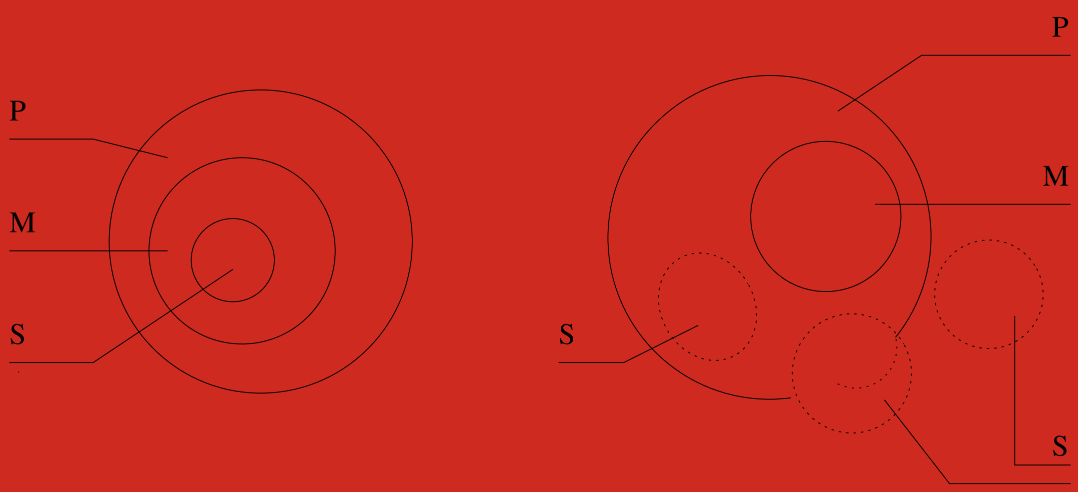
Elena Tatievskaya

Einführung in die Aussagenlogik



λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/0004

Elena Tatievskaya

Einführung in die Aussagenlogik

Logos Verlag Berlin

λογος

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

ISBN 3-8325-0004-9

Logos Verlag Berlin
Comeniushof, Gubener Str. 47,
10243 Berlin
Tel.: +49 030 42 85 10 90
Fax: +49 030 42 85 10 92
INTERNET: http://www.logos-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Idee, Logik in der Form einer Sprache zu präsentieren, geht auf Frege zurück. Obwohl sich dieser Gedanke mit der Forderung, eine (wissenschaftliche) Analyse mit der Analyse der Sätze (der Wissenschaft) anzufangen, verbinden lässt, die z. B. Russell, ein Zeitgenosse Freges, vertrat und für die Forderung hielt, die sich in der Philosophie schon etablierte, stellt dieses Vorhaben Freges eine Erkenntnis von enormer Tragweite dar. Das Erscheinen der *Begriffsschrift* wird deshalb zu Recht als Beginn einer neuen Epoche in der Entwicklung der modernen mathematischen Gestalt der Logik ([Boch70], 314–315) angesehen.

Eine der Besonderheiten dieser Entwicklung liegt in dem Bewusstwerden, dass die Mittel der traditionellen formalen Logik trotz ihrer Kraft nicht universell sind. Doch weder Frege noch Russell können in ihren Werken auf die traditionellen formal-logischen Terminologie und Prinzipien verzichten. Das bestätigt nicht nur die Tiefe ihrer Kenntnisse auf diesem Gebiet, sondern auch, dass diese Terminologie und Prinzipien durch die Umgestaltung der Logik nicht an Bedeutung verlieren. Die Nicht-Universalität der traditionellen Logik ist aber nur einer der Faktoren, die zur Herausbildung neuer logischer Ideen geführt haben. Ein anderer Grund war das Auftreten philosophischer Theorien, die erkenntnistheoretische und ontologische Begriffe als Korrelate der entsprechenden formallogischen Begriffe auffassen. Die Entwicklung der Psychologie und Errungenschaften auf diesem Gebiet verlangen die Abgrenzung der Logik als einer besonderen Wissenschaft. Mathematische Grundlagenforschung und Versuche, den Gegenstand der Mathematik im Rahmen dieser Forschung zu definieren, fordern einerseits eine konsequente Unterscheidung zwischen dem Zeichen und dem von dem Zeichen Bezeichneten und andererseits die Einführung einer ganzen Typologie der die mathematischen Objekte präsentierenden Zeichen, die streng bestimmten Regeln und Konventionen unterliegen sollen.

Diese Problemstellung bedingte die Richtung der logischen Untersuchungen während der so genannten Fregeschen Periode sowie die Mittel, die zur Lösung dieser Probleme gewählt und geschaffen wurden. Eine logische Theorie wird nicht nur für die Entwicklung der Logik selbst aufgebaut, sondern soll bei der Begründung einer anderen Wissenschaft (nämlich der Mathematik) angewandt werden. Dieses Anwendungsziel verlangt die Klärung von logischen Grundbegriffen und führt dazu, dass die logische Theorie die Gestalt eines „Symbolismus“ oder einer Sprache annimmt. Doch obwohl diese Sprache nicht als Mittel zwischenmenschlichen Umgangs eingesetzt wird (oder gerade deswegen), muss sie eine geregelte semantische Interpretation bekommen und in eine Beziehung zur Umgangssprache gebracht werden, so dass die Ausdrücke der letzteren, welche in einer wissenschaftlichen Theorie benutzt werden, ein Korrelat in der logischen Sprache finden, für die sie als Teil ihrer Interpretation auftreten. Der Aufbau einer logischen Sprache hängt also mit der Entwicklung von semantischen Begriffen zusammen.

Dieses Buch ist der Versