, wenn es aufgrund biologischer Gesetze zwingend ist, daß alle Lebewesen mit Nieren auch Herzen besitzen (und

[122] Siehe Bealer und Mönnich (1989).
[123] Siehe Putnam (1969).

umgekehrt). Ob man dies akzeptieren möchte, hängt offenbar damit zusammen, wie man ‚mögliche Welten' auffaßt. Wer nicht zuläßt, daß in ‚möglichen Welten' andere biologische oder physikalische Naturgesetze gelten, für den ist Putnams Beispiel ein weiteres Beispiel für eine Identität aufgrund von notwendiger Extensionsgleichheit. Wenn man allerdings davon ausgeht, daß Naturgesetze in unterschiedlichen möglichen Welten verschieden sein können, dann gibt es mindestens fünf Möglichkeiten, die Identität von Eigenschaften zu analysieren: Als Extensionsgleichheit, als notwendige Extensionsgleichheit, als notwendige Extensionsgleichheit plus Strukturgleichheit, als ‚Synonymie' und als Eigenschafts-Reduktion.

Auch wenn aus den dargestellten Gründen die Motive, aus denen heraus formale Eigenschaftstheorien aufgestellt werden, fragwürdig sind, sind viele der formalen Systeme, die im Rahmen dieser ontologischen Theorien aufgestellt wurden, sehr interessant. Für die vorliegende Arbeit sind besonders Cocchiarellas System T** (und verwandte Systeme)[124] und Castañedas System cP* von Interesse[125], weil sie einige Gemeinsamkeiten mit der – unabhängig von T** und cP* entwickelten – Naiven Prädikatenlogik aufweisen. Die Sprache von T** entsteht aus einer Prädikatenlogik zweiter Stufe, indem die Prädikatenzeichen auch an Argumentstellen zugelassen werden. Die Sprache von cP* unterscheidet darüber hinaus zwischen zwei Formen der Negation (der normalen aussagenlogischen Negation und einer Termnegation) und hat außerdem noch eine doppelte Unterstreichung, um Vorkommen von nicht-nominalisierten Prädikaten von nominalisierten Prädikaten zu unterscheiden. Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen T** und cP* besteht darin, daß Cocchiarella Eigenschaften als Individuen auffaßt, die nicht von den ‚normalen' Individuen (den Gegenständen) getrennt werden. Daher gibt es in T** Quantoren, die über Eigenschaften einer bestimmten Stelligkeit quantifizieren, und Quantoren, die über alle

[124] Siehe insbesondere Cocchiarella (1972), Cocchiarella (1973), Cocchiarella (1975) und Cocchiarella (1978).
[125] Siehe Castañeda (1976).

Individuen (Eigenschaften beliebiger Stelligkeit und Gegenstände) quantifizieren, aber keine Quantoren, mit denen nur über Gegenstände quantifiziert wird. Castañeda hält dagegen Gegenstände und Eigenschaften auseinander; es gibt aus diesem Grund in cP* keinen Quantor, mit dem sowohl über Eigenschaften als auch über Gegenstände quantifiziert wird. Dieser Unterschied spielt eine wichtige Rolle bei der jeweiligen Formulierung des Comprehensionsaxioms in den Systemen.

Sowohl bei T** als auch bei cP* handelt es sich um typenfreie Logiken. Im Unterschied zur Naiven Prädikatenlogik werden sie als Erweiterungen von Prädikatenlogiken zweiter Stufe eingeführt und verfügen nicht über eine Kopula. Vernachlässigt man die Prädikatnegation sowie die (logisch überflüssige) doppelte Unterstreichung der Sprache von cP*, dann unterscheidet sich das logische System, das aus cP* entsteht, wenn man das Comprehensionsaxiom und die Axiome für die Prädikatnegation wegläßt, nur noch marginal von dem Fragment der Naiven Prädikatenlogik, das entsteht, wenn man nur die (Namen von) wohlgeformten Formeln der Naiven Prädikatenlogik berücksichtigt, in denen die Kopula nicht vorkommt. Von T** unterscheidet sich dieses Fragment der Naiven Prädikatenlogik dadurch, daß es in T** keine Quantoren gibt, die nur über Gegenstände quantifizieren, und daß es in der Naiven Prädikatenlogik genauso wie in cP* keinen Quantor gibt, der sowohl über Gegenstände als auch über Eigenschaften quantifiziert. Darüber hinaus unterscheidet sich die Naive Prädikatenlogik sowohl von cP* als auch von T** dadurch, daß die Naive Prädikatenlogik durch eine Wahrheitswertsemantik interpretiert wird, während cP* und T** als formale Eigenschaftstheorien selbstverständlich über referentielle Semantiken interpretiert werden.

Die Unterschiede zwischen der Naiven Prädikatenlogik und cP* beziehungsweise T** lassen sich verkleinern, indem man die Naive Prädikatenlogik erweitert. Castañedas Prädikatnegation kann man in der Naiven

Prädikatenlogik problemlos implementieren, indem man ein entsprechendes Zeichen zur Sprache hinzufügt und die entsprechenden Axiome beziehungsweise Einschränkungen auf Grundbewertungen formuliert. Um sich T** zu nähern, lassen sich neue Variablen zur Naiven Prädikatenlogik hinzufügen, mit denen sowohl über Gegenstände als auch über Eigenschaften quantifiziert werden kann.[126] Interessanter als diese relativ einfachen Modifikationen ist die Frage, ob sich eine referentielle Semantik für die Naive Prädikatenlogik aufstellen läßt, die den Semantiken von cP* und T** entspricht; denn auf diese Weise wird der erste Schritt auf dem Weg zu einer formalen Eigenschaftstheorie vollzogen. Dies ist durchaus möglich:

Ein NPL-Modell $\mathfrak{M}$ ist ein Tupel $<H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots, Ext, I>$, so daß

- $H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots$ nichtleere, paarweise disjunkte Mengen sind;
- Ext eine Funktion ist, so daß Ext(h) ein Element von $\{0, 1\}$ ist, wenn $h \in H_0$; und Ext(h) eine echte Teilmenge der d-ten Cartesischen Potenz der Vereinigungsmenge von $H_{-1}, H_0, H_1, \ldots$ ist, wenn $h \in H_d$ (d>0).
- I eine Funktion ist, so daß für jedes $k \in KON_d$ gilt: $I(k) \in H_d$.

Es sei k^d eine Individuenkonstante und $\mathfrak{M} = <H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots, Ext, I>$ ein NPL-Modell. Ein NPL-Modell $\mathfrak{M}'$ ist eine k^d-Variante von $\mathfrak{M}$ gdw $\mathfrak{M}' = <H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots, Ext, I'>$ und $I'(k') = I(k')$, für alle $k' \neq k^d$.

[126] Es sei x eine solche Variable. Wenn $\forall x\, \mathcal{P}(x, x)$ wohlgeformt wäre, wäre der Wert von $[\![\forall x\, \mathcal{P}(x, x)]\!]_\alpha$ unter anderem von den Werten von Formeln der Form $\mathcal{P}(k^{-1}, k^{-1})$ (bezüglich α) abhängig. Formeln dieser Form sind aber nicht wohlgeformt und werden daher nicht bewertet. Um diese Probleme zu vermeiden, muß die Formeldefinition so getroffen werden, daß eine Variable, mit denen sich sowohl über Eigenschaften als auch über Gegenstände quantifizieren läßt, nicht die Position von prädikativ gebrauchten nominalisierten Prädikaten einnehmen darf. Dies ist im Einklang mit Cocchiarellas Formeldefinition.
Durch diese Modifikation wird der Unterschied zwischen T** beziehungsweise cP* und der Naiven Prädikatenlogik nur etwas verringert, nicht aufgehoben. Denn T** verfügt nicht über die Möglichkeit, nur über Gegenstände zu quantifizieren, und sowohl T** als auch cP* besitzen kein ausgezeichnetes Zeichen für die Kopula.

Eine wff A ist wahr bezüglich eines NPL-Modells $\mathfrak{M} = <H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots, Ext, I>$ (kurz: $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$) genau dann, wenn

- es eine Individuenkonstante F^0 gibt, so daß $A = \mathcal{P}(F^0)$ und $Ext(I(F^0)) = 1$;
- es Individuenkonstanten $k_1, k_2, \ldots, k_d, F^d$ gibt, so daß $A = \mathcal{P}(k_1, \ldots, k_d, F^d)$ und $<I(k_1), \ldots, I(k_d)> \in Ext(I(F^d))$;
- es eine wff B gibt, so daß $A = {\sim}B$ und $[\![B]\!]_{\mathfrak{M}} \neq 1$;
- es wff B, C gibt, so daß $A = B \supset C$ und $[\![B]\!]_{\mathfrak{M}} \neq 1$ oder $[\![C]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$;
- es eine wff B und eine Individuenvariable x^d gibt, so daß $A = \forall x^d\, B$ und für jede k^d-Variante $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ gilt, daß $[\![B[x^d/k^d]]\!]_{\mathfrak{M}'} = 1$, wobei k^d die alphabetisch nächste Individuenkonstante mit dem Superskript d ist, die nicht in A vorkommt.

Eine wff A ist genau dann falsch bezüglich eines NPL-Modells $\mathfrak{M}$ (kurz: $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$), wenn $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} \neq 1$.

M ist *referentiell-semantisch konsistent* genau dann, wenn es ein NPL-Modell $\mathfrak{M}$ gibt, so daß für alle $A \in M$ gilt: $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$. M ist *referentiell-semantisch inkonsistent* genau dann, wenn M nicht referentiell-semantisch konsistent ist. Eine wff A ist eine *referentiell-semantische Konsequenz aus* M (kurz: $M \vDash_{ref} A$) genau dann, wenn $M \cup \{{\sim}A\}$ referentiell-semantisch inkonsistent ist. A ist *referentiell-gültig* (A ist eine *Tautologie*$_{ref}$, $\vDash_{ref} A$) genau dann, wenn $\varnothing \vDash_{ref} A$.

Taufen wir die Logik, die aus der Naiven Prädikatenlogik entsteht, indem die Wahrheitswertsemantik durch die eben vorgestellte referentielle Semantik ersetzt wird, „Referentielle Naive Prädikatenlogik". Es ist instruktiv, die Referentielle Naive Prädikatenlogik des Arguments halber als formale Eigenschaftstheorie aufzufassen und von ihrer referentiellen Semantik auf die ontologische Struktur der Welt zu ‚schließen' – auch wenn diese vermeintlichen Schlußfolgerungen uns aus den oben genannten Gründen selbstverständlich nicht wirklich etwas über die ontologische Struktur der Welt verraten. Was für ontologischen Konsequenzen ‚folgen' aus der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik? Den Aufbau der Modelle der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik kann man wie folgt ontologisch interpretieren: Eigenschaften sind eigenständige Entitäten (die Elemente von H_0, H_1, H_2, usw.), die Extensionen haben, wobei unter „Extension" im Fall der Propositionen ein Wahrheitswert, im Fall der einstelligen Eigenschaften eine Menge von Gegenständen und Eigenschaften und im Fall von mehrstelligen Eigenschaften (Relationen) eine Menge von Tupeln verstanden wird. Bemerkenswert ist, daß die Kopula nicht interpretiert wird und ihr daher kein Objekt in der Welt entspricht. Dies wird der Tatsache gerecht, daß die Kopula die Prädikation syntaktisch markiert und keine Relation ist. Da die Referentielle Naive Prädikatenlogik genauso wie die Naive Prädikatenlogik nicht über ein Identitätszeichen verfügt, wird in dieser Hinsicht durch die Referentielle Naive Prädikatenlogik nichts festgelegt. Wenn man ein Zeichen für die Identität hinzufügt oder eine Eigenschaftskonstante als Identitätsrelation auszeichnet, dann würde die Standardklausel für Gegenstandskonstanten wie folgt lauten:

III(31) $[\![k^{-1}{}_1 = k^{-1}{}_2]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$ genau dann, wenn $I(k^{-1}{}_1) = I(k^{-1}{}_2)$.

Der Aufbau der Semantik der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik legt nahe, III(31) zu III(32) zu verallgemeinern.

III(32) $[\![k^{d}{}_1 = k^{d}{}_2]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$ genau dann, wenn $I(k^{d}{}_1) = I(k^{d}{}_2)$, für ein beliebiges d.

Wählt man III(32), dann ist es nicht ausgeschlossen, daß zwei Eigenschaften extensionsgleich, aber nicht identisch sind. Extensionsgleichheit führt also in der um III(32) erweiterten Referentiellen Naiven Prädikatenlogik nicht zur Identität. Wenn man Extensionsgleichheit als Identitätskriterium für Eigenschaften anstrebt, dann bietet es sich an, die Definition von „NPL-Modell" so zu verändern, daß verschiedenen Elementen einer Menge H_n

($n \geq 0$) verschiedene Extensionen zugewiesen werden. Dies kann durch folgende Ergänzung geschehen:

III(33) Wenn $h_1, h_2 \in H_n$ ($n \geq 0$) und $Ext(h_1) = Ext(h_2)$, dann $h_1 = h_2$.

Die Frage, welche Eigenschaften es gibt, wird durch die Referentielle Naive Prädikatenlogik kaum beantwortet, weil es wie in der Naiven Prädikatenlogik kein Comprehensionsaxiom und deshalb keine entsprechenden Festlegungen in der Semantik gibt. Allerdings wird beim Aufbau der Modelle vorausgesetzt, daß H_0, H_1, H_2, … nicht leer sind. Faßt man die Modelle der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik als Modelle der Wirklichkeit auf, dann gibt es für jede natürliche Zahl n mindestens eine n-stellige Relation in der Welt.

Obwohl die Referentielle Naive Prädikatenlogik, wenn man sie als formale Eigenschaftstheorie auffaßt, etwas über die Struktur von Eigenschaften aussagt, erweitert um III(32) auch eine Identitätsbedingung angibt und sogar ein bißchen etwas darüber verrät, welche Eigenschaften es gibt, wird die Frage „Was sind Eigenschaften?“ durch die Referentielle Naive Prädikatenlogik genauso wenig wie durch die von Cocchiarella (oder anderen Autoren) betrachteten Systeme beantwortet. Denn was Eigenschaften sind, hängt offenbar davon ab, aus welchen Elementen die Mengen H_0, H_1, H_2, … gebildet sind. Durch den Aufbau der Semantik wird dies nicht festgelegt, es können linguistische Entitäten, mentale oder abstrakte Entitäten sein; selbst daß die Elemente einer Menge zu den verschiedenen Arten von Entitäten gehören, ist nicht ausgeschlossen. Auch über die „Existenz“ der Elemente von H_0, H_1, H_2, … wird durch die Referentielle Naive Prädikatenlogik nichts ausgesagt, denn die Elemente dieser Mengen können Possibilia sein. In diesem Fall würde beispielsweise nicht nur über die faktisch vorhandenen Prädikate beziehungsweise Begriffe, sondern über alle möglichen bildbaren Prädikate beziehungsweise konstruierbaren Begriffe quantifiziert werden.

Damit behaupte ich selbstverständlich, daß unter jeder der angedeuteten Interpretationen der Mengen H_0, H_1, H_2, … aus der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik eine akzeptable nominalistische, konzeptualistische oder realistische Theorie der Eigenschaften wird.[127] Worauf aufmerksam gemacht werden sollte, war die Tatsache, daß weder durch die Axiome noch durch die Semantik der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik festgelegt wird, welche Art von Entitäten Eigenschaften sind. Da dasselbe auf die von Cocchiarella betrachteten formalen Systeme (und ihre Semantiken) zutrifft, wird der wichtigste Unterschied zwischen den verschiedenen ontologischen Positionen gar nicht durch die formalen Systeme erfaßt. Dies stützt die oben geäußerte Vermutung, daß Cocchiarellas Projekt, die verschiedenen, mit ontologischen Positionen assoziierten formalen Systeme zu vergleichen, nicht zu Erkenntnissen über die verschiedenen ontologischen Positionen führt und Cocchiarellas Ansatz philosophisch unergiebig ist.

[127] Ebenfalls soll nicht impliziert werden, daß zu jeder ontologischen Position eine Semantik in der vorgestellten Form passen würde. Beispielsweise könnte es Realisten stören, daß in der Referentiellen Naiven Prädikatenlogik die Menge der Eigenschaften nicht dieselbe Kardinalität wie die Potenzmenge der Menge der Individuen hat. Das ergibt sich wie folgt: Angenommen, die Menge der Eigenschaften hätte dieselbe Kardinalität wie die Potenzmenge der Menge der Individuen. Betrachten wir einen Fall, in dem die Menge der Individuen abzählbar unendlich ist. Aus der Voraussetzung folgt dann, daß die Menge der Eigenschaften überabzählbar ist. Da aber die Menge der Eigenschaften eine Teilmenge der Menge der Individuen ist, ist die Menge der Individuen (mindestens) überabzählbar. Widerspruch.

IV Paradoxien

„Der Geist des Widerspruchs und die Lust zum Paradoxen steckt in uns allen."

J. W. von Goethe

Dichtung und Wahrheit

1 Was ist ein Paradox?

Da die Naive Prädikatenlogik widerspruchsfrei ist, lassen sich weder das Russell-Paradox noch das Grelling-Paradox in der Naiven Prädikatenlogik konstruieren. In diesem Kapitel steht die Frage im Zentrum, weshalb dies der Fall ist, obwohl es die Naive Prädikatenlogik erlaubt, über Eigenschaften zu quantifizieren, ohne daß eine Typenhierarchie zur Paradoxien-Prävention in die Syntax der Naiven Prädikatenlogik eingebaut ist. Vor der Beschäftigung damit, weshalb diese Paradoxien nicht in der Naiven Prädikatenlogik auftreten, scheint es angebracht zu sein, sich kurz mit der Frage zu beschäftigen, was ein Paradox ist. In der Literatur ist nicht umstritten, daß das Russell-Paradox und das Grelling-Paradox Beispiele für *Paradoxien* sind. Und sogar die Einteilung der Paradoxien in logische Paradoxien und semantische Paradoxien wird weitgehend akzeptiert. Doch obwohl Einigkeit über die (prototypischen) Beispiele für Paradoxien besteht, gehen die Meinungen, was ein Paradox als Paradox auszeichnet, überraschend auseinander.

Von Basson wird vorgeschlagen, das Prädikat „x_1 ist paradox" (für „x_1" können sprachliche Ausdrücke eingesetzt werden) als „es gibt sehr plausible

Aussagen über x_1, und diese Aussagen sind inkonsistent“ aufzufassen.[128] Grossmann behauptet, daß ein Paradox eine definite Deskription ist, von der wir überzeugt sind, daß sie erfüllt ist, und die zu einem Widerspruch führt.[129] Im Geiste Grellings ist folgende Definition: Ein Paradox ist ein Widerspruch, der aus Prämissen abgeleitet werden kann, die analytisch wahr sind oder aus den Axiomen der Logik folgen.[130] Dagegen ist für Beth eine Aussage A paradox, wenn sie in einem logischen System S beweisbar ist und aus A in S ein Widerspruch ableitbar ist.[131]

Allen vier Vorschlägen ist gemeinsam, daß ein Paradox in irgendeiner Weise mit dem Auftreten eines Widerspruchs beziehungsweise einer Inkonsistenz zusammenhängt. Doch bereits die Frage, was ‚der Träger‘ des Widerspruchs ist, wird unterschiedlich beantwortet. Basson spezifiziert zwar nicht ausdrücklich, was für sprachliche Ausdrücke als Werte für die Variable x_1 in Frage kommen, aber aus dem Kontext geht hervor, daß es sich um Aussagen handelt. Während also für Basson Aussagen paradox sind, sind es bei Grossmann definite Deskriptionen. In beiden Fällen handelt es sich um Ausdrücke der natürlichen Sprachen, die paradox sind. „Paradox“ wird von Basson und Grossmann also nicht in bezug auf formale Systeme verstanden. Im Gegensatz dazu ist für Beth ein paradoxer Ausdruck eine Formel eines bestimmten formalen Systems, denn nur Formeln, aber nicht natürlichsprachliche Ausdrücke sind in einem formalen System beweisbar. Der

---

[128] Vgl. Basson (1960), S. 26.
[129] Vgl. Grossmann (1972), S. 153 und S. 156.
[130] Diese Formulierung entspricht nicht dem Wortlaut Grellings, der lautet: „[…] when the premises are analytical, i.e., when they follow from the axioms of logic“ (Grelling (1936), S. 482). Die Unterscheidung zwischen den beiden Kriterien ist in Grellings Sinn, weil er im weiteren Text die ‚Prämissen‘ des Lügner-Paradoxes und des Grelling-Paradoxes als „analytisch“ bezeichnet, ohne sich auf formale Systeme zu beziehen, in denen diese ‚Prämissen‘ aus den Axiomen ableitbar sind.
Etwas verwirrend ist, daß sowohl das Lügner-Paradox als auch das Grelling-Paradox sowie das Russell-Paradox von Grelling als „logische Paradoxien“ bezeichnet werden. Grelling verwendet den Ausdruck nicht als Gegenstück zu „semantisches Paradox“, sondern als Überbegriff.
[131] Mit anderen Worten liegt nach Beth ein Paradox vor, wenn ein Widerspruch in S beweisbar ist. (Es werden Definitionen von „beweisbar“ und „ableitbar“ vorausgesetzt, die denen in Abschnitt 5 von Kapitel III entsprechen.) Vgl. Beth (1936).

‚Träger' des Paradoxes ist in diesem Fall nicht die Formel, sondern das formale System, dessen Axiome und Schlußregeln den Beweis eines Widerspruchs ermöglichen. Grellings Vorschlag ist etwas unklar: Einerseits spricht er von „Axiomen", dies verweist auf ein logisches System. Andererseits bezieht sich die erste Hälfte dieses Vorschlages auf Prämissen, die in einer natürlichen Sprache formuliert sind. Das geht daraus hervor, daß das Prädikat „x_1 ist analytisch" (normalerweise) auf Ausdrücke der natürlichen Sprache und nicht auf Formeln angewendet wird und daß Grelling in seinem Artikel Paradoxien ohne die Verwendung von formalen Sprachen herleitet.

Bassons Explikation von „x_1 ist paradox" ist zu weit. Wenn vor Gericht ein sehr vertrauenswürdiger Zeuge über eine Aussage A behauptet, daß A wahr ist, ein anderer sehr vertrauenswürdiger Zeuge über die Aussage A behauptet, daß A falsch ist, und keine weiteren Umstände für oder gegen die Wahrheit von A sprechen, dann liegen zwei sehr plausible, inkonsistente Aussagen über A vor, ohne daß man von einem Paradox sprechen würde. Der Grund dafür liegt darin, daß sich der Widerspruch bei einem Paradox nicht aufgrund von Zeugenaussagen oder ähnlichen Indizien, sondern aufgrund von logischen Überlegungen aus A ergeben muß. Außerdem muß beachtet werden, daß wenn der Widerspruch aus A abgeleitet wird und A außerdem eine ‚gewöhnliche' Aussage ist, dies ein indirekter Beweis für ~A ist. Daß der Widerspruch aufgrund von logischen Überlegungen resultieren muß und daß A dann keine ‚gewöhnliche' Aussage sein darf, wird von Beth berücksichtigt, indem er fordert, daß A eine in einem System S beweisbare Aussage und der Widerspruch aus A in S ableitbar ist. Gegen Beths Vorschlag spricht aber, daß die Relativierung von „Paradox" auf logische Systeme künstlich ist. Erstens haben sich Philosophen und Logiker beispielsweise mit dem Lügner-Paradox beschäftigt, bevor logische Systeme entwickelt wurden. Zweitens kann man viele Paradoxien darstellen, ohne die Hilfsmittel einer formalen Sprache zu verwenden. Und drittens lassen sich problemlos logische Systeme aufstellen, in denen ein Widerspruch beweisbar ist (beispielsweise indem man das Axiomenschema $A \wedge \sim A$ zu einem bekannten logischen System hinzufügt), ohne daß man deswegen von einem Paradox sprechen würde.

Will man dem Rechnung tragen, lassen sich die beiden Positionen wie folgt zu einem Basson-Beth-Vorschlag mischen:

IV(1) Eine natürlichsprachliche Aussage A ist paradox, wenn A aus logischen Gründen gilt (oder wenigstens zu gelten scheint) und sich aus A durch logisches Schließen ein Widerspruch herleiten läßt (oder wenigstens herleitbar zu sein scheint).

Faßt man „paradox“ wie in IV(1) auf, dann ergibt sich unmittelbar, weshalb Paradoxien für Logiker interessant sind. Es ist eine Aufgabe der Logiker, die Ausdrücke „logisch wahr“, „logisches Schließen“, „Widerspruch“ usw. zu explizieren. Das Knifflige (und Spannende) an einer paradoxen Aussage A besteht darin, ein widerspruchsfreies logisches System S zu entwickeln, in dem sich A und das Argument, das zu dem Widerspruch führt, formal repräsentieren lassen. Ferner soll S nach Möglichkeit so aufgebaut sein, daß eine wohlgeformte Formel B aus einer Menge von wohlgeformten Formeln M genau dann ableitbar ist, wenn jede natürlichsprachliche Aussage, die durch B in S repräsentiert werden kann, durch ein intuitiv logisch korrektes Argument aus einer Menge von Annahmen folgt, die durch die Menge M in S repräsentiert werden kann. Hat man ein solches System S konstruiert, dann kann man – hier kommt der normative Zug der Logik ins Spiel – das System S als Maßstab dafür nehmen, ob ein Argument wirklich korrekt ist, indem man die Repräsentation des Arguments in S und die Ableitbarkeitsbeziehung von S betrachtet. Aufgrund der Widerspruchsfreiheit von S ist es nicht möglich, daß die formale Repräsentation B von der natürlichsprachlichen Aussage A ein Theorem ist und außerdem aus B in S ein Widerspruch ableitbar ist, daher kann man anhand von S feststellen, wo der logische Fehler bei der Herleitung des Paradoxes lag – das Paradox ist *gelöst*. Das Problem liegt darin, daß die bei der Herleitung des Paradoxes angestellten logischen Überlegungen alle – wenigstens auf den ersten Blick – intuitiv korrekt sind, sonst gäbe es kein Paradox. Aus diesem Grund wird das konstruierte System S in der Regel nicht alle intuitiv korrekten logischen Überlegungen auch als korrekt ausweisen. Eine Lösung des Paradoxes ist einerseits um so besser, je weniger die Ableitungsrelation von den vorhandenen Intuitionen der Sprecher abweicht. Andererseits ist es wünschenswert, Gründe dafür angeben zu können, weshalb eine bestimmte, intuitiv korrekte logische Überlegung als fehlerhaft verworfen werden soll, die über das Ziel hinausgehen, ein Paradox zu vermeiden.

Faßt man das Prädikat „x_1 ist paradox“ gemäß des Basson-Beth-Vorschlages auf, dann läßt sich also der Zusammenhang zwischen der natürlichen Sprache und denjenigen logischen Systemen gut erfassen, die von Logikern benutzt werden, um die natürlichen Sprachen (unter bestimmten Aspekten) zu untersuchen. Dennoch ist der Basson-Beth-Vorschlag verbesserungsbedürftig, weil es typische Beispiele für Paradoxien gibt, die das Kriterium in IV(1) nicht erfüllen. Dies gilt nicht für das Russell-Paradox, denn IV(2) ist eine paradoxe Aussage, weil A aus logischen Gründen gilt oder wenigstens zu gelten scheint und sich aus IV(2) aussagenlogisch ein Widerspruch herleiten läßt.[132]

IV(2) Die Russell-Eigenschaft hat die Russell-Eigenschaft genau dann, wenn es nicht der Fall ist, daß die Russell-Eigenschaft die Russell-Eigenschaft hat.

IV(3) Die Aussage in der nächsten Zeile ist wahr.

IV(4) Die Aussage in der letzten Zeile ist falsch.

Aber IV(3) und IV(4) ergeben zusammen eine Version des Lügner-Paradoxes, die nicht das Basson-Beth-Kriterium für ein Paradox erfüllen.

---

[132] Vgl. Abschnitt 6 von Kapitel II.

Eine Version des Lügner-Paradoxes

(i) IV(4) ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist, die in der Zeile steht, die der Zeile unmittelbar vorhergeht, in der IV(4) steht.

(ii) IV(3) ist die Aussage, die in der Zeile steht, die der Zeile unmittelbar vorhergeht, in der IV(4) steht.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt, daß IV(4) genau dann wahr ist, wenn IV(3) falsch ist.

(iv) IV(3) ist genau dann wahr, wenn die Aussage wahr ist, die in der Zeile steht, die unmittelbar auf die Zeile folgt, in der IV(3) steht.

(v) IV(4) ist die Aussage, die in der Zeile steht, die unmittelbar auf die Zeile folgt, in der IV(3) steht.

(vi) Aus (iv) und (v) folgt, daß IV(3) genau dann wahr ist, wenn IV(4) wahr ist.

(vii) Angenommen, IV(4) ist wahr.

(viii) Aufgrund von (iii) und (vii) ist IV(3) falsch.

(ix) Aus (viii) und (vi) folgt, daß IV(4) falsch ist. Das widerspricht der Annahme (vii).

(x) Angenommen, IV(4) ist falsch.

(xi) Aus (iii) und (x) folgt, daß IV(3) wahr ist.

(xii) Aus (vi) und (xi) folgt, daß IV(4) wahr ist. Das widerspricht der Annahme (x).

Es geht an dieser Stelle nicht darum, wie sich das so formulierte Lügner-Paradox lösen läßt; wichtig ist allein, daß es sich um ein typisches Beispiel für ein Paradox handelt. Dennoch würde die aus IV(3) und IV(4) bestehende Version des Lügner-Paradoxes aus (mindestens) drei Gründen gemäß den Kriterien des Basson-Beth-Vorschlages nicht als Paradox zählen. Erstens bezieht sich das Prädikat „x_1 ist paradox“ gemäß des Basson-Beth-Vorschlages auf eine Aussage, aber weder IV(3) noch IV(4) sind für sich alleine paradox. IV(1) muß also so modifiziert werden, daß das Prädikat „x_1 ist paradox" für Mengen von Aussagen definiert ist. Zweitens – und das ist ein wesentlich interessanterer Punkt – handelt es sich bei IV(3) und IV(4) offenbar um kontingente Aussagen, denn es könnten in den Zeilen, auf die sie sich beziehen, beliebige Aussagen stehen. Dies läßt sich nicht mit dem Basson-Beth-Standpunkt vereinbaren, gemäß dem der Ausgangspunkt eines Paradoxes eine Aussage ist, die aus logischen Gründen gilt (oder wenigstens scheinbar gilt). Diese Forderung ist offenbar zu restriktiv. Dem versucht Grelling gerecht zu werden, indem er auch analytisch wahre Aussagen zuläßt. Dies könnte ein sinnvoller Schritt sein, leider hilft er im Fall dieser Version des Lügner-Paradoxes nicht weiter, weil IV(3) und IV(4) als kontingente Aussagen nicht analytisch sind.[133] Obwohl IV(3) und IV(4) weder aus logischen Gründen gelten noch analytisch sind, führen die aus IV(3) und IV(4) hergeleiteten Widersprüche nicht zu einem indirekten Beweis für die Negation einer der beiden Aussagen, sondern zu einem Paradox. Dies ist der Fall, weil sich sowohl unter der Annahme, daß IV(4) wahr ist, als auch unter der Annahme, daß IV(4) falsch ist, ein Widerspruch erzeugen läßt. Im Gegensatz zum Russell-Paradox, das erzeugt wird, indem man aus der (scheinbaren) logischen Wahrheit IV(2) einen Widerspruch herleitet, wird also das Lügner-Paradox durch kontingente Aussagen hervorgerufen, indem man Wahrheitswertbelegungen der Aussagen betrachtet. Die Klausel, gemäß der ein Paradox nur vorliegt, wenn die zugrundeliegende Aussage aus logischen Gründen gilt (oder zu gelten scheint), muß also gestrichen werden.

Der dritte Grund, weshalb die vorgestellte Version des Lügner-Paradoxes das Basson-Beth-Kriterium nicht erfüllt, hängt mit dem zweiten zusammen: Der Widerspruch aus IV(3) und IV(4) ergibt sich nicht allein aufgrund von logischen Überlegungen, denn bei (ii) und (v) handelt es sich um kontin-

[133] Aus mir nicht verständlichen Gründen scheint Grelling Aussagen wie IV(3) und IV(4) für analytisch zu halten. Vgl. Grelling (1936), S. 482f.

gente Aussagen, die nicht aus IV(3), IV(4) und den vorhergehenden Zeilen des Beweises folgen.[134] An dieser Stelle wird deutlich, daß Grossmann mit Recht auf die große Bedeutung definiter Deskriptionen für Paradoxien hinweist. Auch wenn sich die Widersprüche nicht nur aufgrund von logischen Überlegungen überlegen, kann das Paradox nicht dadurch gelöst werden, daß man einfach (ii) und (v) als falsch verwirft– denn (ii) und (v) sind aufgrund der Wahl der definiten Deskriptionen in IV(3) und IV(4) evident.

Um den genannten Problemen gerecht zu werden, schlage ich folgendes Verständnis von „x_1 ist paradox“ vor:

IV(5) Es sei M eine endliche Menge natürlichsprachlicher Aussagen A_1, A_2, …, A_n. Ferner sei M° die Menge der Mengen M′, für die gilt: $M' = \{A_1', A_2', \ldots, A_n'\}$, wobei A_m' ($1 \leq m \leq n$) entweder A_m ist oder A_m' die Verneinung von A_m (kurz: nicht-A_m) ist .

M ist genau dann paradox, wenn sich aus jedem Element von M° zusammen mit zusätzlichen Prämissen, die aufgrund von den in den Elementen von M vorkommenden definiten Deskriptionen (oder ähnlichen Gründen) evidenterweise wahr sind, durch logische Überlegungen ein Widerspruch herleiten läßt (oder wenigstens herleitbar zu sein scheint).

Wenden wir die Definition IV(5) auf M = {IV(3), IV(4)} an. Definitionsgemäß gilt M° = {{IV(3), IV(4)}, {IV(3), nicht-IV(4)}, {nicht-IV(3), IV(4)}, {nicht-IV(3), nicht-IV(4)}}. In den Zeilen (i)-(ix) wird die Annahme IV(4) mit Hilfe von Prämissen, die aufgrund von in M vorkommenden definiten Deskriptionen evident sind, durch logische Überlegungen

[134] Ob (i) und (iv) aus IV(3) und IV(4) folgen oder nicht, ist für das Argument nicht wichtig und kann deshalb offen gelassen werden.

(wenigstens scheinbar) zu einem Widerspruch geführt. Damit wurde für die Mengen {IV(3), IV(4)} und {nicht-IV(3), IV(4)} gezeigt, daß sich aus ihnen und den entsprechenden evidenten Prämissen ein Widerspruch herleiten läßt. Dasselbe wird für die Mengen {IV(3), nicht-IV(4)} und {nicht-IV(3), nicht-IV(4)} durch die Annahme von nicht-IV(4) in Zeile (x) und den Zeilen (i)-(vi), (xi) sowie (xii) geleistet. Da sich also aus jedem Element von M° zusammen mit zusätzlichen Prämissen, die aufgrund von den in den Elementen von M vorkommenden definiten Deskriptionen evident sind, durch logische Überlegungen ein Widerspruch herleiten läßt (oder wenigstens herleitbar zu sein scheint), ist {IV(3), IV(4)} gemäß der Definition IV(5) paradox.

Es läßt sich ferner zeigen, daß IV(5) eine ‚konservative' Erweiterung des Basson-Beth-Vorschlages ist, denn es gilt folgender Zusammenhang: Wenn A gemäß Definition IV(1) paradox ist, dann ist {A} gemäß IV(5) paradox:[135]

Angenommen, A ist gemäß Definition IV(1) paradox. Dann gilt A aus logischen Gründen (oder scheint wenigstens aus logischen Gründen zu gelten), und es läßt sich aus A durch logisches Schließen ein Widerspruch herleiten (oder wenigstens scheint es so). Letzteres ist eine abkürzende Redeweise dafür, daß sich aus {A} (wenigstens scheinbar) ein Widerspruch herleiten läßt. Da A aus logischen Gründen gilt (oder wenigstens zu gelten scheint), ergibt sich aus der Annahmemenge {nicht-A} unmittelbar ein (wenigstens scheinbarer) Widerspruch. Folglich gilt für jedes Element M′ von M° = {{A}, {nicht-A}}, daß sich durch logische Überlegungen ein Widerspruch aus M′ herleiten läßt (oder wenigstens herleitbar zu sein scheint). Folglich ist gemäß Definition IV(5) die Menge M = {A} paradox. Q.E.D.

[135] Da IV(2) – wie oben gezeigt – gemäß IV(1) paradox ist, folgt, daß {IV(2)} gemäß IV(5) paradox ist. Die vorgeschlagene Definition von „x_1 ist paradox" läßt sich also auch auf das Russell-Paradox anwenden.

2 Noch einmal das Russell-Paradox

In dem letzten Abschnitt wurde nicht nur eine Definition für das Prädikat „x_1 ist parad ox“ präsentiert, sondern auch anhand des Basson-Beth-Vorschlages dargelegt, was es heißt, ein Paradox zu lösen. Dieselben Überlegungen führen zu folgendem Ergebnis, wenn man Definition IV(5) als Definition von „x_1 ist paradox“ voraussetzt:

IV(6) Wenn die Menge von Aussagen der natürlichen Sprachen M paradox ist, dann wird das auf M beruhende Paradox gelöst, indem man ein widerspruchsfreies formales System S mit den folgenden Eigenschaften konstruiert: Die Elemente der Elemente von M°, gegebenenfalls die evidenten, zusätzlichen Prämissen sowie die jeweiligen logischen Überlegungen, die (scheinbar) zu einem Widerspruch führen, lassen sich formal repräsentieren. Ferner ist nach Möglichkeit eine wohlgeformte Formel A aus einer Menge von wohlgeformten Formeln M′ genau dann ableitbar, wenn jede natürlichsprachliche Aussage, die durch A in S repräsentiert werden kann, durch ein intuitiv logisch korrektes Argument aus einer Menge von Annahmen folgt, die durch die Menge M′ in S repräsentiert werden kann.

In der zweiten Bedingung von IV(6) wird eine möglichst große Übereinstimmung zwischen der intuitiven logischen Korrektheit und der Ableitbarkeitsrelation von S gefordert. Allerdings wird nicht jeder Ableitbarkeitsbeziehung M $\vdash_S$ A ein intuitiv logisch korrektes Argument entsprechen, beispielsweise weil die Annahmemenge M (zumindest bei üblichen formalen Systemen) beliebig groß und die Formel A beliebig lang sein dürfen, während die menschliche Intuition versagt, wenn die Anzahl der Annahmen zu groß oder die Konklusionen zu unübersichtlich werden. Weil das System

S widerspruchsfrei ist, entspricht auch umgekehrt nicht jedem intuitiv logisch korrekten Argument eine Ableitbarkeitsbeziehung in S; ansonsten gäbe es kein Paradox.[136] Auch wenn der Idealfall nicht erreicht werden kann, besteht ein Ziel bei der Konstruktion des logischen Systems S darin, die Intuitionen über logische Korrektheit mit der Ableitbarkeitsbeziehung von S so weit wie möglich in Einklang zu bringen. Eine weitere Zielsetzung besteht darin, ad hoc Lösungen zu vermeiden und S so aufzubauen, daß die Differenzen zwischen der logischen Intuition und der Ableitbarkeitsbeziehung von S aus guten systematischen Gründen besteht.[137]

Die Aufgabe dieses Abschnittes besteht darin, zu zeigen, daß die Naive Prädikatenlogik eine Lösung des Russell-Paradoxes im Sinne von IV(6) ist, die den beiden Zielsetzungen gerecht wird. Betrachten wir noch einmal das

[136] Diese Behauptung läßt sich wie folgt indirekt beweisen: S sei ein widerspruchsfreies System, und M sei paradox. Angenommen, jedem intuitiv logisch korrekten Argument entspricht eine Ableitbarkeitsbeziehung in S. Da M paradox ist, ist erstens M eine endliche Menge, also gibt es eine endliche Menge natürlichsprachlicher Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, so daß $M' = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Zweitens gilt für beliebige $\{A_1', A_2', \ldots, A_n'\}$, wobei A_i' ($1 \leq i \leq n$) entweder A_i ist oder nicht-A_i ist, daß aus $\{A_1', A_2', \ldots, A_n'\}$ und evidenterweise wahren zusätzlichen Prämissen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ ein Widerspruch herleitbar ist (oder wenigstens herleitbar zu sein scheint). Es seien $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die formalen Repräsentationen von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in der formalen Sprache von S, und $D_1, D_2, \ldots, D_m$ seinen die Repräsentationen von $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Aufgrund der Annahme gilt für beliebige $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_n'\}$, wobei C_i' ($1 \leq i \leq n$) entweder C_i ist oder $\sim C_i$ ist, daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_n'\}$ syntaktisch inkonsistent ist. Folglich gibt es für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_n'\}$ eine wff E, so daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_n'\} \vdash_S E$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_n'\} \vdash_S \sim E$. Insbesondere gibt es für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', C_n\}$ eine wff E, so daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', C_n\} \vdash_S E$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', C_n\} \vdash_S \sim E$, und für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', \sim C_n\}$ eine wff F, so daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', \sim C_n\} \vdash_S F$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}', \sim C_n\} \vdash_S \sim F$. Daraus folgt aufgrund von L5.1(m) und L5.1(n), daß für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}'\}$ gilt: $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}'\} \vdash_S \sim C_n$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-1}'\} \vdash_S C_n$. Folglich gilt für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', C_{n-1}\}$, daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', C_{n-1}\} \vdash_S \sim C_n$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', C_{n-1}\} \vdash_S C_n$. Entsprechend gilt für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', \sim C_{n-1}\}$, daß $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', \sim C_{n-1}\} \vdash_S \sim C_n$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}', \sim C_{n-1}\} \vdash_S C_n$. Es folgt aufgrund von L5.1(m) und L5.1(n), daß für alle $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}'\}$ gilt: $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}'\} \vdash_S C_{n-1}$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m, C_1', C_2', \ldots, C_{n-2}'\} \vdash_S \sim C_{n-1}$. Durch die Wiederholung dieser Schritte ergibt sich schließlich $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\} \vdash_S C_1$ und $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\} \vdash_S \sim C_1$. Weil $D_1, D_2, \ldots, D_m$ evidenterweise wahr sind, ergibt sich somit C_1 und $\sim C_1$. Das ist ein Widerspruch.

[137] Dieses beiden Ziele entsprechen dem ersten Gütekriterium für logische Systeme, das in der Einleitung aufgestellt wurde. (Siehe Seite 11f.)

Russell-Paradox, und zwar zunächst so, wie es jeweils von Russell, von Hilbert und Ackermann sowie von Carnap formuliert wurde.

> „Sei *w* das Prädicat, ein Prädicat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann man *w* von sich selbst prädiciren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil.“[138]

> „Wir können nun den Ausdruck P(P) als Prädikat von P auffassen. Dieses Prädikat drückt die Eigenschaft eines Prädikates aus, sich selbst zuzukommen. Wir wollen dieses Prädikatenprädikat mit Pd(P) bezeichnen (zu lesen: ‚P ist prädikabel'). Da Pd, also auch $\overline{\mathrm{Pd}}$ selbst ein Prädikatenprädikat ist, so haben auch die Ausdrücke Pd($\overline{\mathrm{Pd}}$) und $\overline{\mathrm{Pd}}(\overline{\mathrm{Pd}})$ einen Sinn. Entweder ist nun $\overline{\mathrm{Pd}}(\overline{\mathrm{Pd}})$ richtig. D. h. das Prädikatenprädikat $\overline{\mathrm{Pd}}$ trifft auf sich selbst zu, also ist Pd($\overline{\mathrm{Pd}}$) richtig. Oder aber $\overline{\mathrm{Pd}}(\overline{\mathrm{Pd}})$ ist nicht der Fall. Dann trifft das Prädikatenprädikat $\overline{\mathrm{Pd}}$ nicht auf sich selbst zu, d. h. aber $\overline{\mathrm{Pd}}(\overline{\mathrm{Pd}})$ ist der Fall. Es folgt also Pd($\overline{\mathrm{Pd}}$) ~ $\overline{\mathrm{Pd}}(\overline{\mathrm{Pd}})$. Das ist aber ein Widerspruch, denn ein logischer Ausdruck kann nie seinem Gegenteil äquivalent sein.“[139]

> „Solange keine Unterscheidungen zwischen Prädikaten verschiedener Stufen gemacht werden, wird man es als sinnvoll ansehen, wenn von einer Eigenschaft F gesagt wird, sie komme sich selbst zu oder sie komme sich nicht zu. Man könnte dann in folgender Weise definieren: Wir wollen von einer Eigenschaft, die sich selbst nicht zukommt, sagen, sie sei imprädikabel; in Symbolen ‚*Impr*(F) ≡ ~F(F)‘. Wenn in dieser Definitionsformel für die freie Variable ‚F‘ das definierte Prädikat ‚*Impr*‘ selbst eingesetzt wird, so ergibt sich:

[138] Russell (1976a), S. 211.

[139] Hilbert und Ackermann (1949), S. 122f. In dem Zitat ist P ist eine Variable, $\overline{\mathrm{Pd}}$ ist die Negation von Pd und ~ steht für die Äquivalenzrelation.

> ‚*Impr*(*Impr*) ≡ ~*Impr*(*Impr*)‘. Dieser Satz – wie jeder Satz der Form ‚p ≡ ~p‘ – ist jedoch L-falsch. Die obige Definition führt somit zu einem Widerspruch.“[140]

Versuchen wir, das Russell-Paradox in der Naiven Prädikatenlogik zu konstruieren. Allen drei Herleitungen ist gemein, daß sie mit einer Definition wie in (i) beginnen. Carnap geht von (i), indem er RUS^1 für X^1 substituiert, unmittelbar zu (ii) über, woraus ein Widerspruch aussagenlogisch folgt.[141]

(i) $RUS^1(X^1) \equiv_{df} {\sim}X^1(X^1)$

(ii) $\vdash RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$

Das Zeichen „⊢“ in Zeile (ii) ist deswegen wichtig, weil es das eine ‚Horn‘ des Paradoxes abdeckt. Gemäß Definition IV(5) ist die (Einermenge der) Aussage IV(2), die durch die Formel $RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$ symbolisiert wird,[142] genau dann paradox, wenn sowohl IV(2) als auch die Negation von IV(2) zu einem Widerspruch führen. Bei einem Lösungsversuch – so, wie er hier unternommen wird – wird ein widerspruchsfreies System verwendet, mit dem IV(2) und die logischen Überlegungen, die zu den Widersprüchen führen sollen, dargestellt werden können. Das Ziel besteht natürlich darin, zu zeigen, daß irgendwo ein Fehlschluß vorliegt. In vorliegenden Fall muß also untersucht werden, ob sowohl die Annahme von $RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$ als auch die Annahme von ${\sim}(RUS^1(RUS^1) \equiv$

---

[140] Carnap (1954), S. 74f.
[141] Vgl. Abschnitt 6 von Kapitel II.
[142] In Abschnitt 6 von Kapitel II wurden zwei verschiedene Versionen des Russell-Paradoxes der Prädikation vorgestellt: Das Russell-Paradox mit Kopula und das Russell-Paradox ohne Kopula. Der Unterschied zwischen diesen Paradoxien kann man in der Naiven Prädikatenlogik dadurch repräsentierten, daß man unterschiedliche Formalisierungen (also unterschiedliche Namen von Formeln) wählt, beispielsweise indem man die Formel aus (ii) einerseits durch „$RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$“ (Version ohne Kopula) und andererseits durch „$\mathcal{P}(RUS^1, RUS^1) \equiv {\sim}\mathcal{P}(RUS^1, RUS^1)$“ (Version mit Kopula) darstellt. Da es sich aber um Namen derselben Formel handelt, ist es für die Lösung des Russell-Paradoxes (sowohl mit als auch ohne Kopula) durch die Naive Prädikatenlogik irrelevant, welche Darstellungsweise man wählt. Der Übersichtlichkeit wegen wird der Name „$RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$“ verwendet, auch wenn es genaugenommen angemessener wäre, IV(2) durch den Namen „$\mathcal{P}(RUS^1, RUS^1) \equiv {\sim}\mathcal{P}(RUS^1, RUS^1)$“ zu repräsentieren.

$\sim RUS^1(RUS^1))$ zu einem Widerspruch führen. Nun, daran, daß sich aus $RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1)$ ein Widerspruch herleiten läßt, besteht kein Zweifel. Doch normalerweise würde man vermuten, daß aus $\sim(RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1))$ kein Widerspruch ableitbar ist, schon weil es sich bei $\sim(p \equiv \sim p)$ um eine aussagenlogische Tautologie handelt. Wenn aber die Aussage (ii) korrekt und $RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1)$ ein Theorem ist und deswegen aus logischen Gründen gilt, dann führt die Annahme des Gegenteils $\sim(RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1))$ unmittelbar zu einem Widerspruch; und man hat damit das zweite ‚Horn' des Paradoxes. Ob es gelingt, das Russell-Paradox in der Naiven Prädikatenlogik zu konstruieren, hängt also davon ab, ob man zeigen kann, daß $RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1)$ ein Theorem der Naiven Prädikatenlogik ist.

Widmen wir also unsere Aufmerksamkeit der Frage, ob das Zeichen „$\vdash$" zu Recht zu Beginn von Zeile (ii) steht. Offenbar hat Carnap die Herleitung des Paradoxes etwas verkürzt dargestellt. Denn – wenigstens in der Naiven Prädikatenlogik – gibt es keine (abgeleitete) Schlußregel, gemäß der (i) aus (ii) folgen würde. Um einen Schluß dieser Art zu rechtfertigen, benötigt man eine Substitutionsregel wie L5.1(r), die die Beseitigung eines Allquantors erlaubt. Unter Verwendung von L5.1(r) läßt sich die Herleitung des Paradoxes wie folgt darstellen:

(iii) $RUS^1(X^1) \equiv_{df} \sim X^1(X^1)$

(iv) $\vdash \forall V^1{}_1 (\sim V^1{}_1(V^1{}_1) \equiv \sim V^1{}_1(V^1{}_1))$

(v) $\vdash \forall V^1{}_1 (RUS^1(V^1{}_1) \equiv \sim V^1{}_1(V^1{}_1))$

(vi) $\vdash RUS^1(RUS^1) \equiv \sim RUS^1(RUS^1)$

Der Ausgangspunkt (iii) ist dieselbe Definition wie in (i). Es ist wichtig, daß das Zeichen „X^1" in (iii) ein Namenschema ist. Indem für „X^1" Namen von Individuenvariablen eingesetzt werden, erhält man Aussagen über Zeichenketten. Genauso, wie man aus IV(7) (= III(2)) die Aussage IV(8) (= III(4)) erhält, indem man das Namenschema „A" durch den Namen „$\mathcal{P}(V^{-1}{}_2, K^1{}_3)$"

und das Namenschema „B“ durch den Namen „$\mathcal{P}(K^{-1}_3, K^1_3)$“ ersetzt, erhält man IV(9) aus (iii), indem man das Schema „X^1“ durch den Namen „V^1_1“ ersetzt.

IV(7) $(A \vee B) \equiv_{df} (\sim A \supset B)$

IV(8) Der Name „$(\mathcal{P}(V^{-1}_2, K^1_3) \vee \mathcal{P}(K^{-1}_3, K^1_3))$“ ist ein anderer Name für die Formel, die durch den Namen „$(\sim\mathcal{P}(V^{-1}_2, K^1_3) \supset \mathcal{P}(K^{-1}_3, K^1_3))$“ bezeichnet wird.

IV(9) Der Name „$RUS^1(V^1_1)$“ ist ein anderer Name für die Formel, die durch den Namen „$\sim V^1_1(V^1_1)$“ bezeichnet wird.

IV(9) ist beim Übergang von (iv) zu (v) wichtig. Bei der Formel $\forall V^1_1 (\sim V^1_1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ handelt es sich um ein Theorem der Naiven Prädikatenlogik.[143] Da aufgrund von IV(9) „$RUS^1(V^1_1)$“ ein anderer Name für die Zeichenkette ist, die der Name „$\sim V^1_1(V^1_1)$“ bezeichnet, läßt sich der Name „$\sim V^1_1(V^1_1)$“ in (iv) durch „$RUS^1(V^1_1)$“ ersetzen. Daher handelt es sich bei den Ausdrücken „$\forall V^1_1 (\sim V^1_1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$“ und „$\forall V^1_1 (RUS^1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$“ um zwei Namen derselben Formel der Naiven Prädikatenlogik, nämlich von IV(10).

IV(10) $$\boldsymbol{\forall V^1_1 \sim((\mathcal{P}(V^1_1, V^1_1) \supset \sim\mathcal{P}(V^1_1, V^1_1)) \supset \sim(\sim\mathcal{P}(V^1_1, V^1_1) \supset \mathcal{P}(V^1_1, V^1_1)))}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß, wenn $\forall V^1_1 (\sim V^1_1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ ein Theorem ist, auch $\forall V^1_1 (RUS^1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ ein Theorem ist. Der Übergang von (iv) zu (v) ist also legitim. Da es sich bei dem nächsten, verhängnisvollen Schritt um eine einfache Anwendung der Substitutionsregel L5.1(r) handelt, scheint das Russell-Paradox unaufhaltbar – oder nicht?

---

[143] Der Beweis von $\vdash \forall V^1_1 (\sim V^1_1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ ergibt sich unmittelbar aus L5.1(i), der Definition von „$\equiv$“ und L5.1(t).

Bevor wir uns dem Russell-Paradox ergeben, sollten wir einen genaueren Blick auf L5.1(r) werfen.

L5.1(r) Wenn $M \vdash \forall x^d$ A, dann $M \vdash A[x^d/k^d]$; für jede Individuenkonstante k^d und jede Menge von wff M.

Wie aus L5.1(r) hervorgeht, folgt $\vdash A[x^d/k^d]$ nur dann aus $\vdash \forall x^d$ A, wenn k^d eine Individuenkonstante ist. Auf den ersten Blick scheint es sich bei „RUS^1" um einen Namen einer Individuenkonstante zu handeln, das wird durch die Wahl der Zeichenkette „RUS^1" suggeriert. Aber dennoch handelt es sich – wie man durch einen kurzen Blick auf (iii) beziehungsweise IV(9) sowie durch den Vergleich von „$\forall V^1{}_1\ (RUS^1(V^1{}_1) \equiv {\sim}V^1{}_1(V^1{}_1))$" mit der bezeichneten Formel IV(10) überprüfen kann – bei „RUS^1" nicht um einen Namen einer Konstante, sondern um einen Teil von Namen von Formeln der Form ${\sim}X^1(X^1)$. Die scheinbare Substitution wird nicht durch L5.1(r) gedeckt, deshalb handelt es sich bei dem Übergang von (v) auf (vi) um einen Fehlschluß.

Der Fehlschluß von (v) auf (vi) wird dadurch bedingt, daß mit „RUS^1(…)" genauso wie mit „Pd(…)" bei Hilbert und Ackermann sowie „*Impr*(…)" bei Carnap Zeichenketten definiert werden, die nahelegen, daß „RUS^1", „Pd" und „*Impr*" für sich alleine genommen sinnvoll sind.[144] Die Möglichkeit dieses Irrtums könnte man durch eine andere Notation verringern, beispielsweise indem man anstatt (iii) die folgende Definition wählt:

IV(11) ®$X^1\|$ $\equiv_{df} {\sim}X^1(X^1)$

[144] Genau diesen Trugschluß begehen Hilbert und Ackermann in dem oben zitierten Abschnitt, wenn sie behaupten, daß Ausdrücke $Pd(\overline{Pd})$ und $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ einen Sinn haben. Daß „$RUS^1(RUS^1)$" genauso wie diese Ausdrücke sinnlos ist, läßt sich wie folgt zeigen: Wenn in der Definition (iii) der Ausdruck „RUS^1" definiert worden wäre, dann müßte sich jedes Vorkommen von „RUS^1" eliminieren lassen, indem man das Definiendum für „RUS^1" einsetzt. Dies ist im Fall von „$RUS^1(RUS^1)$" aber nicht möglich. Folglich kann es sich bei „$RUS^1(RUS^1)$" nicht um einen sinnvollen Ausdruck handeln.

Die Definition IV(11) verführt im Gegensatz zu Definition (iii) nicht zu der Annahme, daß Teile der definierten Ausdrücke (wie „®“ und „||“) außerhalb des definierten Kontext signifikant sind. Der Grund dafür ist, daß in (iii) der definierte Ausdruck seiner graphischen Gestalt nach genauso wie ein Name einer atomaren wff aufgebaut ist; das ist in IV(11) nicht der Fall. Die Ähnlichkeit des Definiendum von (iii) mit einer atomaren wff birgt einerseits die Gefahr von Mißverständnissen, führt aber andererseits zu einer größeren Lesbarkeit.[145]

Der Versuch, das Russell-Paradox durch (iii)-(vi) in der Naiven Prädikatenlogik zu konstruieren, ist daran gescheitert, daß durch die gewählte Definition „RUS^1“ nicht als Name für eine Individuenkonstante definiert wurde und deshalb die Beseitigung des Allquantors in (v) auf „RUS^1“ illegitim war. Es liegt der Gedanke nahe, das Russell-Paradox dadurch zu retten, daß man die Ausgangsdefinition so modifiziert, daß „RUS^1“ eine Individuenkonstante bezeichnet.

(vii) Es sei „RUS^1“ ein Name einer einstelligen Eigenschaftskonstante, so daß $\vdash \forall V^1{}_1\ (RUS^1(V^1{}_1) \equiv {\sim}V^1{}_1(V^1{}_1))$ gilt.

(viii) $\vdash \forall V^1{}_1\ (RUS^1(V^1{}_1) \equiv {\sim}V^1{}_1(V^1{}_1))$

(ix) $\vdash RUS^1(RUS^1) \equiv {\sim}RUS^1(RUS^1)$

Setzt man (vii) voraus, dann ergibt sich unmittelbar (viii), woraus sich aufgrund von L5.1(r) (ix) ergibt. Das Problem besteht darin, daß (vii) voraussetzt, daß es eine Eigenschaftskonstante F^1 gibt, für die das Theorem $\vdash \forall V^1{}_1\ (F^1(V^1{}_1) \equiv {\sim}V^1{}_1(V^1{}_1))$ gilt. Es läßt sich aber nicht nur zeigen, daß es kein F^1 gibt, so daß $\forall V^1{}_1\ (F^1(V^1{}_1) \equiv {\sim}V^1{}_1(V^1{}_1))$ ein Theorem ist, sondern es

[145] Auf die Gefahr, daß durch Definitionen eingeführte komplexe Notationen zu dem Anschein führen können, daß Teile der Notationen außerhalb des definierten Kontextes signifikant sind, wurde von Church aufmerksam gemacht. Vgl. Church (1996), S. 322f.

ist sogar IV(12) beweisbar.[146] Deshalb kann „RUS^1" keine einstellige Eigenschaftskonstante bezeichnen, die die Bedingung in (vii) erfüllt – die Aussage (ix) ist folglich falsch, und das Russell-Paradox läßt sich auf diesem Weg nicht herbeiführen.

IV(12) $\vdash \sim\exists V^1_2\ \forall V^1_1(V^1_2(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$

Die Naive Prädikatenlogik ist eine Lösung des Russell-Paradoxes im Sinne von Definition IV(6). Denn erstens ist die Naive Prädikatenlogik widerspruchsfrei (L7.4). Zweitens lassen sich die Elemente der Menge {{IV(2)}, {nicht-IV(2)}} sowie die logischen Überlegungen, die jeweils IV(2) und nicht-IV(2) zu einem Widerspruch führen sollen, formal repräsentieren. Und drittens ist die Naive Prädikatenlogik – unter anderem zur Stützung dieser Behauptung diente das Kapitel II – ein logisches System, das so aufgebaut wurde, daß die Ableitbarkeitsbeziehung weitgehend im Einklang mit vorhandenen Intuitionen über logische Korrektheit steht.

Doch neben dieser allgemeinen Auskunft kann man ganz konkret angeben, weshalb das Russell-Paradox nicht in der Naiven Prädikatenlogik konstruierbar ist: Der Herleitung des Russell-Paradoxes durch Russell, Hilbert und Ackermann sowie Carnap unterliegt ein Irrtum, nämlich der, daß ein Teil eines komplexen, definierten Ausdrucks als (Name einer) Konstante behandelt wird. Dieser Fehler läßt sich insbesondere deswegen nicht beheben, weil $\sim\exists V^1_2\ \forall V^1_1(V^1_2(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ ein Theorem der Naiven Prädikatenlogik ist.

[146] $\vdash \sim(K^1_1(K^1_1) \equiv \sim K^1_1(K^1_1))$ gilt aussagenlogisch. Daraus ergibt sich zunächst $\vdash \exists V^1_1 \sim(K^1_1(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$, woraus $\vdash \forall V^1_2\ \exists V^1_1 \sim(V^1_2(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ (aufgrund von L5.1(t)) und letztlich $\vdash \sim\exists V^1_2\ \forall V^1_1(V^1_2(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ folgt.
Bei $\sim\exists V^1_2\ \forall V^1_1(V^1_2(V^1_1) \equiv \sim V^1_1(V^1_1))$ handelt es sich um die Negation einer Einsetzung in das Comprehensionsaxiom $\exists X^1\ \forall Y^1(X^1(Y^1) \equiv A)$!

Was bedeuten die eben genannten Punkte für in den natürlichen Sprachen formulierte Argumentationen? Erstens gilt auch für die natürlichen Sprachen, daß man durch Definitionen die Bedeutung des definierten Ausdrucks als Ganzes bestimmt und daß man dies aus den Augen verlieren kann, wenn der definierte Ausdruck einer Aussage zum verwechseln ähnlich sieht. Man muß sich vor Augen führen, daß in IV(13) die Russell-Eigenschaft genauso wenig ‚definiert' wird, wie in IV(14) die Eigenschaften des Weihnachtsmannes bestimmt werden. IV(15) ist selbstverständlich eine ebenso gute Definition wie IV(13) und IV(14), nur daß die durch IV(15) definierten Ausdrücke nicht wie Aussagen aussehen.

IV(13) Der Ausdruck „Die Eigenschaft F hat die Russell-Eigenschaft" ist als „Die Eigenschaft F hat nicht die Eigenschaft F" definiert.

IV(14) Der Ausdruck „Der Weihnachtsmann hat die Eigenschaft F" ist als „Die Eigenschaft F hat nicht die Eigenschaft F" definiert.

IV(15) „Tatarata F" ist als „Die Eigenschaft F hat nicht die Eigenschaft F" definiert.

Das Zeichen „F" ist in IV(13), IV(14) und in IV(15) keine Variable, sondern wird – wie bisher – als schematisches Zeichen verwendet. Mit IV(13), IV(14) und IV(15) wird deshalb nicht jeweils ein bestimmter Ausdruck als ein anderer definiert, sondern es werden jeweils die Ausdrücke in eine definitorische Beziehung gesetzt, die dadurch entstehen, daß für „F" ein geeigneter Ausdruck in IV(13), IV(14) und IV(15) eingesetzt wird; das Definiens in IV(13), IV(14) und IV(15) steht also jeweils für einen vollständigen Satz. Da die Relation „Der Ausdruck Ω ist als Ψ definiert" für „Der Ausdruck Ω ist eine andere Formulierung für den Ausdruck Ψ" steht, ist von Teilen der Ausdrücke Ω oder Ψ gar nicht die Rede. Definitionen dienen also nur dazu, neue Zeichenketten einzuführen, die als Ganzes per definitionem synonym zu dem definierenden Ausdruck sind. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man „0_b“ als „0“, „1_b“ als „1“, „10_b“ als „2“, „11_b“ als „3“, „100_b“ als „4“ usw. definiert. Die Frage, was „$_b$“ für sich alleine genommen (also außerhalb eines definierten Ausdrucks wie „11_b“) bedeutet, ist sinnlos. Dasselbe gilt für ein Vorkommen des Zeichens „0“ als Bestandteil von „0_b“ oder „100_b“: es hat keinen unabhängigen Sinn, auch wenn es genauso aussieht wie das übliche Zeichen für die Null. Ebensowenig, wie das Vorkommen des Zeichens „0“ als Bestandteil der Zeichenkette „10_b“ mit „0“ als Definiens des Definiendum „0_b“ zu tun hat, besteht ein Zusammenhang zwischen der Kopula „hat“ und dem Vorkommen von „hat“ als Teil der Definienda von IV(13) oder IV(14).

Der Ausdruck „Russell-Eigenschaft“ ist durch die Definition IV(13) also nur als Bestandteil von Ausdrücken der Form „Die Eigenschaft F hat die Russell-Eigenschaft“ sinnvoll. Das heißt natürlich nicht, daß man nicht neue Prädikate auf der Basis von alten Prädikaten einführen kann. Dies ist selbstverständlich möglich, IV(16) ist ein Beispiel. Allerdings handelt es sich dabei nicht um dieselbe Art von Definitionen wie bei der Definition der Adjunktion durch die Subjunktion und die Negation in III(2)[147] oder wie bei IV(13)-IV(15), sondern um eine Definition im weiteren Sinn des Wortes.[148]

IV(16) x hat die Eigenschaft, blün zu sein, genau dann, wenn x die Eigenschaft hat, blau zu sein, oder x die Eigenschaft hat, grün zu sein.

Eine Definition (im engeren Sinn) zeichnet sich dadurch aus, daß es sich um eine rein sprachliche Konvention handelt, sie setzt daher nicht die Existenz von irgendwelchen Entitäten voraus. Außerdem ist sie logisch neutral, das bedeutet, wenn A eine Aussage ist, die nicht aus der Annahmemenge M folgt, dann folgt A auch nicht aus M, wenn man zusätzliche Definitionen

[147] Siehe Seite 90.
[148] Ein anderes Beispiel für eine Definition im weiteren Sinn ist beispielsweise die Formeldefinition der Naiven Prädikatenlogik im dritten Abschnitt von Kapitel III.

(im engeren Sinn) trifft.[149] Daß Definitionen (im engeren Sinn) ontologisch und logisch neutral sind, ist die Voraussetzung dafür, daß es jederzeit möglich ist, neue Ausdrücke zu definieren. IV(16) ist schon deshalb keine Definition dieser Art, weil IV(16) die beiden genannten Kriterien nicht erfüllt. Man betrachte beispielsweise die Annahmemenge, deren einziges Element IV(17) ist. Aus {IV(17)} folgt die Aussage IV(18) – wenigstens wenn man die Ableitungsrelation der Naiven Prädikatenlogik als Kriterium nimmt – nicht.

IV(17) Der Apfel ist nicht grün, und der Asphalt ist nicht blau.

IV(18) Es gibt eine Eigenschaft F, so daß für alle x gilt: x hat genau dann F, wenn x die Eigenschaft hat, blau zu sein, oder x die Eigenschaft hat, grün zu sein.

Dagegen folgt IV(18) offenbar aus {IV(16), IV(17)}; IV(16) ist also nicht logisch neutral. Weil IV(18) die Existenz einer Eigenschaft, also einer

---

[149] Eine verwandte Anforderung wird von Wessel an Definitionen gestellt:

„Eine Definition $A \equiv_{df} B$ muß so aufgebaut werden, daß die Aussage $A \equiv B$ nicht existentiell belastet ist.“ (Wessel (1992), S. 31.)

Daß eine Aussage A existentiell belastet ist, heißt, grob gesagt, daß ihre Wahrheit die Existenz von Objekten impliziert. Die inhaltlichen Motivation und die genauen Definitionen der von Krampitz und Wessel aufgebauten Theorie der Existenzbelastung sollen hier im einzelnen nicht dargestellt werden. Es sei nur angemerkt, daß die zitierte Definitionsregel daran krankt, daß A für eine Formel und nicht für einen Ausdruck steht, der keine wohlgeformte Formel ist. Dies führt dazu, daß Wessel fälschlicherweise der Meinung ist, daß folgende Definition die zitierte Definitionsregel verletzt. (Vgl. Wessel (1992), S. 32, sowie Wessel (1998), S. 228.)

$$x = y \equiv_{df} \forall F^1(F^1(x) \equiv F^1(y))$$

Nach den von Wessel formulierten Regeln sind atomare Aussagen existentiell belastet, $\forall F^1(F^1(x) \equiv F^1(y))$ ist nicht existentiell belastet, und $A \equiv B$ ist genau dann existentiell belastet, wenn A belastet ist und B nicht belastet ist oder wenn A nicht belastet ist und B belastet ist. Der Irrtum beruht darauf, daß Wessel = als Identitäts*relation* auffaßt, deshalb $x = y$ als atomare Aussage einstuft und folglich annimmt, daß $x = y$ existentiell belastet ist. Wenn es sich aber tatsächlich um eine Definition handelt, dann ist „$x = y$“ nur ein anderer Ausdruck für „$\forall F^1(F^1(x) \equiv F^1(y))$“. Dementsprechend ist $x = y$ keine atomare Aussage. Da $x = y$ per definitionem genau dann existentiell belastet ist, wenn $\forall F^1(F^1(x) \equiv F^1(y))$ existentiell belastet ist, gilt nach der angegeben Regel, daß die folgende Formel nicht existentiell belastet ist.

$$x = y \equiv \forall F^1(F^1(x) \equiv F^1(y))$$

Folglich erfüllt die angegebene Definition die oben zitierte Definitionsregel.

Zum Thema Existenzbelastung siehe Krampitz (1990), Krampitz (1992), Wessel (1992), Wessel (1997), Krampitz et al. (1997) sowie Wessel (1998).

Möglichkeit für Sprecher, Entitäten zu charakterisieren, impliziert, verletzt IV(16) außerdem die Bedingung der ontologischen Neutralität (und zwar unabhängig davon, ob diese Möglichkeit von linguistischen, mentalen oder von anderen Entitäten abhängt). Deshalb handelt es sich bei IV(16) nicht um eine Definition im engeren Sinne.

Die „Definition" genannten Festlegungen wie IV(16) haben bei genauerer Betrachtung viel mit einer Taufe gemeinsam. Genauso wie mit dem Satz „Dieses Schiff soll ‚Julia' heißen" in der entsprechenden Situation eine Schiffstaufe vollzogen wird, bei der ein neuer Name in die Sprache eingeführt wird, dient IV(16) dazu, für eine Eigenschaft ein neues Prädikat einzuführen; deutlicher wird dies, wenn man IV(16) als „Die Eigenschaft, die ein Gegenstand hat, wenn er blau ist oder wenn er grün ist, soll durch das Prädikat ‚x_1 ist blün' ausgedrückt werden" paraphrasiert.[150] Auf dieselbe Weise wie eine erfolgreiche Schiffstaufe die Existenz eines Schiffes voraussetzt, setzt IV(16) voraus, daß es die Eigenschaft gibt, die durch „x_1 ist blün" ausgedrückt werden soll.

Gewöhnlich ist es unproblematisch, implizite Existenzannahmen über Eigenschaften wie im von Fall IV(16) zu akzeptieren. Deshalb werden Festlegungen der Art wie in IV(16) normalerweise „Definitionen" genannt und nicht von Definitionen im engeren Sinne unterschieden. Manchmal – und jetzt wird der Bogen zu dem zweiten Grund geschlagen, aus dem das Russell-Paradox nicht in der Naiven Prädikatenlogik konstruierbar ist – sind diese Existenzannahmen jedoch heikel: Wenn man den Ausgangspunkt für das Russell-Paradox als Definition in einem weiteren Sinn (so wie IV(16)) auffaßt, dann läßt sich zeigen, daß die implizite Voraussetzung, es gäbe eine

---

[150] Eine Formulierung dieser Festlegung ohne das philosophisch vorbelastete Wort „Eigenschaft" lautet:

> Die Art und Weise, wie ein Gegenstand x_1 durch einen Sprecher durch „x_1 ist blau oder x_1 ist grün" charakterisiert werden kann, soll durch das Prädikat „x_1 ist blün" ausgedrückt werden.

Eigenschaft, die man Russell-Eigenschaft taufen könne, nicht erfüllt ist. Denn übersetzt man IV(12) ins Deutsche, so ergibt sich IV(19).

IV(19) Aus logischen Gründen gibt es keine einstellige Eigenschaft X, so daß für alle einstelligen Eigenschaften Y gilt, daß die Eigenschaft Y die Eigenschaft X genau dann hat, wenn die Eigenschaft Y nicht die Eigenschaft Y hat.[151]

IV(19) besagt, daß dem komplexen Prädikat „X^1 hat nicht X^1" keine Eigenschaft entspricht. Also drückt aus logischen Gründen nicht jedes komplexe Prädikat auch eine Eigenschaft aus. Dies ist die wichtigste Lehre, die man aus dem Russell-Paradox ziehen kann.

3 Das Comprehensionsaxiom

Auch wenn das Russell-Paradox uns lehrt, daß nicht jedes komplexe Prädikat eine Eigenschaft ausdrückt, so ist deswegen nicht ausgeschlossen, daß einige oder sogar die meisten komplexen Prädikate eine Eigenschaft ausdrücken. Formale Eigenschaftstheorien enthalten meistens ein Axiomschema, das festlegt, welche das sind, das sogenannte Comprehensionsaxiom.[152] In der Sprache der Naiven Prädikatenlogik hat ein Comprehensionsaxiom die Form von IV(20), wobei bestimmte Einschränkungen für die Formel A getroffen werden. Aus dem Comprehensionsaxiom folgt (bei entsprechender Wahl der einschränkenden Bedingungen) unter anderem das

[151] IV(12) läßt sich selbstverständlich auch ohne die Verwendung des Wortes „Eigenschaft" paraphrasieren:

> Aus logischen Gründen gibt es für Sprecher keine Möglichkeit X, Entitäten mit einem Prädikat so zu charakterisieren, daß für alle Art und Weisen Y, auf die eine Entität durch einen Sprecher mit einem einstelligen Prädikat charakterisiert werden kann, gilt: Y wird durch X genau dann zutreffend charakterisiert, wenn Y nicht durch Y zutreffend charakterisiert wird.

[152] Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Beseitigung des Allquantors auch auf komplexe Ausdrücke zu erlauben. Beispielsweise kann man $\forall X^0\ A \supset A[X^0/B]$ (wobei B eine wff ist) als Axiomenschema und entsprechende Axiomenschemata für Variablen mit einem höheren Superskript wählen. Vgl. Church (1996), S. 348f.

Theorem IV(21). Diesem Theorem entspricht dann beispielsweise die natürlichsprachliche Aussage IV(22).[153]

IV(20) $\exists X^d \forall y_1 \ldots \forall y_d (X^d(y_1, \ldots, y_d) \equiv A)$

IV(21) $\vdash \exists V^1{}_1 \forall V^{-1}{}_1 (V^1{}_1(V^{-1}{}_1) \equiv (K^1{}_1(V^{-1}{}_1) \vee K^1{}_2(V^{-1}{}_1)))$

IV(22) Aus logischen Gründen gibt es eine Eigenschaft X, so daß jeder Gegenstand y die Eigenschaft X genau dann hat, wenn y schön oder liebenswert ist.

Wie man an IV(22) ablesen kann, führt das Comprehensionsaxiom zu Existenzbehauptungen über Eigenschaften. Der Tatsache, daß IV(21) ein *Theorem* ist, wurde in IV(22) durch das „aus logischen Gründen" Ausdruck verliehen. Doch das ist nicht unproblematisch. Da Existenzaussagen über Eigenschaften notorisch umstritten und deshalb nicht philosophisch neutral sind, sind solche Systeme nach den in der Einleitung formulierten Kriterien keine logischen Systeme beziehungsweise schlechte logische Systeme. (Beispielsweise könnte man die Bedingungen für A so formulieren, daß es immer einen Gegenstand geben muß, der die Eigenschaft X^d hat – dies würden Philosophen begrüßen, die die Existenz von uninstantiierten Eigenschaften ablehnen, ihre Opponenten wären dagegen.) Darüber hinaus sind logisch wahre Aussagen solche Aussagen, die aufgrund der Bedeutungen der in ihnen verwendeten Wörter wahr sind.[154] Ob eine Existenzbehauptung wie IV(22) wahr ist oder nicht, hängt jedoch – wenigstens wenn man sie realistisch oder konzeptualistisch liest – davon ab, was in der Welt existiert. Folglich können Existenzbehauptungen nicht logisch wahr sein. Formale Systeme, die ein Comprehensionsaxiom enthalten, sind also auch aus diesem Grund keine logischen Systeme, sondern – da Behauptungen über die Welt Bestandteil dieser Systeme sind – inhaltliche Theorien.

[153] Beim Übergang von IV(21) zu IV(22) wurde eine ‚referentielle' Lesart des Existenzquantors gewählt. Das ist gerechtfertigt, weil es den Intentionen der Vertreter von formalen Eigenschaftstheorien entspricht.

[154] Vgl. Einleitung, Seite 9.

Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, daß in der Literatur sehr unterschiedliche Positionen bezüglich des Comprehensionsaxioms eingenommen wurden. Grossmann lehnt das Comprehensionsaxiom völlig ab, weil es in der von ihm vertretenen Ontologie beispielsweise neben der Eigenschaft, grün zu sein, und der Eigenschaft, rund zu sein, keine dritte Eigenschaft, grün und rund zu sein, gibt.[155] Castañedas Formulierung des Comprehensionsaxioms impliziert, daß bestimmte komplexe Prädikate, die unter Verwendung von Quantoren, Konjunktionen und Termnegationen gebildet wurden, Eigenschaften ausdrücken. Dies ist – nach Castañeda – bei komplexen Prädikaten, in denen andere aussagenlogische Operatoren als die Konjunktion vorkommen, nicht der Fall. Aus diesem Grund konstatiert Castañeda ein ontologisches Primat der Konjunktion.[156] Wie bereits erwähnt, besteht Cocchiarellas Projekt darin, verschiedene ontologische Positionen durch verschiedene logische Systeme darzustellen, die sich in erster Linie durch die jeweilige Formulierung des Comprehensionsaxioms unterscheiden. Schon aus diesem Grund, aber auch in anderen Kontexten wurden von Cocchiarella diverse Versionen des Comprehensionsaxioms vorgeschlagen, die aber alle – im Gegensatz zu Castañedas Vorschlag – auch andere aussagenlogische Operatoren als die Konjunktion in den komplexen Prädikaten erlauben. Für welche Fassung des Comprehensionsaxioms man sich entscheiden sollte, ist eine ontologische Frage, die nicht allein durch logische Überlegungen beantwortet werden kann.

Zwar kann durch logische Überlegungen nicht die ‚richtige' Wahl des Comprehensionsaxioms bestimmt werden. Dennoch gibt es logische Bedingungen, die ein Comprehensionsaxiom erfüllen muß. Durch das Comprehensionsaxiom wird festgelegt, welche komplexen Prädikate eine Eigenschaft ausdrücken. Wenn – wie in IV(20) – bei der Formulierung des

[155] Siehe Grossmann (1972).
[156] Siehe Castañeda (1976).

Comprehensionsaxioms für die Formel A keine Beschränkungen angegeben wird, dann ist IV(23) ein Theoremschema (unter der Bedingung, daß für X und Y unterschiedliche Namen von geeigneten Variablen eingesetzt werden) und dann ist es möglich, auf IV(24) zu schließen.

IV(23) $\vdash \exists X \forall Y\ (X(Y) \equiv {\sim}Y(Y))$

IV(24) $\vdash \forall Y\ (F(Y) \equiv {\sim}Y(Y))$

Der Schritt von IV(23) zu IV(24) entspricht in der natürlichen Sprache der Einführung eines neuen einfachen Prädikates, das die Eigenschaft ausdrückt, die durch das komplexe Prädikat ~Y(Y) ausgedrückt wird. Insbesondere entspricht IV(24) der Aussage IV(25).

IV(25) Aus logischen Gründen gilt für alle einstelligen Eigenschaften X: Die Eigenschaft X hat die Russell-Eigenschaft genau dann, wenn die Eigenschaft X nicht die Eigenschaft X hat.

IV(23) führt also zum Russell-Paradox. Deshalb ist es ein logisches Minimalkriterium für jede Formulierung des Comprehensionsaxioms, daß IV(23) und andere Theoreme, die zu Widersprüchen führen, vermieden werden. Eine andere, wohlbekannte und viel einfacher zu formulierende Regel ergibt sich bei der Betrachtung von IV(26). Wäre IV(26) ein Axiom, dann wäre IV(27) ein Theoremschema und entsprechend IV(28) eine sinnvolle Einführung des Prädikates „x_1 limmt“.

IV(26) $\exists X^1 \forall y^{-1} (X^1(y^{-1}) \equiv (X^1(k^{-1}{}_1) \wedge F^1{}_1(k^{-1}{}_2)))$

IV(27) $\vdash \forall y^{-1} (F^1{}_2(y^{-1}) \equiv (F^1{}_2(k^{-1}{}_1) \wedge F^1{}_1(k^{-1}{}_2)))$

IV(28) Für alle Gegenstände y gilt: y limmt genau dann, wenn Julia limmt und Maria schläft.

Selbstverständlich ist IV(28) inakzeptabel. Das Problem liegt darin, daß in IV(28) ein neues Prädikat eingeführt werden soll und dessen semantischer

Gehalt durch ein anderes, in diesem Fall komplexes Prädikat festgelegt werden soll. Diese Festlegung scheitert jedoch, wenn die Bedeutung des Ausdrucks, der den semantischen Gehalt des neuen Prädikates festlegen soll, selbst nicht feststeht. Im Fall von IV(28) ist „x_1 limmt“ Teil des Ausdrucks, der den Sinn von „x_1 limmt“ erst festlegen soll, daher ist der semantische Gehalt dieses Ausdrucks nicht fixiert, und deshalb ist IV(28) inakzeptabel. Eine Konsequenz aus dieser Überlegung ist, daß in der Formel A in IV(20) die Variable X^d nicht vorkommen darf. Dieses Resultat wird dadurch untermauert, daß, wenn X^d in A vorkommen dürfte und sonst keine Einschränkungen getroffen würden, IV(29) ein Theoremschema wäre, woraus sich IV(30) und damit ein Widerspruch ergibt.

IV(29) $\vdash \forall y^{-1}(F^1(y^{-1}) \equiv \sim F^1(k^{-1}))$

IV(30) $\vdash F^1(k^{-1}) \equiv \sim F^1(k^{-1})$

Doch die Einführung von neuen Prädikaten schlägt nicht nur fehl, wenn das Prädikat, dessen Bedeutung festgelegt werden soll, Teil des Ausdrucks ist, der die Bedeutung festlegt. IV(31) ist nur eine sinnvolle Einführung von „x_1 limmt“, wenn „x_1 limmt“ nicht eine der Eigenschaften ausdrückt, über die mit dem Ausdruck „alle Eigenschaften“ quantifiziert wird.

IV(31) Für alle Gegenstände y gilt: y limmt genau dann, wenn y alle Eigenschaften X hat, für die gilt: X wird durch ein Prädikat ausgedrückt, das ein mit „l“ beginnendes Verb enthält.

Wenn IV(31) so verstanden wird, daß sich „alle Eigenschaften“ auch auf die Eigenschaft zu limmen bezieht, dann ergibt sich ein ähnliches Problem wie bei IV(28): Um zu entscheiden, ob die Aussage „k limmt“ wahr ist, muß man überprüfen, ob k alle Eigenschaften hat, die unter anderem durch ein Prädikat ausgedrückt werden, das ein mit „l“ beginnendes Verb enthält. Ob das der Fall ist, hängt nicht nur davon, ob k läuft, lacht und lernt, sondern ebenfalls davon, ob er limmt. Ob etwas limmt oder nicht, hängt also unter anderem davon ab, ob etwas limmt oder nicht. Diese Art von Zirkularität spricht gegen die Einführung des Prädikates „x_1 limmt" in IV(31).

Russell sah in der Form von Zirkularität, die in IV(31) auftritt, den Grund für die verschiedenen Paradoxien. Um sie zu vermeiden, stellte er das Vicious-Circle-Prinzip auf:

> „Whatever involves all of a collection must not be one of the collection."[157]

Da in IV(25) und in IV(31) in Abhängigkeit von *allen* Eigenschaften, also von der Gesamtheit der Eigenschaften, bestimmt wird, wann etwas die Russell-Eigenschaft beziehungsweise die Eigenschaft zu limmen haben soll, und die Russell-Eigenschaft sowie die Eigenschaft zu limmen zu der Gesamtheit der Eigenschaften gehören (beziehungsweise gehören würden, wenn es sie geben würde), verletzen sowohl IV(25) als auch IV(31) das Vicious-Circle-Prinzip. Da das Russell-Paradox (und nachweislich auch viele andere Paradoxien) das Vicious-Circle-Prinzip verletzen und darüber hinaus die Annahme, daß keine Gesamtheit ein Element ihrer selbst sein kann, keine ad hoc Annahme, sondern eine plausible These ist, bietet das Vicious-Circle-Prinzip eine gute Ausgangsbasis, um eine passende Einschränkung für das Comprehensionsaxiom zu formulieren.

Es soll allerdings nicht verschwiegen werden, daß das Vicious-Circle-Prinzip keineswegs ohne Schattenseiten ist. Logische Systeme, in denen das Vicious-Circle-Prinzip nicht verletzt wird, sind bei weitem nicht stark genug, um die Mathematik zu begründen. Für jemanden, der wie Russell ein logizistisches Programm verfolgt, ist dies ein großes Problem. Außerdem – darauf hat Gödel aufmerksam gemacht[158] – hängt die Plausibilität des

[157] Russell (1971b), S. 155.
[158] Siehe Gödel (1990).

Vicious-Circle-Prinzips davon ab, wie man die Gesamtheiten, über die gesprochen wird, auffaßt.

Der Art und Weise, wie das Comprehensionsaxiom bisher dargestellt wurde, liegt folgende Vorstellung zugrunde: Es gibt eine Ausgangsmenge von einfachen Prädikaten, die jeweils bestimmte Eigenschaften ausdrücken. Auf Basis dieser einfachen Prädikate können komplexe Prädikate gebildet werden. Durch das Comprehensionsaxiom wird festgelegt, daß bestimmte komplexe Prädikate ebenfalls Eigenschaften ausdrücken. Welche Eigenschaft ein komplexes Prädikat A ausdrückt, das hängt erstens von den Operatoren in A ab, und zweitens wird es von den Eigenschaften bestimmt, die von den in A vorkommenden einfachen Prädikate ausgedrückt werden. Da die Eigenschaft, die von dem komplexen Prädikat ausgedrückt wird, erst auf diese Weise festgelegt wird, ist die Forderung sinnvoll, daß der semantische Gehalt des komplexen Prädikates von der neu zu bildenden Eigenschaft nicht abhängig sein darf. Liegt die Eigenschaft aber erst vor, dann kann ein neues, elementares Prädikat in die Sprache eingeführt werden, um diese Eigenschaft auszudrücken. Dieses elementare Prädikat kann dann wieder verwendet werden, um komplexe Prädikate und mit Hilfe des Comprehensionsaxioms neue Eigenschaften zu bilden.

Diese Interpretation des Comprehensionsaxioms kann man „konstruktiv“ nennen, weil das Comprehensionsaxiom nach dieser Auffassung dazu dient, aus Eigenschaften (nach bestimmten Regeln) neue Eigenschaften zu kreieren. Wie im ersten Abschnitt von Kapitel II ausführlich dargestellt wurde, soll unter einer „Eigenschaft“ die Art und Weise verstanden werden, wie ein Prädikat dazu verwendet werden kann, um etwas zu charakterisieren; und die Frage, welche Entitäten bei dieser Charakterisierung eine Rolle spielen, wurde offen gelassen. An dieser Stelle spielt es jedoch eine Rolle, wie man Eigenschaften ontologisch auffaßt. Für Nominalisten und bestimmte Konzeptualisten ist die konstruktive Interpretation des Comprehensionsaxioms sehr attraktiv. Das Comprehensionsaxiom legt nach dieser Auffassung fest, aus welchen linguistischen (mentalen) Entitäten neue linguistische (mentale) Entitäten gebildet werden können. Da man etwas nur konstruieren kann, wenn alle ‚Bausteine' unabhängig von dem zu Konstruierenden vorhanden sind, ist das Vicious-Circle-Prinzip innerhalb dieser Auffassung ein sehr natürliches Postulat.

Die Vorstellung, daß das Comprehensionsaxiom dazu da ist, um aus alten Eigenschaften neue Eigenschaften zu bilden, muß man aber selbstverständlich nicht teilen. Beispielsweise ist die konstruktive Lesart des Comprehensionsaxioms für jemanden sehr unattraktiv, der davon ausgeht, daß die Gesamtheit aller möglichen Eigenschaften unabhängig vom menschlichen Sprechen und Denken vorhanden ist. Aus dieser Perspektive betrachtet, ist das Comprehensionsaxiom nicht konstruktiv, sondern in einem bestimmten Sinne ‚deskriptiv': Es beschreibt, welche Eigenschaften es in der Welt gibt. Aus diesem Blickwinkel wäre es alles andere als einsichtig, das Comprehensionsaxiom im Sinne des Vicious-Circle-Prinzips einzuschränken. Wenn Eigenschaften unabhängig vom menschlichen Reden und Denken existieren, dann ist es nicht per se ausgeschlossen, daß es Eigenschaften gibt, die eine bestimmte Eigenschaft F haben und auf die man nur mittels der Gesamtheit aller Eigenschaften, die diese Eigenschaft F haben, Bezug nehmen kann. In diesem Sinne schreibt Gödel:

> „If [...] it is a question of objects that exist independently of our constructions, there is nothing in the least absurd in the existence of totalities containing members which can be described (i.e., uniquely characterized) only by reference to this totality."[159]

[159] Gödel (1990), S. 127f.

Wie bereits mehrfach betont wurde, überschreitet man mit dem Aufstellen eines Comprehensionsaxioms die Grenze zwischen Logik und Ontologie. Aus diesem Grund ist das Vicious-Circle-Prinzip und erst Recht jede präzise Ausformulierung des Comprehensionsaxioms nur für bestimmte philosophische Positionen akzeptabel. Das gilt auch für die Formulierung des Comprehensionsaxioms, die jetzt verwendet werden wird, um darzulegen, wie die Naive Prädikatenlogik durch ein Comprehensionsaxiom erweitert werden kann. Anhand dieses Beispiels soll nur gezeigt werden, daß eine solche Erweiterung der Naiven Prädikatenlogik möglich ist, eventuelle ontologischen Implikationen des gewählten Beispiels sind deshalb in diesem Kontext irrelevant.

Betrachten wir das logische System, das entsteht, indem man zu den Axiomenschemata des fünften Abschnitts von Kapitel III das folgende Schema hinzufügt.

A7 $\exists X^d\ \forall x_1 \ldots \forall x_d(\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_d, X^d) \equiv A)$ $(d \geq 0)$, wobei X^d nicht in A vorkommt, $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nicht prädikativ in A vorkommen und in A kein Quantor $\forall x^n$ $(n \geq 0)$ vorkommt.

Die erste Einschränkung bewirkt, daß IV(27) und IV(29) keine Theoremschemata sind. Daß $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nicht prädikativ in A vorkommen dürfen, verhindert, daß IV(23) ein Theoremschema ist, also wird an dieser Stelle das Russell-Paradox blockiert. Daß in A nur über Gegenstände, aber nicht über Eigenschaften quantifiziert werden darf, läßt sich durch das Vicious-Circle-Prinzip rechtfertigen: Wenn die Eigenschaft X^d durch A festgelegt werden soll, dann darf sich A nicht auf X^d beziehen, indem in A über Eigenschaften quantifiziert wird.[160] Technisch gesehen, dient diese Einschränkung dazu, das modifizierte Russell-Paradox IV(33) zu verhindern.

$$\text{IV(32)}\quad \exists X^1\ \forall Y^1(X^1(Y^1) \equiv$$
$$\exists Z^1{}_1(\forall Z^1{}_2(\ Z^1{}_2(\ Z^1{}_1) \equiv Z^1{}_2(Y^1)) \wedge {\sim}Z^1{}_1(Y^1)))$$

$$\text{IV(33)}\quad F^1(F^1) \equiv \exists Z^1{}_1(\forall Z^1{}_2(\ Z^1{}_2(\ Z^1{}_1) \equiv Z^1{}_2(F^1)) \wedge {\sim}Z^1{}_1(F^1))$$

Wäre IV(32) ein Axiomenschema, dann wäre IV(33) ein Theoremschema. Es würde also eine Eigenschaft F^1 geben, so daß $F^1(F^1)$ genau dann gilt, wenn es eine von F^1 ununterscheidbare Eigenschaft $Z^1{}_1$ gibt, so daß ${\sim}Z^1{}_1(F^1)$ gilt. IV(33) ist nicht paradox in dem oben definierten Sinn, weil aus IV(33) kein Widerspruch ableitbar ist. (Ein Widerspruch ergibt sich aus IV(33) nur unter der zusätzlichen Annahme, daß ununterscheidbare Eigenschaften füreinander substituiert werden dürfen.[161]) Dennoch scheint es mir – aber das ist auch eine Geschmacksfrage – ziemlich absurd, die Existenz einer solchen Eigenschaft anzunehmen.

Die Semantik der Naiven Prädikatenlogik muß ein wenig verändert werden, um dem neuen Axiom gerecht zu werden. Zu diesem Zweck wird in zwei Definitionen aus dem sechsten Abschnitt von Kapitel III der Ausdruck „Grundbewertung“ durch den Ausdruck „quasi-Grundbewertung“ ersetzt.

Eine Funktion α von WFF_a in {0, 1} wird *quasi-Grundbewertung* genannt. BEW_α ist die[162] mit α übereinstimmende *Bewertung* genau dann, wenn
- α eine quasi-Grundbewertung ist;
- BEW_α eine Funktion von WFF in {0, 1} ist;

[160] Es reicht nicht aus, nur die Quantifikation über d-stellige Eigenschaften in A auszuschließen. Denn das Comprehensionsaxiom stellt – wie noch gezeigt werden wird – Beziehungen zwischen Eigenschaften verschiedener Stelligkeit her.
[161] Vgl. Cocchiarella (1972), Meyer (1972), Cocchiarella (1973), Cocchiarella (1978).
[162] Entsprechend zu Kapitel III läßt sich leicht zeigen, daß es zu jeder quasi-Grundbewertung α genau eine mit α übereinstimmende Bewertung gibt.

– für jedes A $\in$ WFF_a gilt: $a(A) = BEW_a(A)$;

– für jede wff A, B und jede Individuenvariable x gilt:

(i) $BEW_a(\sim A) = 1$ genau dann, wenn $BEW_a(A) = 0$;

(ii) $BEW_a(A \supset B) = 1$ genau dann, wenn $BEW_a(A) = 0$ oder $BEW_a(B) = 1$;

(iii) $BEW_a(\forall x^d\ A) = 1$ genau dann, wenn $BEW_a(A[x^d/k^d]) = 1$, für jede Individuenkonstante k^d.

Anstatt „$BEW_a(A)$“ wird auch „$[\![A]\!]_a$“ geschrieben.

Auf der Basis von quasi-Grundbewertungen ist es nun möglich, den Ausdruck *Grundbewertung* neu zu definieren.

a ist eine *Grundbewertung* genau dann, wenn

- a eine quasi-Grundbewertung ist;
- BEW_a die mit a übereinstimmende Bewertung ist;
- $[\![\exists X^d\ \forall x_1 \ldots \forall x_d(X^d(x_1, \ldots, x_d) \equiv A)]\!]_a = 1$ gilt, wenn $\exists X^d\ \forall x_1 \ldots \forall x_d(X^d(x_1, \ldots, x_d) \equiv A)$ ($d \geq 0$) eine wff ist, X^d nicht in A vorkommt, $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nicht prädikativ in A vorkommen und in A kein Quantor $\forall x^n$ ($n \geq 0$) vorkommt.

Übernimmt man sämtliche anderen Definitionen der Naiven Prädikatenlogik,[163] dann läßt sich durch eine Modifikation der ursprünglichen Beweise zeigen, daß alle in Kapitel III gezeigten metatheoretischen Resultate auch für das erweiterte axiomatische System und die modifizierte Semantik gelten. Für jedes Lemma LX.Y der Naiven Prädikatenlogik von Kapitel III erhält man also ein entsprechendes Lemma COMX.Y für die um das Comprehensionsaxiom erweiterte Naive Prädikatenlogik. Die Grundfrage

[163] Selbstverständlich müssen die Definitionen, die in Kapitel III implizit auf die Naive Prädikatenlogik relativiert waren, jetzt auf die um das Comprehensionsaxiom erweiterte Naive Prädikatenlogik relativiert werden. Beispielsweise bedeutet „$\vdash$ A“ in Kapitel III „A ist ein Theorem der Naiven Prädikatenlogik“ und in diesem Kapitel „A ist ein Theorem der um das Comprehensionsaxiom A7 erweiterten Naiven Prädikatenlogik“.

lautet aber: Ist die Erweiterung der Naiven Prädikatenlogik überhaupt konsistent?[164] Daß dies der Fall ist, läßt sich zeigen, indem man ein Beispiel für eine Grundbewertung angibt. Es läßt sich beweisen, daß die Funktion α von WFF_a in $\{0, 1\}$, die die folgende Bedingung für beliebige Individuenkonstanten F^d, $k_1, \ldots, k_d$ erfüllt, eine Grundbewertung ist.

> $\alpha(F^d(k_1, \ldots, k_d)) = 1$ genau dann, wenn der Subskript von F^d ungerade ist.

Die um das Comprehensionsaxiom erweiterte Naive Prädikatenlogik ist also konsistent, korrekt und vollständig. Zwei weitere interessante Ergebnisse sind folgende Theoremschemata:

- $\vdash \forall x\, \forall y\, (\exists X^d \exists z_1 \ldots z_{d-1} \sim(X^d(z_1, \ldots, z_n, x, z_{n+1}, \ldots, z_d) \equiv$
  $X^d(z_1, \ldots, z_n, y, z_{n+1}, \ldots, z_d)) \supset \exists X^1 \sim(X^1(x) \equiv X^1(y)))$ $(d>0)$
- $\vdash \forall X^1(X^1(k) \equiv X^1(k')) \supset \forall X^d \forall z_1 \ldots z_{d-1}\, (X^d(z_1, \ldots, z_n, k, z_{n+1}, \ldots, z_d) \equiv$
  $X^d(z_1, \ldots, z_n, k', z_{n+1}, \ldots, z_d))$ $(d>0)$

Wenn sich zwei Gegenstände bezüglich ihrer Eigenschaften nicht unterscheiden, unterscheiden sie sich also auch nicht in ihrem Verhalten bezüglich Relationen. Aufgrund dieses Ergebnisses bietet es sich an, die Identität wie folgt zu definieren:

> $(i \asymp j) \equiv_{df} (\forall X^1(X^1(i) \equiv X^1(j)))$, wobei X^1 irgendeine einstellige Eigenschaftsvariable ist.

Da eine formale Eigenschaftstheorie nicht nur von der Wahl des Comprehensionsaxioms, sondern auch von der Wahl des Identitätskriteriums abhängt und es da – wie gezeigt wurde – sehr unterschiedliche Möglichkeiten gibt, dient auch diese Identitätsdefinition nur als Beispiel für

[164] Ein logisches System ist genau dann inkonsistent, wenn in diesem System jede wff eine Tautologie ist. Gäbe es keine Grundbewertungen, dann würde in der um das Comprehensionsaxiom erweiterten Naiven Prädikatenlogik für beliebige wff A gelten, daß $\{\sim A\}$ nicht semantisch konsistent ist. Daraus würde $\vDash A$ unmittelbar folgen.

eine der vorhandenen Möglichkeiten. Welche Wahl man trifft, hängt wiederum nicht von logischen, sondern von ontologischen Erwägungen ab. Gemäß der Definition, die als Beispiel gewählt wurde, sind zwei Eigenschaften genau dann identisch, wenn sie ununterscheidbar sind. Da es sich um eine Definition im engeren Wortsinn handelt, wurde keine Identitäts*relation* eingeführt, das Zeichen „≍“ ist also kein Name einer zweistelligen Individuenkonstante und macht deshalb außerhalb von Ausdrücken der Form $(i \asymp j)$ keinen Sinn. Aus diesem Grund kann das so eingeführte Zeichen „≍“ nicht ‚nominalisiert‘ und auch nicht in einer Einsetzung des Comprehensionsaxioms vorkommen. Denn beispielsweise ist IV(34) nur ein anderer Ausdruck für IV(35), und jeder Name, der dem Schema IV(35) entspricht, bezeichnet eine Formel, die die Bedingungen für ein Comprehensionsaxiom nicht erfüllt, weil ‚auf der rechten Seite‘ der Formel ein Quantor der Form $\forall X^1$ vorkommt.

IV(34) $\exists X^2 \forall y\ \forall z\ (X^2(y, z) \equiv (y \asymp z))$

IV(35) $\exists X^2 \forall y\ \forall z\ (X^2(y, z) \equiv (\forall X^1(X^1(i) \equiv X^1(j))))$

Wer das Identitätszeichen auch innerhalb des Comprehensionsaxioms erlauben möchte, der kann die Beschränkungen des Comprehensionsaxioms abschwächen oder eine zweistellige Eigenschaftskonstante als Identitätsrelation auszeichnen oder auch das Identitätszeichen „≍“ zum Alphabet hinzufügen. Bei der Auswahl von Comprehensionsaxiom und Identitätskonzeption ist Vorsicht geboten, denn eine mißglückte Kombination kann dazu führen, daß das entstehende System inkonsistent ist. Die Feinabstimmung von Comprehensionsaxiom und Identitätskonzeption für Eigenschaften gehört aber wirklich zu den Kernaufgaben von formalen Eigenschaftstheorien und nicht zur Logik. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle der Exkurs in die formale Ontologie beendet; denn es sollte lediglich beispielhaft gezeigt werden, daß die Naive Prädikatenlogik eine geeignete Basis für eine formale Eigenschaftstheorie darstellt.

4 Das Grelling-Paradox

Während bisher das Russell-Paradox der Prädikation im Vordergrund stand, dient dieser Abschnitt dazu, das Grelling-Paradox zu untersuchen. Grelling und Nelson führen es wie folgt ein:

> „Jedem Wort kommt der Begriff, den es bezeichnet, entweder als Merkmal zu oder nicht. Im ersten Falle nennen wir es autologisch, im zweiten heterologisch. Das Wort ‚heterologisch' ist nun selbst entweder autologisch oder heterologisch. Angenommen, es sei autologisch; dann kommt ihm der Begriff, den es bezeichnet, als Merkmal zu, es ist also heterologisch. Angenommen, es sei heterologisch; dann kommt ihm der Begriff, den es bezeichnet, nicht als Merkmal zu, es ist also nicht heterologisch."[165]

Russells Formulierung des Grelling-Paradoxes in *An Inquiry into Meaning and Truth* ist insofern wichtig, weil die von ihm angeführten Beispiele diejenigen sind, die in der Literatur immer wieder aufgenommen (und kritisiert) werden.

> „A predicate is 'heterological' when it cannot be predicated of itself; thus 'long' is heterological because it is not a long word, but 'short' is homological. ['German', 'learned', 'beautiful' are heterological: 'English', 'erudite', 'ugly' are homological.] We now ask: is 'heterological' heterological? Either answer leads to a contradiction."[166]

Die Diskussion des Grelling-Paradoxes hat sich – vielleicht unter dem Eindruck von Ramseys Unterscheidung zwischen logischen und semantischen

[165] Grelling und Nelson (1908), S. 307f. Grelling und Nelson formulieren das Paradox auf zwei unterschiedliche Weisen. Bei der zitierten Variante handelt es sich um die – auch nach Grellings und Nelsons Meinung – leichter verständliche.

[166] Russell (1961), S. 79. Der Satz in eckigen Klammern stammt aus Russells Fußnote zu dieser Passage, die Anführungszeichen in den eckigen Klammern wurden von mir hinzugefügt.
In der Literatur werden „autologisch" und „homologisch" synonym verwendet.

Paradoxien – relativ unabhängig von der Diskussion des Russell-Paradoxes entwickelt. Russell bleibt sich insofern treu, als daß er das Grelling-Paradox in *An Inquiry into Meaning and Truth* dazu verwendet, um eine Hierarchie von Sprachen zu rechtfertigen, indem er behauptet, daß eine solche Hierarchie von Sprachen essentiell sei, um Antinomien wie das Grelling-Paradox zu vermeiden. Zwischen den meisten anderen Autoren, die sich mit dem Grelling-Paradox beschäftigen, scheint allerdings Konsens darüber zu bestehen, daß eine solche Hierarchie von Sprachen inakzeptabel ist. Ferner besteht große Einigkeit zwischen den Autoren, die eine Lösung des Grelling-Paradoxes anbieten, daß die Frage „Ist ‚heterologisch' heterologisch?" sinnlos ist, und selbst die Strategien, mit denen die Sinnlosigkeit dieser Frage aufgezeigt werden soll, ähneln sich sehr. Einerseits wird behauptet, „heterologisch" gehöre nicht zu dem Typ von Gegenständen, von denen man sinnvoll fragen könne, ob sie heterologisch seien oder nicht. Anderseits wird darauf verwiesen, daß der sinnvolle Gebrauch von „x_1 ist heterologisch" ein anderes Prädikat voraussetzt, dessen semantischer Gehalt von „x_1 ist heterologisch" unabhängig ist. Dies sei in der Frage „Ist ‚heterologisch' heterologisch?" nicht der Fall, und deswegen sei sie sinnlos.

Beide Strategien, das Grelling-Paradox zu lösen, setzen „sinnlos" neben „wahr" und „falsch" als dritten semantischen Wert voraus und beruhen auf einem Verständnis von „sinnlos", gemäß dem ein grammatisch korrekt gebildeter Satz sinnlos ist, wenn ein ‚Kategorienfehler' begangen wird. Auf eine kritische Auseinandersetzung mit dieser logischen Konzeption wird an dieser Stelle verzichtet. Denn nach einer genauen Darstellung beider Ansätze wird gezeigt werden, wie sich das Grelling-Paradox so verstärken läßt, daß die beiden Lösungsstrategien fehlschlagen.[167] Begonnen wird aber

[167] Anstatt Sätze mit ‚Kategorienfehler' als „sinnlos" einzuordnen, kann man diesen Sätzen absprechen, daß sie einen Wahrheitswert besitzen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die beiden Lösungsstrategien auch dann nicht funktionieren, wenn man sie im Vokabular einer Wahrheitswertlückenkonzeption reformuliert.

mit einer Reformulierung des Grelling-Paradoxes, die durch die Ambiguität des Wortes „Wort“ bzw. „Prädikat“ notwendig ist.

Nimmt man Russell wörtlich, dann ist ein Prädikat heterologisch, wenn es nicht von sich selbst prädiziert werden *kann*. Als Beispiel für ein solches Prädikat präsentiert er „long“, als Beispiel für ein homologisches Prädikat „short“.[168] Doch es besteht gar kein Zweifel daran, daß IV(36) ebenso akzeptabel ist wie IV(37). Wenn IV(37) zeigt, daß „short“ von sich selbst prädiziert werden *kann*, dann zeigt IV(36) dasselbe für „long“.

IV(36) ‘Long’ is long.

IV(37) ‘Short’ is short.

Offenbar meint Russell in der oben zitierten Textstelle, daß ein Prädikat heterologisch ist, wenn das Prädikat nicht *wahrheitsgemäß* von sich selbst prädiziert werden kann. Ohne den modalen Ausdruck „kann“ formuliert: „X“ ist genau dann heterologisch, wenn „X“ nicht X ist. Nur unter dieser Interpretation ist die Begründung „‘long’ is heterological because it is not a long word“ sinnvoll. Auffällig ist außerdem, daß Russell einerseits „long“ als Prädikat betrachtet, denn „heterologisch“ wird für Prädikate definiert, andererseits „long“ von ihm als „Wort“ bezeichnet wird. Bereits anhand der von Russell verwendeten Beispiele läßt sich zeigen, daß die unterschiedlichen Verwendungsweisen von „Wort“ zu verschiedenen Lesarten von „heterologisch“ führen.

IV(38) ‘English’ is English.

Die Anführungsstriche übernehmen in IV(36) und IV(37) eine andere Funktion als in IV(38). Etwas kann nur kurz sein, wenn es eine zeitliche oder räumliche Ausdehnung hat. Da IV(37) wahr ist, referiert aus diesem Grund der Name „‘short’“ in IV(37) (und entsprechend „‘long’“ in IV(36))

---

[168] In der folgenden Diskussion werde ich das „is“ beziehungsweise das „ist“ in den Prädikaten weglassen.

auf etwas, das räumlich oder zeitlich ausgedehnt ist. Eine plausible Möglichkeit wäre es, „‘short’“ als Namen des aus fünf Buchstaben bestehenden graphischen Gebildes zu betrachten, das in der Zeile IV(37) abgedruckt ist. Da dieses graphische Gebilde relativ kurz ist, ist die Aussage wahr. Faßt man die Anführungsstriche in IV(39) auf dieselbe Weise auf, dann ist IV(39) falsch, weil die verwendete Tinte schwarz ist. IV(40) ist ebenfalls falsch, während IV(41) wahr ist; denn die Buchstaben des Wortes „kreisförmig“ wurden in IV(41) kreisförmig angeordnet.[169]

IV(39) ‘Red’ is red.

IV(40) „Kreisförmig“ ist kreisförmig.

“
k
g r
i e
IV(41) m . i ist kreisförmig.
r s
„ ö f

Die Gegenüberstellung von IV(40) und IV(41) zeigt, daß bei dieser Interpretation der Anführungsstriche manche Vorkommen eines Wortes heterologisch und manche Vorkommen desselben Wortes homologisch sein können.

Überträgt man dieses Verständnis der Anführungszeichen auf IV(38), dann ist IV(38) nicht – wie von Russell intendiert – wahr, sondern falsch oder sinnlos, weil graphische Gebilde nicht per se zu einer bestimmten Sprache gehören. Das graphische Gebilde „die“ kann beispielsweise für einen bestimmten Artikel des Deutschen oder auch für ein Verb des Englischen stehen, je nach Kontext. Daß die intendierte Lesart von IV(38) nicht ein

[169] Daß in IV(36)-IV(39) andere Anführungszeichen als in V(40) und den folgenden Beispielen verwendet werden, hat keine inhaltlichen Gründe, sondern beruht auf den unterschiedlichen Konventionen im Deutschen und im Englischen.

graphisches Gebilde, sondern es das Wort „English“ (und zwar in einer Lesart des Wortes „Wort“ in der von den Wörtern einer Sprache gesprochen wird) betrifft, erkennt man daran, daß es für die Wahrheit von IV(38) unerheblich ist, in welcher Form und mit welcher Farbe „English“ in dem Satz IV(38) niedergeschrieben wurde.

Aus den letzten Absätzen geht hervor, daß in den Aussagen „Das Wort ‚rot‘ ist heterologisch“ und „Das Wort ‚englisch‘ ist heterologisch“ unter „Wort“ etwas unterschiedliches verstanden wird. Leider beschränkt sich die Ambiguität des Wortes „Wort“ im Deutschen (und die dazugehörenden unterschiedlichen Funktionen der Anführungszeichen) nicht nur auf diese beiden Fälle. So wird der Ausdruck „das Wort ‚pusten‘“ in IV(42)-IV(48) verwendet, um sich jeweils auf völlig andere Aspekte unserer Sprache zu beziehen.[170]

IV(42) Das Wort „pusten“ hast Du eben sehr lustig ausgesprochen.
IV(43) Das Wort „pusten“ ist richtig geschrieben.
IV(44) Das Wort „pusten“ reimt sich auf „husten“.
IV(45) Das Wort „pusten“ besteht aus sechs Buchstaben.
IV(46) Das Wort „pusten“ ist der Infinitiv zu „puste“.
IV(47) Das Wort „pusten“ ist ein Verb.
IV(48) Das Wort „pusten“ bedeutet „blasen“.

In IV(42) und IV(43) wird über Laut- beziehungsweise Schrift-Wort-Token gesprochen. Laut-Wort-Token können laut oder leise sein, aber nicht handschriftlich. Schrift-Wort-Token können in Times New Roman oder fett gedruckt, aber nicht laut sein. In IV(44) wird nicht über eine konkrete Realisierung, über ein Wort-Token gesprochen, sondern über das Wort „pusten“ als Teil des phonetischen Systems des Deutschen. Daß nicht über

[170] Die folgende Darstellung verschiedener Wortbegriffe orientiert sich an Unterscheidungen, die innerhalb der Integrativen Sprachwissenschaft getroffen werden. Siehe Lieb (1983), Lieb (1985), Lieb (1992), Lieb (1993a) und Lieb (1993b).

Laut-Wort-Token gesprochen wird, erkennt man daran, daß sich die Behauptung IV(44) nicht dadurch widerlegen läßt, daß man Laut-Wort-Token von „pusten“ und „husten“ findet, die sich nicht reimen. Aus demselben Grund ist IV(49) kein Beleg dafür, daß IV(45) falsch ist. In IV(45) wird nicht behauptet, daß de facto alle Schrift-Wort-Token von „pusten“ aus sechs Buchstaben bestehen, es wird nicht einmal wie in IV(43) über Schrift-Wort-Token gesprochen. Der Ausdruck „das Wort ‚pusten‘“ referiert in IV(45) auf „pusten“ als orthographischem Wort.

IV(49) pussten

In IV(46) geht es nicht um „pusten“ als orthographisches Wort oder phonetisches Wort, sondern als Wortform des Wortparadigmas „pusten“, über das in IV(47) gesprochen wird. Andere Wortformen des Wortparadigmas „pusten“ sind beispielsweise „puste“, „pustest“, „pustet“, „gepustet“. Wenn ein Lehrer seine Schüler nach dem Imperativ Singular von „pusten“ fragt, dann verwendet er das Wortparadigma „pusten“ in der Frage und fragt nach einer Wortform dieses Wortparadigmas, nämlich „puste“. Wenn man über Wortformen und Wortparadigmen spricht, dann abstrahiert man von der Art und Weise, wie Aussagen beispielsweise durch Sprechen, Schreiben oder eine ausgefeilte Zeichensprache realisiert werden. Aus diesem Grund ist die Behauptung, die Wortform „puste“ bestehe aus fünf Buchstaben, genauso falsch oder sinnlos wie die Behauptung, die Wortform „puste“ hätte eine bestimmte phonetische Struktur. Denn die linguistischen Aspekte von Sprachen, auf die man sich bezieht, wenn man von Wortformen oder Wortparadigmen spricht, werden nicht davon tangiert, ob die Sprecher bereits die Schrift erfunden haben oder ob die Sprache aus irgendeinem Grund nur noch geschrieben, aber nicht mehr gesprochen wird. In diesem Sinn ist die Rede über Wortformen und Wortparadigmen abstrakter als die Rede über phonetische Worte oder orthographische Worte. Daß sich Wortparadigmen von lexikalischen Wörtern unterscheiden, sieht man an der Gegenüberstellung von IV(48) und IV(50). In IV(48) wird von *der*

Bedeutung des Wortes „pusten“ gesprochen, in IV(50) werden zwei Bedeutungen von „pusten“ genannt.

IV(50) Das Wort „pusten“ hat zwei Bedeutungen, nämlich „blasen“ und „keuchen“.

Der Grund ist, daß in IV(50) wie in IV(47) von einer syntaktischen Einheit, nämlich dem Wortparadigma „pusten“ die Rede ist, in IV(48) dagegen von einer semantischen Einheit, nämlich einem lexikalischen Wort. Anders formuliert, gibt es zwei lexikalische Wörter, nämlich „pusten“$_{L1}$ und „pusten“$_{L2}$, wobei „pusten“$_{L1}$ die Bedeutung „blasen“ und „pusten“$_{L2}$ die Bedeutung „keuchen“ hat und „pusten“$_{L1}$ und „pusten“$_{L2}$ beide dasselbe Wortparadigma „pusten“ teilen.

Die angedeutete Unterscheidung von Laut-Wort-Token, Schrift-Wort-Token, phonetischen Wörtern, orthographischen Wörtern, Wortformen, Wortparadigmen und lexikalischen Wörtern ist nicht vollständig. Beispielsweise ist es vermutlich sinnvoll, phonologische Wörter von phonetischen Wörtern zu unterscheiden, weil durch die Verwendung eines phonologischen Wortbegriffs nur auf die phonetischen Aspekte einer Sprache Bezug genommen wird, die in dieser Sprache bedeutungsunterscheidend sind. Lawrence nimmt darüber hinaus einen Wortbegriff an, mit dem man sich direkt auf die Wortbedeutung bezieht. Eine Ausarbeitung der verschiedenen Wortbegriffe, auf die an dieser Stelle nur hingewiesen werden kann, ist nur im Rahmen einer umfassenden linguistischen Konzeption möglich.

Der kleine Exkurs zum Wortbegriff war notwendig, weil verschiedene Autoren im Zusammenhang mit dem Grelling-Paradox auf die Ambiguität von „Wort“ aufmerksam machen und glauben, der Lösung durch die

Unterscheidung verschiedener Wortbegriffe näher zu kommen.[171] Geach unterscheidet beispielsweise drei verschiedene Möglichkeiten, „Wort“ zu verstehen, Goldstein kommt auf vier und Lawrence sogar auf sechs Möglichkeiten. Für die vorliegende Arbeit ist es nicht notwendig, sich auf eine bestimmte Position festzulegen, sondern es ist ausreichend zu betrachten, wie die Unterscheidung verschiedener Wortbegriffe verwendet wird, um das Grelling-Paradox zu lösen.

Die Unterscheidung der Wortbegriffe wird verwendet, um dafür zu argumentieren, daß das Vorkommen von „„Heterologisch“‟ in IV(51) ein Name von etwas ist, auf das sich das Prädikat „x_1 ist heterologisch“ nicht sinnvoll anwenden läßt, und daß IV(51) deshalb denselben semantischen Status besitzt wie Sätze, in denen Kategorienfehler begangen werden (wie beispielsweise IV(52)). Diese Argumentationsstrategie verfolgt Lawrence (1950), und auch Wiredu (1976) blockiert eine der von ihm unterschiedenen Versionen des Grelling-Paradoxes auf diese Weise. Sätze wie IV(52) werden von vielen Philosophen als ‚sinnlos‘ eingestuft.[172]

IV(51) „Heterologisch“ ist heterologisch.

IV(52) Der Kühlschrank ist rechtshändig.

Eine Variante dieses Argumenttyps verwendet Goldstein (1981). Er kommt zu dem Ergebnis, daß ein Satz der Form IV(53) sinnlos ist, wenn IV(54) (bei der gleichen Interpretation der Variablen X) keine sinnvolle Aussage ist.

IV(53) „X“ ist heterologisch.

[171] Diese Idee ist offenbar sehr attraktiv, denn sie wurde von verschiedenen Autoren unabhängig voneinander entwickelt. Mit der Unterscheidung von Wortbegriffen im Zusammenhang mit dem Grelling-Paradox beschäftigen sich unter anderem Geach (1948), Lawrence (1950), Gregory (1952), Wiredu (1976), Goldstein (1981) und Goldstein (1982).

[172] Lawrence äußert sich nicht eindeutig darüber, ob er IV(51) tatsächlich für sinnlos hält. Einerseits behauptet er, daß „heterologisch“ weder nicht-heterologisch, noch homologisch sei. Andererseits spricht er von einer ‚impliziten Definition‘ von „heterologisch“, die verhindern würde, heterologisch oder homologisch von ihm zu prädizieren. Vgl. Lawrence (1950), S. 83f. Wiredu spricht von einer semantischen Absurdität. Vgl. Wiredu (1976), S. 19.

IV(54) „X“ ist X.

Beispielsweise ist – nach Goldstein – der Satz IV(56) sinnlos, weil das Wort „dreibeinig“ (unabhängig davon, welchen Wortbegriff man wählt) nicht dreibeinig sein kann. Daraus folgt nach Goldsteins Kriterium, daß ebenfalls IV(55) sinnlos ist.

IV(55) „Dreibeinig“ ist heterologisch.

IV(56) „Dreibeinig“ ist dreibeinig.

Diese Analyse hat zum Ergebnis, daß die Beantwortung der Frage, ob IV(51) sinnvoll ist oder nicht, voraussetzt, daß man feststellt, ob IV(51) sinnvoll ist. Daraus zieht Goldstein den Schluß, daß IV(51) sinnlos ist.[173]

Neben der unter anderem von Lawrence, Wiredu und Goldstein verfolgten Strategie, das Grelling-Paradox auf einen Kategorienfehler zurückzuführen, gibt es einen anderen, viel diskutierten Ansatz, der von Ryle vorgeschlagen wurde.[174] Offenbar handelt es sich bei „x_1 ist heterologisch“ und „x_1 ist homologisch“ um linguistische Prädikate. Denn „x_1 ist heterologisch“ und „x_1 ist homologisch“ lassen sich ebenso wie die linguistischen Prädikate „x_1 ist dreisilbig“ und „x_1 ist englisch“ von Worten prädizieren.[175] Ryle macht darauf aufmerksam, daß sich „heterologisch“ von gewöhnlichen linguistischen Prädikaten wie „x_1 ist dreisilbig“, „x_1 ist ambig“ oder „x_1 ist englisch“ unterscheidet. Um herauszufinden, ob das Prädikat „x_1 ist

[173] Dieser Schluß ist etwas zwielichtig. Denn im allgemeinen folgt daraus, daß man nicht feststellen kann, ob etwas der Fall ist, natürlich nicht, daß es nicht der Fall ist. Goldstein verteidigt seine Schlußfolgerung gegen Kritik von Stone. Siehe Stone (1981), S. 423f, und Goldstein (1982), S. 583.

[174] Siehe Ryle (1951). Auf Ryle beziehen sich Bowden (1952), Killalea (1953), Gregory (1952), Mackie und Smart (1953), Mackie und Smart (1954), Meager (1956), Geach (1961), Fritzpatrick (1961), Geach (1962) und Wiredu (1976).

[175] Für Ryles Argument ist es nicht wichtig, die den unterschiedlichen Wortbegriffen entsprechenden Funktionen der Anführungszeichen auseinanderzuhalten.

englisch“ auf „dreisilbig“, „ambig“ oder „English“ zutrifft, gibt es bestimmte linguistische Kriterien, die man auf alle diese Worte anwenden kann. Beispielsweise kann man Sprecher des Englischen fragen, ob sie die Worte kennen. Um herauszufinden, ob ein Wort englisch, ambig oder dreisilbig ist, bedarf es jeweils einer anderen linguistischen Methode, aber es sind dieselben Kriterien, die man für alle Worte anlegt, um zu entscheiden, ob ein Wort eine bestimmte gewöhnliche linguistische Eigenschaft hat oder nicht.

Dies trifft nicht auf „x_1 ist heterologisch“ zu. Denn während man herausfinden kann, ob „English“ heterologisch ist, indem man Sprecher des Englischen fragt, ob das Wort „English“ zur englischen Sprache gehört, kommt man der Beantwortung der Frage, ob „ambig“ heterologisch ist, nicht dadurch näher, daß man in Erfahrung bringt, wie viele Sprecher des Englischen „ambig“ für ein englisches Wort halten. Um zu bestimmen, ob „dreisilbig“, „ambig“ und „English“ heterologisch sind, muß man feststellen, ob „dreisilbig“ dreisilbig, „ambig“ ambig und „English“ englisch ist und jeweils die spezifischen linguistische Kriterien anwenden, die man auch sonst anwendet um herauszufinden, ob etwas dreisilbig, ambig oder englisch ist. Das Prädikat „x_1 ist heterologisch“ – so Ryle – steht nicht für eine linguistische Eigenschaft von Ausdrücken, sondern es dient dazu, von linguistischen Prädikaten zu verneinen, daß ihnen die gewöhnlichen linguistischen Eigenschaften zukommen, die sie jeweils ausdrücken. Aus diesem Grund beinhalte „x_1 ist heterologisch“ keine linguistischen Informationen über Wörter.

Es stellt sich die Frage, wie es möglich ist, daß ein Prädikat (ohne ambig zu sein) verschiedene Wörter völlig unterschiedlich charakterisiert. Darüber hinaus ist es seltsam, daß es möglich sein soll, mit einem Prädikat Wörter zu charakterisieren, obwohl es keine linguistischen Informationen über Wörter beinhaltet. Ryles Antwort besteht darin, daß in IV(57), entgegen dem

Augenschein, das Prädikat „englisch" nicht nur angeführt, sondern auch auf die Eigenschaft, die mit dem Prädikat „englisch" ausgedrückt wird, referiert wird.

IV(57) „Englisch" ist heterologisch.

Dies sei die Besonderheit von nicht-gewöhnlichen Prädikaten wie „x_1 ist heterologisch" und „x_1 ist homologisch", sie würden keine gewöhnlichen linguistischen Eigenschaften ausdrücken und daher keine eigenständige linguistischen Informationen über Wörter beinhalten, sondern sie würden auf ungenannte linguistische Eigenschaft referieren. Die verdeckte Referenz könne man explizit machen, indem man IV(57) zu IV(58) umformuliert.

IV(58) „Englisch" fehlt die Eigenschaft, die es ausdrückt, nämlich englisch zu sein.

Durch den „nämlich-Zusatz" (namely-rider) in IV(58) werde die Referenz, die in IV(57) implizit vorhanden sei, explizit gemacht. Die Möglichkeit, implizite Referenz in einem Satz wie IV(57) durch einen namely-rider wie in IV(58) explizit zu machen, wird von Ryle als Voraussetzung dafür betrachtet, daß der Satz sinnvoll ist. Wendet man dieses Kriterium auf IV(51) an und versucht, die implizite Referenz ‚auszupacken', ergibt sich IV(59).

IV(59) „Heterologisch" fehlt die Eigenschaft, die es ausdrückt, nämlich die des Fehlens der Eigenschaft, für die es steht, nämlich die des Fehlens der Eigenschaft, für die es steht, nämlich …

Ryles Kommentar dazu lautet:

> „No property is ever mentioned, so the seeming reference to such a property is spurious."[176]

[176] Ryle (1951), S. 67.

Die implizite Referenz in IV(51) läßt sich nicht durch die Verwendung von namely-rider explizit machen, weil es sich um einen Fall von Selbst-Referenz handelt. Versucht man dies wie in IV(59), so gerät man in einen unendlichen Regreß. Ryle zieht daraus die Konsequenz, daß die implizite Referenz durch das Prädikat „x_1 ist heterologisch" in IV(51) hinfällig ist. Da dieses Prädikat aufgrund seines parasitären Charakters – laut Ryle – keine eigenen linguistischen Informationen über Worte beinhaltet und deshalb der sinnvolle Gebrauch dieses Prädikates die (erfolgreiche) Referenz auf eine einfache linguistische Eigenschaft präsupponiert, kann man nach Ryle „heterologisch" nicht auf „heterologisch" anwenden und in IV(51) liegt ein Kategorienfehler vor. Ryle faßt sein Resultat wie folgt zusammen:

> „A team neither does nor does not sprain its left ankle. It is not one of its eleven possessors of left ankles, though a mention of the team carries a reference to these possessors of ankles. 'Heterological' neither has nor lacks any philological property for which it stands. It is not one of the philological epithets which it and its opposite number are special ways of referring."[177]

Gegen Ryles Kriterium, daß Sätze sinnlos sind, wenn sich ihre implizite Referenz nicht mit nämlich-Zusätzen explizit machen läßt, kann man einwenden, daß – wie Popper mit seinem ingeniösen sokratischen Dialog gezeigt hat[178] – Selbstbezüglichkeit in den natürlichen Sprachen üblich ist und Ryles Kriterium deshalb viele unproblematische Aussagen als sinnlos brandmarkt. Darüber hinaus werden auch in einigen mathematischen Argumenten (insbesondere in Gödels Unvollständigkeitsbeweis) selbstbezügliche

[177] Ryle (1951), S. 69.
[178] Siehe Popper (1954).

Aussagen verwendet.[179] Aus diesen Gründen scheint Ryles Kriterium verfehlt zu sein. Ruby Meager versucht zu zeigen, daß Ryles Argument stärker ist, wenn man sich nicht wie Ryle auf „Referenz" konzentriert, sondern auf den deskriptiven Gehalt von Prädikaten.[180] Nach Meagers Darstellung ist es nicht so, daß das Prädikat „x_1 ist heterologisch" in IV(57) auf die Eigenschaft, englisch zu sein, *referiert*, sondern daß der deskriptive Gehalt von „x_1 ist heterologisch" in IV(57) durch den deskriptiven Gehalt des Prädikates „x_1 ist englisch" bestimmt wird. Dies ist schon deswegen einsichtig, weil Prädikate nicht referieren, sondern Eigenschaften ausdrücken. Außerdem läßt sich diese Interpretation gut mit Ryles Bemerkung in Einklang bringen, daß nicht-gewöhnliche Prädikate wie „x_1 ist heterologisch" keine linguistischen Informationen über Wörter beinhalten. Gemäß Meager ist Ryle also in der Schlußfolgerung gerechtfertigt, daß IV(51) kein sinnvoller Satz ist, weil man in IV(59) in einen unendlichen Regreß gerät; aber nach Meager dienen die namely-rider in IV(58) und IV(59) dazu, den deskriptiven Gehalt der Prädikate (und nicht implizite Referenz) zu explizieren. Wenn man Meager folgt, kann Ryles Kritik an IV(51) beibehalten werden, ohne daß sein Kriterium alle Aussagen betrifft, die auf sich selbst referieren.

Ryle kommt also – wenn auch auf anderem Wege – zu demselben Resultat wie Lawrence, Wiredu und Goldstein: In IV(51) wird ein Kategorienfehler begangen, deshalb ist die Frage, ob „heterologisch" heterologisch sei, nicht sinnvoll. Diesem Ergebnis hat Landsberg eine verstärkte Version des

[179] Basson wendet gegen das Prädikat „x ist selbstbezüglich" ein, daß es erstens keinen Text für Selbstbezüglichkeit geben kann und zweitens dieses Prädikat zu Paradoxien führt. Basson (1960), S. 27ff.
[180] Siehe Meager (1956).

Grelling-Paradoxes entgegengesetzt.[181] Sein Argument beruht auf folgender Definition von „M-heterologisch“:[182]

IV(60) „X“ ist genau dann M-heterologisch, wenn die Aussage „‚X‘ ist X“ falsch oder sinnlos ist.

Setzt man „M-heterologisch“ für „X“ in IV(60) ein, dann ergibt sich IV(61).

IV(61) „M-heterologisch“ ist genau dann M-heterologisch, wenn die Aussage „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ falsch oder sinnlos ist.

Wenn die Aussage „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ wahr ist, dann folgt, daß sie falsch oder sinnlos ist. Wenn die Aussage „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ falsch ist, dann ist sie falsch oder sinnlos und daher aufgrund von IV(61) wahr. Wenn sie sinnlos ist, dann ist sie falsch oder sinnlos und daher wieder aufgrund von IV(61) wahr. Das Paradox bleibt also erhalten.

Mackie und Smart wenden gegen das verstärkte Grelling-Paradox ein, daß ihm ein neuer Kategorienfehler unterliege.[183] Sie unterscheiden zwischen Sätzen und Behauptungen: Sätze können sinnvoll oder sinnlos sein, Behauptungen sind Äußerungen von sinnvollen Sätzen und können wahr oder falsch sein. Beispielsweise handelt es sich bei IV(62) um einen (sinnvollen) Satz, der dazu verwendet werden kann, eine Behauptung aufzustellen. Wenn

---

[181] Siehe Landsberg (1953). Diskutiert wird das verstärkte Grelling-Paradox unter anderem in Mackie und Smart (1953), Mackie und Smart (1954), Goldstein (1981), Stone (1981) und Goldstein (1982). Goldstein und Stone beschäftigen sich außerdem mit einer weiteren Möglichkeit, das Grelling-Paradox zu modifizieren.

[182] In IV(60) wird der Satz „‚X‘ ist genau dann M-heterologisch“ auf der linken Seite der Bisubjunktion gebraucht und auf der rechten Seite angeführt. Um dies zu vermeiden, könnte man auch folgende Formulierung verwenden:

Die Aussage „‚X‘ ist M-heterologisch“ ist genau dann wahr, wenn die Aussage „‚X‘ ist X“ falsch oder sinnlos ist.

Das Paradox ergibt sich bei dieser Formulierung sogar direkter als bei Landsbergs Version. Denn diese setzt implizit „‚p‘ ist wahr genau dann, wenn p“ voraus.

[183] Siehe Mackie und Smart (1953), Mackie und Smart (1954).

ich eine entsprechende Behauptung artikuliere, ist sie wahr, wenn ein amtierender amerikanischer Präsident IV(62) äußert, ist das Resultat falsch.

IV(62) Ich bin ein Berliner.

Durch die Unterscheidung von Sätzen und Behauptungen versuchen Mackie und Smart zu zeigen, daß IV(60) sinnlos ist. Denn wenn für „X" ein Name einer Behauptung eingesetzt werde, dann sei das Prädikat „x_1 ist sinnlos" auf X nicht anwendbar, und umgekehrt sei das Prädikat „x_1 ist falsch" nicht auf X anwendbar, wenn für „X" ein Name eines Satzes eingesetzt wird. Unabhängig davon, welche Einsetzungsinstanz man für „X" wähle, es werde also ein Kategorienfehler begangen. Demnach sei IV(60) sinnlos.

Daß man ihre Kritik an IV(60) entkräften kann, sehen die beiden Autoren selbst und bringen folgende Version des verstärkten Grelling-Paradoxes, auf das ihr Vorwurf eines Kategorienfehlers nicht mehr zutrifft.

IV(63) „X" ist genau dann M-heterologisch, wenn der Satz „‚X' ist X" sinnlos ist oder gebraucht wird, um eine falsche Behauptung zu aufzustellen.

Dieselbe Diskussion führen Goldstein und Stone (allerdings ohne sich auf Mackie und Smart zu beziehen).[184] Goldstein wendet gegen IV(60) ein, daß ein Kategorienfehler begangen wird, und Stone bringt eine Variante von IV(63) als Verbesserungsvorschlag:

IV(64) „X" ist genau dann M-heterologisch, wenn „‚X' ist X" eine falsche Proposition ausdrückt oder sinnlos ist.

In seiner Replik wendet Goldstein gegen IV(64) ein, daß es kein Subjekt gibt, auf das beide Adjunktionsglieder des Prädikates „x_1 drückt eine falsche Proposition aus oder ist sinnlos" sinnvoll angewendet werden kann.

[184] Vgl. Goldstein (1981), Stone (1981) und Goldstein (1982).

Außerdem werde unabhängig davon in Stones Variante derselbe Kategorienfehler wie in IV(60) begangen, weil „x_1 drückt eine falsche Proposition aus“ nicht auf sinnlose Sätze angewendet werden könne.

Die erste Bemerkung ist kein Einwand, so lange nicht hinreichend begründet worden ist, was gegen Prädikate dieser Art spricht. Das zweite Gegenargument kann durch eine andere, vorsichtigere Formulierung überwunden werden:

IV(65) „X“ ist genau dann M-heterologisch, wenn der Satz „‚X‘ ist X“ sinnlos ist oder eine mit der Intention, eine Behauptung zu treffen, artikulierte Äußerung des Satzes „‚X‘ ist X“ eine falsche Behauptung ist.

Um seine Kritik aufrechtzuerhalten und wieder einen Kategorienfehler zu attestieren, müßte Goldstein sich auf die Position zurückziehen, daß das Prädikat „eine mit der Intention, eine Behauptung zu treffen, artikulierte Äußerung des Satzes x_1 ist eine falsche Behauptung“ nicht sinnvoll auf Sätze angewendet werden könne, in denen ein Kategorienfehler auftritt. Dieser Standpunkt würde dazu führen, daß völlig akzeptable Sätze wie IV(66) als „sinnlos“ eingestuft werden würden.

IV(66) Es ist nicht der Fall, daß eine mit der Intention, eine Behauptung zu treffen, artikulierte Äußerung des Satzes „Cäsar ist prim“ eine falsche Behauptung ist.

Daher komme ich ebenfalls wie Mackie und Smart zu der Einschätzung, daß sich das verstärkte Grelling-Paradox nicht lösen läßt, indem man es auf einen Kategorienfehler zurückführt. Mackie und Smart versuchen es auf einem anderen Weg:

„Nevertheless, the distinction between sentences and statements does enable us to solve it [Grelling's paradox, F.N.]. Since we are talking about *uses* of the sentence S ['M-het.' is M-het., F.N.] we do not have to say simply that S is (always) used to make a true statement, or is (always) used to make a false statement, or is (always) meaningless. For clearly it is possible that on some occasions S is used to make a true statement, on other occasions to make a false statement, and that on others S cannot be used to make a statement at all. We might say that "'M-het.' is M-het." is used to make a true statement when it refers to the fact that *in any other circumstances* "'M-het.' is M-het." could not be used to make a statement, true or false. In other words, the sentence "'M-het.' is M-het." would make no statement the first time you used it (because it would obviously assert nothing), but you can then use the sentence a second time, referring to the first time, and then it will be used to make a true statement. Thus we can accept the argument of (iii), for it ceases to be paradoxical once we see that the protasis refers to one uses of the sentence S, while the apodosis refers to a different use."[185]

Mackie und Smart beziehen sich in dem letzten Satz mit „(iii)" auf den letzten Teil ihrer Herleitung des Paradoxes.

„(iii) If S is meaningless, 'M-het.' is a value of X which satisfies the definition, and so 'M-het.' is M-het., and therefore S is used to make a statement which is true."[186]

In dieser Argumentation ist jeder einzelne Schritt fehlerhaft. Bereits der

[185] Mackie und Smart (1954), S. 148.
[186] Mackie und Smart (1954), S. 147.

Ausgangspunkt, daß der Satz „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" je nach Kontext manchmal gebraucht werden kann, um eine wahre Behauptung aufzustellen, und manchmal gebraucht werden kann, um eine falsche Behauptung aufzustellen, ist offenbar begründungsbedürftig. Die Äußerung von Sätzen wie „2 + 3 = 5" beziehungsweise „2 + 3 = 6" führt in beliebigen Kontexten zu wahren beziehungsweise zu falschen Behauptungen.[187] Dagegen können die auf Sätzen wie IV(62) beruhenden Behauptungen manchmal wahr und manchmal falsch sein. Der Unterschied zwischen arithmetischen Sätzen und IV(62) besteht darin, daß in IV(62) ein deiktischer Ausdruck, nämlich das Personalpronomen „ich", gebraucht wird. Sätze, in denen Pronomen oder andere deiktische Ausdrücke (wie „hier", „dort", „jetzt", „nächste Woche" oder „dieser Hund") gebraucht werden oder in denen implizit auf den Kontext Bezug genommen wird, können manchmal für wahre und manchmal für falsche Behauptungen verwendet werden.[188] Solche Sätze werde ich „lokale Aussagen" nennen.[189] (Ein Beispiel für einen Satz, in dem implizit auf den Kontext Bezug genommen wird, ist der Satz IV(67). Denn mit IV(67) bezieht man sich implizit auf einen bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit.)

IV(67) Es regnet.

IV(68) Es regnet um 15:31 Uhr am 15.05.2001 auf dem Alexanderplatz in Berlin.

---

[187] Vorausgesetzt wird an dieser Stelle, daß die Interpretation der gewählten Sprache nicht verändert wird. Selbstverständlich kann man durch den Gebrauch des Satzes „2 + 3 = 5" manchmal eine falsche und manchmal eine wahre Behauptung aufstellen, wenn man die vorkommenden Zeichen unterschiedlich interpretiert. Beispielsweise könnte man das Zeichen „=" manchmal als die Relation „x_1 ist gleich x_2" und manchmal als die Relation „x_1 ist größer als x_2" (unter Beibehaltung der Standardinterpretation der anderen Zeichen) interpretieren. Wenn Mackie und Smart davon ausgehen, daß Behauptungen von „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" manchmal wahr und manchmal falsch sind, dann meinen sie nicht, daß der Wahrheitswert schwankt, weil „M-heterologisch" unterschiedlich interpretiert wird. Denn die Interpretation von „M-heterologisch" ist durch die Definition IV(63) fixiert.

[188] Diese deiktischen Ausdrücke werden auch „indexikalische Ausdrücke" genannt.

[189] Die Termini „lokale Aussage" und „universale Aussage" wurden von Wessel übernommen. Vgl. Wessel (1998), S. 290.

Die anderen Sätze, die wie arithmetische Sätze immer zu wahren oder immer zu falschen Behauptungen führen, werden „universale Aussagen" genannt. IV(68) ist ein Beispiel für eine kontingente universale Aussage. An der Gegenüberstellung von IV(67) und IV(68) läßt sich außerdem ablesen, wie lokale Aussagen in universale Aussagen umgewandelt werden können.

Linguistische Sätze wie IV(69)-IV(71) enthalten keine deiktischen Ausdrücke und beziehen sich nicht implizit auf den Kontext, es handelt sich also um universale Aussagen. (Wären IV(69)-IV(71) lokale Aussagen, dann müßte es Äußerungsumstände geben, in denen die Behauptung dieser Sätze falsch wäre.)

IV(69) „Laufen" ist ein Verb (des Standarddeutschen zu Beginn des einundzwanzigsten Jahrhunderts).

IV(70) „English" ist ein englisches Wort (des britischen Englisch zu Beginn des einundzwanzigsten Jahrhunderts).

IV(71) „Dreisilbig" ist dreisilbig.

Da es sich bei IV(69)-IV(71) um universale Aussagen handelt, gibt es keinen Grund, weshalb „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" als lokale Aussage eingestuft werden sollte. Deshalb ist meines Erachtens die These sehr unplausibel, daß Äußerungen von „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" je nach Kontext manchmal wahre und manchmal falsche Behauptungen sein sollen.

Ebenfalls sehr seltsam ist die Bemerkung, daß wir nicht annehmen müßten, daß „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" *immer* sinnlos sei. Mackie und Smart scheinen damit zu meinen, daß dieser Satz in bestimmten Äußerungskontexten nicht gebraucht werden kann, um eine Behauptung aufzustellen. Nun, die These, daß Sätze, die wie IV(72) und IV(73) bestimmte deiktische

Ausdrücke beinhalten, in manchen Kontexten nicht verwendet werden können, um Behauptungen aufzustellen, ist sicherlich vertretbar. Beispielsweise ist es schwierig, die mit den Äußerungen von IV(72) und IV(73) getroffenen Behauptungen anzugeben, wenn der Äußerungskontext eine Junggesellenparty ist, auf der weder weibliche Gäste noch Katzen anwesend sind noch über sie gesprochen wurde.

IV(72) Sie ist ein interessanter Gesprächspartner.

IV(73) Diese Katze haart.

Doch erstens handelt es sich bei „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" nicht um einen Satz, der solche deiktischen Ausdrücke enthält. Und zweitens widerspricht es der Art und Weise, wie Mackie und Smart „sinnlos" eingeführt haben, wenn man IV(72) und IV(73) als „sinnlos" bezeichnet. Denn die Behauptung der Sätze IV(72) und IV(73) mag in bestimmten Äußerungskontexten unangebracht, schwer verständlich oder vielleicht auch in einer bestimmten Bedeutung des Wortes ‚sinnlos' sein, aber an den Sätzen IV(72) und IV(73) ist nichts zu beanstanden. So wie Mackie und Smart den Ausdruck „sinnlos" eingeführt haben, bezieht er sich aber nicht auf Behauptungen, sondern auf Sätze. An dieser Stelle begehen Mackie und Smart also denselben Kategorienfehler, den sie Landsberg vorwerfen.

Gänzlich unverständlich ist der folgende Teil des Lösungsvorschlags:

> „We might say that "'M-het' is M-het." is used to make a true statement when it refers to the fact that *in any other circumstances* "'M-het.' is M-het." could not be used to make a statement, true or false."

Wir könnten auch sagen, daß Äußerungen von „‚M-heterologisch' ist M-heterologisch" nur dienstags wahr sind. Allerdings hat man dadurch das Grelling-Paradox nicht gelöst; denn erstens handelt es sich um eine willkürliche Festlegung, und zweitens führt die aus IV(63) abgeleitete Aussage IV(74) zu einem Widerspruch, völlig unabhängig davon, ob man annimmt, daß „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ ein sinnloser Satz ist, oder ob man annimmt, daß mit diesem Satz eine wahre Behauptung getroffen wird, oder ob man annimmt, daß mit diesem Satz eine falsche Behauptung getroffen wird. Wäre es nicht so, gäbe es kein Grelling-Paradox.

IV(74) „M-heterologisch“ ist genau dann M-heterologisch, wenn der Satz „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ sinnlos ist oder gebraucht wird, um eine falsche Behauptung aufzustellen.

Ignorieren wir die Tatsache, daß der mit „In other words“ als nächstes beginnende Satz keinesfalls eine Paraphrase der eben zitierten Annahme ist, und betrachten die Schlußfolgerung von Mackie und Smart. Ihrer Meinung nach wird das Paradox dadurch gelöst, daß sich die Verwendung von S (das heißt „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“) in (iii) auf verschiedene Behauptungen des Satzes „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ bezieht.

„(iii) If S is meaningless, ‘M-het.’ is a value of X which satisfies the definition, and so ‘M-het.’ is M-het., and therefore S is used to make a statement which is true.“[190]

Wenn es der Fall wäre, daß verschiedene Äußerungen des Satzes „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ manchmal wahr und manchmal sinnlos sind, dann wäre (iii), wenn „S“ sich in (iii) auf verschiedene Äußerungen dieses Satzes bezieht, ebensowenig widersprüchlich wie IV(75), unter der Annahme, daß sich die beiden Vorkommen von „‚Hier regnet es jetzt‘“ auf unterschiedliche Behauptungen (zu unterschiedlichen Zeitpunkten an unterschiedlichen Orten) beziehen.

IV(75) „Hier regnet es jetzt“ ist wahr und „Hier regnet es jetzt“ ist falsch.

[190] Mackie und Smart (1954), S. 147.

Da aber „‚M-heterologisch‘ ist M-heterologisch“ zu den Sätzen gehört, die entweder sinnlos sind oder dazu verwendet werden, um immer wahre oder immer falsche Behauptungen aufzustellen, ist (iii) selbst dann widersprüchlich, wenn man annimmt, daß sich „S“ auf unterschiedliche Äußerungen bezieht.[191] Mackie und Smarts Auflösung des verstärkten Grelling-Paradoxes schlägt also fehl.

Der Versuch zu zeigen, daß das Grelling-Paradox dadurch gelöst werden kann, indem man in IV(76) einen Kategorienfehler diagnostiziert, scheitert daran, daß sich das Grelling-Paradox verstärken läßt.

IV(76) „Heterologisch“ ist heterologisch.

Versuchen wir deshalb einen neuen Start. Der sollte damit beginnen, die unglückselige Verquickung von „Wort“ und „Prädikat“ zu vermeiden, die schon in Russells Formulierung des Grelling-Paradoxes vorhanden war. Das Grelling-Paradox so umzuformulieren, daß nur von Prädikaten und den durch sie ausgedrückten Eigenschaften die Rede ist, erleichtert die Darstellung des Paradoxes in der Naiven Prädikatenlogik. Außerdem umgeht man so die oben erwähnten Probleme, die auf der Ambiguität von „Wort“ beruhen. Daß diese Umformulierung den paradoxen Charakter des Grelling-Paradoxes nicht mindert, sieht man an dem Argument IV(77)-IV(79).

IV(77) Ein Prädikat y^{-1} hat genau dann die Eigenschaft, heterologisch zu sein, wenn y^{-1} die Eigenschaft nicht hat, die y^{-1} ausdrückt.

IV(78) „x_1 ist heterologisch“ hat genau dann die Eigenschaft, heterologisch zu sein, wenn „x_1 ist heterologisch“ nicht die Eigenschaft hat, die „x_1 ist heterologisch“ ausdrückt.

[191] Darüber hinaus ist diese Annahme höchst seltsam. Denn die Herleitung des Grelling-Paradoxes beruht auf der Definition IV(63), aus der IV(74) abgeleitet wird, indem „M-heterologisch“ für „X“ eingesetzt wird. Und weder in IV(63), noch in IV(74) ist von unterschiedlichen Behauptungen des Satzes die Rede.

IV(79) „x_1 ist heterologisch“ hat genau dann die Eigenschaft, heterologisch zu sein, wenn „x_1 ist heterologisch“ nicht die Eigenschaft hat, heterologisch zu sein.

Die Formulierung des Grelling-Paradoxes unterscheidet sich nur in vier relevanten Aspekten von der Formulierung des Russell-Paradoxes in Abschnitt 6 von Kapitel II beziehungsweise in Abschnitt 2 von Kapitel IV. Während in dem Russell-Paradox von Eigenschaften – wobei der ontologische Status von Eigenschaften offen bleiben kann – die Rede war, geht es beim Grelling-Paradox eindeutig um Prädikate, also um linguistische Entitäten. Dementsprechend werden die Leerstellen des Prädikates mit Eigennamen von linguistischen Entitäten gefüllt, die in der Regel mit Hilfe von Anführungsstrichen gebildet werden.[192] Nur vermittelt über die Prädikate wird auf die durch sie ausgedrückten Eigenschaften Bezug genommen. Aus diesem Grund bedarf es bei der Herleitung des Grelling-Paradoxes der zusätzlichen Relation „x_1 drückt x_2 aus“ und des Schrittes von IV(78) zu IV(79), den es in dieser Form bei der Herleitung des Russell-Paradoxes nicht gab. Darüber hinaus wird implizit von der Prämisse Gebrauch gemacht, daß das Prädikat „x_1 ist heterologisch“ die Eigenschaft, heterologisch zu sein, (und nur diese Eigenschaft) ausdrückt.

Berücksichtigt man dies, dann ergeben sich anstatt der Zeilen (i) und (ii) im zweiten Abschnitt dieses Kapitels[193] die folgenden Zeilen als Formalisierung des Arguments IV(77)-IV(79).

(i) $HET^1(x^{-1}) \equiv_{df} \exists Y^1!(AUS^2(x^{-1}, Y^1) \wedge \sim Y^1(x^{-1}))$

(ii) $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1) \wedge AUS^2(k^{-1}, HET^1)$

[192] Es wäre an dieser Stelle möglich, analog zu der Diskussion des Wortbegriffs wieder unterschiedliche Verwendungsweisen der Anführungsstriche zu unterscheiden. Es ist aber unnötig für die Lösung des Grelling-Paradoxes, sich auf eine bestimmte Funktion der Anführungsstriche festzulegen.

[193] Siehe Seite 159.

(iii) $HET^1(k^{-1}) \equiv \exists Y^1!(AUS^2(k^{-1}, Y^1) \wedge \sim Y^1(k^{-1}))$

(iv) $HET^1(k^{-1}) \equiv \sim HET^1(k^{-1})$

Um die Darstellung einfach zu halten, wurden in (i)-(iv) die Namenschemata k^{-1}, x^{-1}, Y^1 verwendet. Dabei steht k^{-1} für den durch Anführungszeichen gebildeten Namen des Prädikats „x_1 ist heterologisch", also für „„x_1 ist heterologisch"". AUS^2 ist ein Name irgendeiner zweistelligen Eigenschaftskonstante, die – intuitiv gesprochen – für das Prädikat „x_1 drückt x_2 aus" stehen soll. Der Ausdruck $\exists Y^1!$ A soll bedeuten, daß es genau ein Y^1 gibt, das die Bedingung A erfüllt. Dadurch, daß $\exists Y^1!$ anstatt $\exists Y^1$ in (i) steht, soll der Tatsache Rechnung getragen werden, daß bei der Herleitung des Grelling-Paradoxes von *der* Eigenschaft, die ein Prädikat ausdrückt, die Rede ist.[194] (ii) konstatiert die zusätzliche Prämisse über den Zusammenhang zwischen dem Prädikat „x_1 ist heterologisch" und der Eigenschaft, heterologisch zu sein. Die Verknüpfung zwischen (iii) und (iv) besteht darin, daß der durch k^{-1} repräsentierte, in den natürlichen Sprachen durch Anführungsstriche gebildete Eigenname das Prädikat „x_1 ist heterologisch" bezeichnet und dieses Prädikat tatsächlich genau eine Eigenschaft ausrückt, nämlich die Eigenschaft, heterologisch zu sein.

Im Unterschied zu Zeile (ii) im zweiten Abschnitt dieses Kapitels steht in (iv) nicht das Zeichen „$\vdash$". Denn durch das angegebene Argument wurde $HET^1(k^{-1}) \equiv \sim HET^1(k^{-1})$ (nicht einmal vermeintlich) als Theorem der Naiven Prädikatenlogik hergeleitet. Dies liegt daran, daß die Prämisse (ii) bei der Herleitung von (iv) eine Rolle gespielt hat. Selbst wenn das oben angegebene Argument korrekt sein sollte, wurde also nur gezeigt, daß $\{\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1) \wedge AUS^2(k^{-1}, HET^1)\} \vdash HET^1(k^{-1}) \equiv \sim HET^1(k^{-1})$ gilt.

[194] Daß sich der Quantor „$\exists X!$" nur in der Naiven Prädikatenlogik definieren läßt, wenn man die Naive Prädikatenlogik um Regeln für die Identität erweitert, ist in diesem Zusammenhang unerheblich und soll deshalb vernachlässigt werden.

Das schmälert jedoch – gemäß Definition IV(6) – den paradoxen Charakter des Arguments IV(77)-IV(79) nicht, wenn die Aussage, die durch die Formel $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1) \wedge AUS^2(k^{-1}, HET^1)$ repräsentiert wird, evidenter Weise wahr ist.

Auch wenn sich das Grelling-Paradox in einigen sehr interessanten Details von dem Russell-Paradox unterscheidet, so bleibt doch der Lösungsweg ähnlich. Die Teilformel $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1)$ von Zeile (ii) steht für die folgende Aussage: Für den durch k^{-1} repräsentierten, durch Anführungsstriche gebildeten Namen eines Prädikates gibt es genau eine Eigenschaft Y, so daß die Eigenschaft Y durch das von k^{-1} bezeichnete Prädikat ausgedrückt wird. Da k^{-1} ein Name von „x_1 ist heterologisch" ist und „x_1 ist heterologisch" als „x_1 hat nicht die Eigenschaft, die x_1 ausdrückt" definiert ist, ist k^{-1} ein Name von „x_1 hat nicht die Eigenschaft, die x_1 ausdrückt". Also lautet die durch $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1)$ repräsentierte Prämisse: Für den durch k^{-1} repräsentierten, durch Anführungsstriche gebildeten Namen eines Prädikates gibt es genau eine Eigenschaft, die durch das von k^{-1} bezeichnete Prädikat ausgedrückt wird, nämlich die Eigenschaft, ein x_1 zu sein derart, daß x_1 die Eigenschaft nicht hat, die x_1 ausdrückt. $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1)$ repräsentiert also eine Annahme über die Existenz einer Eigenschaft, die durch ein komplexes Prädikat ausgerückt wird. Wie aber bereits festgestellt wurde, drückt nicht jedes komplexe Prädikat eine Eigenschaft aus. Deshalb ist steht $\exists Y^1!AUS^2(k^{-1}, Y^1)$ und damit die Zeile (ii) nicht für eine evidente, wahre Annahme, und folglich führt (i)-(iv) nicht zu einem Paradox, sondern zu einem indirekten Beweis für die Negation von (ii).

Die Zeile (ii) ist nur evidenterweise wahr, wenn man k^{-1} nicht als Namen eines komplexen Ausdrucks, sondern als Namen des *einfachen* Prädikates

„x_1 ist heterologisch" auffaßt.[195] In diesem Fall ist IV(77) keine Definition im engeren, sondern im weiteren Sinne; und daher müßte Zeile (i) durch Zeile (v) ersetzt werden.

(v) Es sei „Het^1" ein Name einer einstelligen Eigenschaftskonstante, so daß gilt:

$$\vdash \forall x^{-1}(HET^1(x^{-1}) \equiv_{df} \exists Y^1!(AUS^2(x^{-1}, Y^1) \wedge \sim Y^1(x^{-1})))$$

Wählt man (v) als Ausgangspunkt, dann wird die Existenz der Eigenschaft, ein x_1 zu sein, so daß x_1 die Eigenschaft nicht hat, die x_1 ausdrückt, nicht mehr von (ii) vorausgesetzt, – aber dafür von Zeile (v). Denn in (v) wird – analog zu Zeile (vii) im dritten Abschnitt dieses Kapitels – vorausgesetzt, daß es eine einstellige Eigenschaftskonstante F^1 gibt, für die das Theorem $\vdash \forall x^{-1}(F^1(x^{-1}) \equiv \exists Y^1!(AUS^2(x^{-1}, Y^1) \wedge \sim Y^1(x^{-1})))$ gilt. Der auftretende Widerspruch ist ein Beweis dafür, daß diese Annahme falsch ist. Sowohl die Herleitung des Russell-Paradoxes der Prädikation als auch die des Grelling-Paradoxes beruhen auf demselben Fehler. Zu Anfang wird ein neuer Ausdruck eingeführt, in dem ein neues Wort wie „heterologisch" vorkommt. Wenn es sich dabei um eine definierte Abkürzung eines komplexen Ausdrucks handelt, dann besteht der Fehler darin, daß etwas als einfaches Prädikat behandelt wird, was kein einfaches Prädikat ist. Wenn es sich dabei um die Einführung eines Prädikates handeln soll, dann wird bei der Einführung des Prädikates vorausgesetzt, daß es die Eigenschaft gibt, die dieses Prädikat ausdrücken soll. Das Auftreten eines Widerspruchs ist dann der indirekte Beweis dafür, daß es diese Eigenschaft nicht gibt.

[195] Daß jedes einfache Prädikat – gemäß der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie – eine Eigenschaft ausdrückt liegt einfach daran, wie der Ausdruck „Eigenschaft" in Kapitel II eingeführt wurde. Daß es genau eine Eigenschaft ist, ergibt sich daraus, daß Prädikate Bestandteile von Aussagen sind und Aussagen das Ergebnis von Paraphrasen sind, die unter anderem dazu dienen, Mehrdeutigkeiten in den natürlichen Sprachen zu beseitigen.

V Fazit

Am Anfang dieser Arbeit wurde die Frage aufgeworfen, welchen logischen Regeln unser Reden über Eigenschaften folgt. Als Antwort wurde die Naive Prädikatenlogik präsentiert: Die Naive Prädikatenlogik ist ein paradoxienfreies logisches System, in dem (nominalisierte) Prädikate in Argumentpositionen zugelassen sind und in dem deshalb über Eigenschaften prädiziert und quantifiziert werden kann; dies wurde ohne eine Typenhierarchie oder eine vergleichbare syntaktische Einschränkung in der Sprache der Naiven Prädikatenlogik ermöglicht. Gleichwohl handelt es sich bei der Naiven Prädikatenlogik um eine mehrsortige Prädikatenlogik *erster* Stufe. Daß in der ‚normalen' Prädikatenlogik erster Stufe Prädikatenzeichen nicht die Argumentpositionen einnehmen können, ist also eine unnötige syntaktische Einschränkung, die sich historisch als überflüssiges Rudiment der Hierarchien in der verzweigten Typentheorie erklären läßt. Inhaltlich spricht gegen diese Restriktion, daß es viele Aussagen in den natürlichen Sprachen gibt, in denen über Eigenschaften quantifiziert und prädiziert wird, und daß aufgrund der entbehrlichen Beschneidung der logischen Sprache diese Aussagen nicht adäquat in einer ‚normalen' Prädikatenlogik erster Stufe dargestellt werden können.

Der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Naiven Prädikatenlogik ist die Beobachtung, daß es zwei verschiedene Möglichkeiten zu prädizieren gibt. Einerseits kann man ein (nicht-nominalisiertes) Prädikat verwenden, andererseits das entsprechende nominalisierte Prädikat und die Kopula „haben". Es handelt sich um zwei verschiedene sprachliche Realisierungen derselben Prädikation. Da es sich um dieselbe Prädikation handelt, sind die resultierenden Aussagen äquivalent, der einzige signifikante Unterschied besteht darin, daß bei der zweiten Möglichkeit anstatt des (nicht-nominalisierten) Prädikates die Kopula und ein prädikativ verwendetes nominalisiertes Prädikat gebraucht werden. Diesen Zusammenhang kann man dazu verwenden, alle Aussagen so umzuformen, daß in ihnen keine (nicht-nominalisierten) Prädikate mehr vorkommen.

Hat man erst einmal realisiert, daß sich die (nicht-nominalisierten) Prädikate ‚wegparaphrasieren' lassen, dann liegt die Möglichkeit auf der Hand, eine logische Sprache zu entwickeln, in der auf die üblichen Zeichen, die Prädikate repräsentieren sollen, zunächst verzichtet wird; sie können später problemlos durch Definitionen eingeführt werden. Die Sprache der naiven Prädikatenlogik ist eine Umsetzung dieser Idee. Um die nominalisierten Prädikate zu repräsentieren, wird den üblichen Konstanten für Gegenstände Konstanten für Eigenschaften hinzugefügt. Das einzige Prädikatenzeichen der Sprache der Naiven Prädikatenlogik ist das Zeichen für die Kopula. Bei der Sprache der Naiven Prädikatenlogik handelt es sich deshalb eigentlich um die Sprache einer mehrsortigen Prädikatenlogik. Dies ist allerdings nur die halbe Wahrheit. Denn gemäß der intendierten Lesart werden Gegenstände nicht in verschiedene Kategorien eingeteilt und deshalb auch keine verschiedenen Sorten von Gegenstandskonstanten unterschieden. Vielmehr stehen den Gegenstandskonstanten die Eigenschaftskonstanten gegenüber, die für nominalisierte Prädikate stehen. Das einzige Prädikatenzeichen dieser Sprache repräsentiert nicht ein Prädikat, sondern, wie gesagt, die Kopula. Auf der Basis des Prädikatenzeichens und der Eigenschaftskonstanten lassen sich Ausdrücke definieren, die Aussagen repräsentieren können, in denen (nicht-nominalisierte) Prädikate vorkommen.

Da es sich bei dem logischen Kern der Naiven Prädikatenlogik um eine mehrsortige Prädikatenlogik erster Stufe handelt, konnten die Korrektheit, die Widerspruchsfreiheit, die Kompaktheit und die Vollständigkeit bewiesen werden. Ferner wurde gezeigt, weshalb die Vollständigkeit der Naiven Prädikatenlogik nicht im Widerspruch zum ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz steht.

Das Rätsel, weshalb die Naive Prädikatenlogik paradoxienfrei ist, wurde ebenfalls gelöst. Sowohl die Herleitung des Russell-Paradoxes als auch die des Grelling-Paradoxes beginnen mit einer ‚Definition'. Eine Definition im engeren Wortsinn ist die Einführung eines neuen sprachlichen Ausdrucks für einen anderen sprachlichen Ausdruck; oft dient der neue sprachliche Ausdruck zur Abkürzung des alten. Solche Definitionen sind immer erlaubt, weil mit ihnen keine inhaltlichen Annahmen verknüpft sind. Versteht man die sogenannten ‚Definitionen' des Russell-Paradoxes und des Grelling-Paradoxes als Definitionen in diesem engeren Sinn, dann besteht eine Fehlerquelle bei der Herleitung der Paradoxien darin, daß Teile von definierten Ausdrücken als Konstanten behandelt werden. Oft versteht man unter „Definition" aber etwas anderes, nämlich die Einführung eines Namens für etwas, das man durch eine definite Deskription beschreibt. Eine derartige Einführung eines Namens kann aber nur dann erfolgreich sein, wenn es etwas gibt, das der Deskription genügt – das gilt auch für Eigenschaften. Da sich die Naive Prädikatenlogik genauso wie eine Prädikatenlogik erster Stufe oder jede andere gute logische Theorie neutral zu Aussagen über die Existenz von Eigenschaften verhält, gibt es kein Theorem der Naiven Prädikatenlogik, das die Existenz der Russell-Eigenschaft beziehungsweise der Heterologisch-Eigenschaft garantieren würde. Die Widersprüche sind also in diesen Fällen korrekt hergeleitet, aber sie beruhen jeweils auf der Annahme, daß die fragliche Eigenschaft existiert. Die Tatsache, daß diese Annahmen zu Widersprüchen führen, ist nicht paradox, sondern ein indirekter Beweis dafür, daß es diese Eigenschaften nicht gibt.

VI Literaturverzeichnis

A. H. Basson: Propositional Functions, Part I. *The Aristotelian Society – Supplementary Volume 34*, 1960, 25-32.

George Bealer: Theories of Properties, Relations, and Propositions. *The Journal of Philosophy*, 76, 1979, 634-648.

George Bealer: *Quality and Concept.* Clarendon Press, Oxford, 1982.

George Bealer: Completeness in the Theory of Properties, Relations, and Propositions. *The Journal of Symbolic Logic,* 48, 1983, 415-426.

George Bealer: On the Identification of Properties and Propositional Functions. *Linguistics and Philosophy*, 12, 1989, 1-14.

George Bealer und Uwe Mönnich: Property Theories. In D. Gabbay & F. Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. IV. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Bosten, Lancaster, 1989, 133-251.

Johan van Benthem und Kees Doets: Higher-order Logic. In D. Gabbay & F. Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. I. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Bosten, Lancaster, 1983, 275-329.

E. W. Beth: Some Remarks on Dr. Perelman's Essay on Logical Antinomies. *Mind*, 45, 1936, 487-488.

Bernard Bolzano: *Wissenschaftslehre §§ 1-45*. (= Band 11, Teil 1 der Bernard Bolzano-Gesamtausgabe). F. Frommann Verlag, Stuttgart, Bad Cannstatt, 1985.

George S. Boolos: On Second-Order Logic. *The Journal of Philosophy*, 72, 1975, 509-527.

George Boolos: To Be is to Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables). In George Boolos: *Logic, Logic and Logic*. Harward University Press, Cambridge (Massachusetts), London, 1998. (Nachdruck aus *The Journal of Philosophy*, 81, 1984, 430-449.)

David Bostock: A Study of Type-Neutrality. *Journal of Philosophical Logic*, 9, 1980, 211-296 und 363-414.

Leon Bowden: Heterologicality. *Analysis*, 12, 1952, 77-81.

Joshua C. Gregory: Heterological and Homological. *Mind*, 61, 1952, 85-88.

Rudolf Carnap: *Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*. Springer, Wien, 1954.

Hector-Neri Castañeda: Ontology and Grammar: I. Russell's paradox and the general theory of properties in natural language. *Theoria*, 42, 1976, 44-92.

Gennaro Chierchia und Raymond Turner: Semantics and Property Theory. *Linguistics and Philosophy*, 11, 1988, 261-302.

Alonzo Church: A Formulation of the Simple Theory of Types. *The Journal of Symbolic Logic*, 5, 1940, 56-69.

Alonzo Church: Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types. *Erkenntnis*, 10, 1976, 407-411.

Alonzo Church: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, Princeton, 1996.

Nino B. Cocchiarella: Properties as Individuals in Formal Ontology. *Noûs*, 6, 1972, 165-187.

Nino B. Cocchiarella: Whither Russell's Paradox of Predication? In M. K. Munitz (Hrsg.): *Logic and Ontology*. New York University Press, New York, 1973, 133-158.

Nino B. Cocchiarella: A New Formulation of Predicative Second Order Logic. *Logique et Analyse*, 65-66, 1974, 61-87.

Nino B. Cocchiarella: Second Order Theories of Predication: Old and New Foundations. *Noûs*, 9, 1975, 33-53.

Nino B. Cocchiarella: On the Logic of Nominalized Predicates and Its Philosophical Interpretations. *Erkenntnis*, 13, 1978, 339-369.

Nino B. Cocchiarella: *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals*. Bd. 2 von *Indices*, Bibliopolis Press, Naples, 1986.

Nino B. Cocchiarella: Philosophical Perspectives on Formal Theories of Predication. In D. Gabbay & F. Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. IV. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Bosten, Lancaster, 1989, 253-326.

Nino B. Cocchiarella: Property Theory. In *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Bd. 7. Routledge, London und N.Y., 1998, 761-767.

Duden: Duden. *Grammatik der deutschen Gegenwartssprache*. Dudenverlag, Mannheim u.a., 1995.

J. Michael Dunn und Nuel D. Belnap, Jr.: The Substitution Interpretation of the Quantifiers. *Noûs*, 2, 1968, 177-185.

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.

Wolfgang Eichler und Karl-Dieter Bünting: *Deutsche Grammatik. Form, Leistung und Gebrauch der Gegenwartssprache*. Beltz, Weinheim, Basel, 1996.

Peter Eisenberg: *Grundriß der deutschen Grammatik*. Metzler, Stuttgart, 1994.

Matti Eklund: On how Logic became First-Order. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1 (No. 2), 1996, 147-167.

Herbert B. Enderton: *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1972.

Ulrich Engel: *Syntax der deutschen Gegenwartssprache*. Schmidt, Berlin, 1994.

Salomon Feferman: Systems of Predicative Analysis. *The Journal of Symbolic Logic*, 29, 1964, 1-30.

Salomon Feferman: Toward Useful Type-Free Theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 49, 1984, 75-111.

Gottlob Frege: *Grundgesetze der Arithmetik – Begriffsschrifftlich abgeleitet*. Zweite unveränderte Auflage, Georg Olms, Hildesheim, 1962.

Gottlob Frege: Brief an Russell vom 22.06.1902. In Gottlob Frege: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. II. (Herausgegeben. von Gottfried Gabriel et al.) Meiner, Hamburg, 1976, S. 212-215.

P. J. Fritzpatrick: 'Heterological' and Namely-Riders. *Analysis*, 22, 1961, 18-22.

L.T.F. Gamut: *Logic, Language and Meaning: Introduction to Logic*. University of Chicago Press, 1991. [= Gamut(1991a)]

L.T.F. Gamut: *Logic, Language and Meaning 2: Intensional Logic and Logical Grammar*. University of Chicago Press, 1991. [= Gamut (1991b)]

P. T. Geach: Mr. Ill-Named. *Analysis*, 9, 1948, 14-16.

P. T. Geach: Ryle on Namely-Riders. *Analysis*, 21, 1961, 64-67.

P. T. Geach: Namely-Riders Again. *Analysis*, 22, 1962, 92-94.

Kurt Gödel: The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In Jean van Heijenoort (Hrsg.): *From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logic, 1979-1931*. Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1971, 582-591.

Kurt Gödel: Russell's mathematical logic. In Solomon Feferman (Hrsg.): *Kurt Gödel – Collected Works. Volume II, Publications 1938-1974*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1990, 119-141.

Laurence Goldstein: Categories of Linguistic Aspects and Grelling's Paradox. *Linguistics and Philosophy*, 4, 1981, 405-421.

Laurence Goldstein: Linguistic Aspects, Meaninglessness and Paradox: A Rejoinder to John David Stone. *Linguistics and Philosophy*, 4, 1982, 579-592.

Joshua C. Gregory: Heterological and Homological. *Mind*, 61, 1952, 85-88.

Kurt Grelling und Leonard Nelson: Bemerkung zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. *Abhandlungen der Fries'schen Schule N.F.* Band 2, Heft 3, 1908, 301-334.

Kurt Grelling: The Logical Paradoxes. *Mind*, 45, 1936, 480-486.

Reinhardt Grossmann: Russell's Paradox and Complex Properties. *Noûs*, 6, 1972, 153-164.

Susan Haack: *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, London, New York, Melbourne, 1978.

G. Hasenjaeger: Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. *The Journal of Symbolic Logic*, 18, 1953, 42-48.

Gerhardt Helbig und Joachim Buscha: *Deutsche Grammatik. Ein Handbuch für den Ausländerunterricht*. Verlag Enzyklopädie, Leibzig, 1994.

Leon Henkin: The Completeness of the First-Order Functional Calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, 14, 1949, 159-166.

Leon Henkin: Completeness in the Theory of Types. *The Journal of Symbolic Logic*, 15, 1950, 81-91.

Elke Hentschel und Harald Weydt: *Handbuch der Deutschen Grammatik*. De Gruyter, Berlin, 1994.

David Hilbert und Wilhelm Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949.

David Hilbert: Brief an Frege vom 07.11.1903. In Gottlob Frege: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. II. (Hrsg. von Gottfried Gabriel et al.) Meiner, Hamburg, 1976, 79-80.

Edmund Husserl: *Aufsätze und Rezensionen (1890–1910) mit ergänzenden Texten*. Hrsg. von Bernhard Rang, (= Husserliana. Edmund Husserl, Gesammelte Werke: XXII). Martinus Nijhoff, The Hague, Boston, London, 1979.

J. N. Killalea: Primeness and Heterologicality. *Analysis*, 14, 1953, 20-24.

Reinhard Kleinknecht und Eckehard Wüst: *Lehrbuch der elementaren Logik* (2 Bd.). Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1976.

Reinhard Kleinknecht: Referentielle und substitutionelle Logik. In Uwe Scheffler und Klaus Wuttich (Hrsg.): *Terminigebrauch und Folgebeziehung – Festband zu Ehren von Professor Horst Wessel*. Logos-Verlag, Berlin, 1998, 201-214.

Gyula Klima: The Medieval Problems of Universals. In Edward N. Zalta (Hrsg.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* Version vom 10.09.2000.
URL = http://plato.stanford.edu/entries/universals-medieval/

Karl-Heinz Krampitz: *Prädikation, Quantoren, Existenz. Ein Beitrag zur philosophischen Logik.* Phil. Diss. Humboldt-Universität zu Berlin, 1990.

Karl-Heinz Krampitz: Zur logischen Analyse eines Existenzbegriffes. In Horst Wessel (Hrsg.): *Komplexe Logik. Symposium zu Ehren von Alexander Sinowjew. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität zu Berlin, Reihe Geistes- und Sozialwissenschaften*, 41 (9), 1992, 23-29.

Karl-Heinz Krampitz, Uwe Scheffler und Horst Wessel: Time, Truth and Existence. In Jan Faye, Uwe Scheffler, Max Urchs (Hrsg.): *Perspectives on Time*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1997, 345-365.

Wilfried Kürschner: *Grammatisches Kompendium*. Systematisches Verzeichnis grammatischer Grundbegriffe. Francke, Tübingen u.a., 1993.

P. T. Landsberg: On Heterological Paradoxes. *Mind*, 62, 1953, 379-381.

Shaughan Lavine: Quantification and Ontology. *Synthese*, 124, 2000, 1-43.

Nathaniel Lawrence: Heterology and Hierarchy. *Analysis*, 10, 1950, 77-83.

Hugues Leblanc: *Truth-value semantics*. North-Holland, Amsterdam, 1976.

Hugues Leblanc: Alternatives to Standard First-Order Semantics. In D. Gabbay & F. Guenthner (Hrsg.): *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. I. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Bosten, Lancaster, 1983, 188-274.

Hans-Heinrich Lieb: *Integrational Linguistics. Vol. I. General Outline*. (= Current Issues in Linguistic Theory 17). Benjamins, Amsterdam, Philadelphia, 1983.

Hans-Heinrich Lieb: Conceptual meaning in natural languages. *Semiotica*, 57, 1985, 1-12.

Hans-Heinrich Lieb: Integrational Linguistics. Outline of a theory of language. In Hans-Heinrich Lieb (Hrsg): *Prospects for a New Structuralism*. (= Current Issues in Linguistic Theory 96), Benjamins, Amsterdam, Philadelphia, 1992, 127-182.

Hans-Heinrich Lieb: Paradigma und Klassifikation. Explikation des Paradigmenbegriffs. *Zeitschrift für Sprachwissenschaft*, 11, 1993, 3-46. [= Lieb(1993a)]

Hans-Heinrich Lieb: Integrational Linguistics. In Joachim Jacobs [et al.] (Hrsg.): *Syntax: Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung / An International Handbook of Contemporary Research,* Bd. 1. (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 9.1), Berlin etc., 1993, 430-468. [= Lieb (1993b)]

J. L. Mackie und J. J. C. Smart: A Variant of the ‘Heterological’ Paradox. *Analysis*, 13, 1953, 61-65.

J. L. Mackie und J. J. C. Smart: A Variant of the ‘Heterological’ Paradox – A Further Note. *Analysis*, 14, 1954, 146-148.

Concha Martínez-Vidal: Is Second-order Logic Logic? In Timothy Childers (Hrsg.): *The Logica Yearbook 1999*. Filosofia, Prague 2000, 22- 36.

Alan McMichael und Ed Zalta: An Alternative Theory of Nonexistent Objects. *Journal of Philosophical Logic*, 9, 1980, 297-313.

Ruby Meager: Heterologicality and the Liar. *Analysis*, 16, 1956, 131-37.

Elliott Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*. D. van Nostrand, Princeton, Toronto u.a., 1964.

Christopher Menzel: Critical Review of E. Zalta: Intensional Logic and the Metaphysics of Intentionality. *The Journal of Symbolic Logic*, 57, 1992, 1146-1150.

Robert K. Meyer: Identity in Cochiarella’s T*. *Noûs*, 6, 1972, 189-197.

Fabian Neuhaus und Uwe Scheffler: Alter Wein frisch abgefüllt. Explikation und Expansion von Analytizität. In Volker Gerhardt, Rolf-Peter Horstmann und Ralph Schuhmacher: *Kant und die Berliner Aufklärung. Akten des IX. Internationalen Kant-Kongress*, Band V. de Gruyter, Berlin, New York, 2001, 45-54.

Francesco Orilia: Type Free Property Theory, Exemplification and Russell's Paradox. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32 (3), 1991, 432-447.

Charles Parson: A Plea for Substitutional Quantification. *The Journal of Philosophy*, 68, 1971, 231-237.

Charles Parson: Introductory note to 1944. In Solomon Feferman (Hrsg.): *Kurt Gödel – Collected Works. Volume II, Publications 1938-1974*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1990, 102-118.

Volker Peckhaus: The Genesis of Grelling's Paradox. In Ingolf Max (Hrsg.): *Logik und Mathematik: Frege-Kolloquium Jena 1993*. De Gruyter, Hawthorne, 1995, 269-280.

Karl R. Popper: Self-Reference and Meaning in Ordinary Language. *Mind*, 63, 1954, 162-169.

Hillary Putnam: On Properties. In Nicholas Rescher (Hrsg): *Essays in Honor of Carl G. Hempel*. Reidel, Dordrecht, 1969.

Willard Van Orman Quine: On a So-Called Paradox. *Mind,* 62, 1953, 65-67.

Willard Van Orman Quine: *Philosophy of logic*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

Willard Van Orman Quine: Zwei Dogmen des Empirismus. In Willard Van Orman Quine: *Von einem logischen Standpunkt*. Ullstein, Frankfurt am Main, Berlin, Wien, 1979, 27-50.

Willard Van Orman Quine: Über die Individuation von Eigenschaften. In Willard Van Orman Quine: *Theorien und Dinge*. Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1985, 128-142.

Willard Van Orman Quine: *The Roots of Reference*. Open Court, La Salle, Illinois, 1990.

Willard Van Orman Quine: Logic and the Reification of Universals. In Willard Van Orman Quine: *From a Logical Point of View*. Harvard University Press, Cambridge, London, 1999, 102-124.

Frank P. Ramsey: *Grundlagen: Abhandlungen zur Philosophie. Logik, Mathematik und Wirtschaftswissenschaft*. Stuttgart, Bad Cannstatt, Frommann-Holzboog, 1980.

Bertrand Russell: *The Principles of Mathematics*. George Allen & Unwin, London, 1951.

Bertrand Russell: *An Inquiry into Meaning and Truth.* George Allen & Unwin, London, 1961.

Bertrand Russell: My Mental Development. In Paul Arthur Schilpp (Hrsg.): *The Philosophy of Bertrand Russell*. Open Court, La Salle, Illinois, 1971, 1-20. [= Russell (1971a)]

Bertrand Russell: Mathematical logic as based on the theory of types. In Jean van Heijenoort (Hrsg.): *From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logic, 1979-1931*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, 1971, 150-182. (Wiederabdruck aus *American Journal of Mathematics*, 30, 1908, 222-262.) [= Russell (1971b)]

Bertrand Russell: Brief an Frege vom 16.06.1902. In Gottlob Frege: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. II. (Hrsg. von Gottfried Gabriel et al.) Meiner, Hamburg, 1976, 211-212. [= Russell (1976a)]

Bertrand Russell: Brief an Frege vom 24.06.1902 .In Gottlob Frege: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. II. (Hrsg. von Gottfried Gabriel et al.) Meiner, Hamburg, 1976, 215-217. [= Russell (1976b)]

Gilbert Ryle: Heterologicality. *Analysis*, 11, 1951, 61-68.

John R. Searle: *Sprechakte*. Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1997.

Stewart Shapiro: *Foundations without Foundationalism*. Clarendon Press, Oxford, 1991.

Yaroslav Shramko: A Theory of Relevant Properties 1: Reflections and Definitions. *Theoria - Segunda Época*, 14/1, 1999, 63-81. [= Shramko (1999a)]

Yaroslav Shramko: *Intuitionismus und Relevanz*. Logos-Verlag, Berlin, 1999. [= Shramko (1999b)]

A. Sinowjew und H. Wessel: *Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

B. H. Slater: Is “Heterological” Heterological? *Mind*, 82, 1973, 439-440.

Karl Sommerfeldt und Günter Starke: *Einführung in die Grammatik der deutschen Gegenwartssprache*. Niemeyer, Tübingen, 1992.

John David Stone: Meaninglessness and Paradox: Some Remarks on Goldstein's Paper. *Linguistics and Philosophy*, 4, 1981, 423-429.

Chris Swoyer: Complex Predicates and Conversion Principles. *Philosophical Studies*, 87, 1997, 1-32.

Chris Swoyer: Complex Predicates and Logics for Properties and Relations. *Journal of Philosophical Logic*, 27, 1998, 295-325.

Chris Swoyer: Properties. In Edward N. Zalta (Hrsg.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* Version vom 17.12.2000. URL = http://plato/stanford.edu/entries/properties.

Ray Turner: A Theory of Properties. *The Journal of Symbolic Logic*, 52, 1987, 455-472.

Horst Wessel: Vollständigkeit der nichttraditionellen Prädikationstheorie. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, 30 (11), 1982, 1363-1368.

Horst Wessel: Existenz, Ununterscheidbarkeit, Identität. In Horst Wessel (Hrsg.): *Komplexe Logik. Symposium zu Ehren von Alexander Sinowjew. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität zu Berlin, Reihe Geistes- und Sozialwissenschaften*, 41 (9), 1992, 30-39.

Horst Wessel: Grundlagen einer Theorie der Termini. *Zeitschrift für Semiotik*, 17 (3-4), 1995, 355-367.

Horst Wessel: Existenzbelastung in der klassischen Quantorentheorie mit nichttraditioneller Prädikationstheorie. In Mieczyslav und Omyla (Hrsg.): *Sklonnosc Metafizyczna*, Warszawa, 1997, 176-182.

Horst Wessel: *Logik*. Logos-Verlag, Berlin, 1998.

J. E. Wiredu: Paradoxes. *Second Order – An African Journal of Philosophy*, 5, 1976, 3-26.

Edward Zalta: *Abstract Objects*. D. Reidel, Dordrecht, 1983.

Edward Zalta: A Comparison of Two Intensional Logics. *Linguistics and Philosophy*, 11, 1988, 59-89.

Ernst Zermelo: Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, 65, 1908, 107-128.

Logische Philosophie

Hrsg.: H. Wessel, U. Scheffler, Y. Shramko und M. Urchs

In der Reihe „Logische Philosophie“ werden philosophisch relevante Ergebnisse der Logik vorgestellt. Dazu gehören insbesondere Arbeiten, in denen philosophische Probleme mit logischen Methoden gelöst werden.

Die logischen Regeln, die unseren naiven Redeweisen über Eigenschaften zugrunde liegen, scheinen evident und sind für sich alleine betrachtet völlig harmlos - zusammen sind sie jedoch widersprüchlich. Das entstehende Paradox, das Russell-Paradox, löste die sogenannte Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts aus. Der klassische Weg, mit dem Russell-Paradox umzugehen, ist eine Vermeidungsstrategie: Die logische Analysesprache wird so beschränkt, daß das Russell-Paradox nicht formulierbar ist.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg aufgezeigt, wie man das Russell-Paradox und das verwandte Grelling-Paradox lösen kann. Dazu werden die relevanten linguistischen Daten anhand von Beispielen analysiert und ein angemessenes formales System aufgebaut, die Naive Prädikatenlogik.

Logos Verlag Berlin

ISBN 3–8325–0556–3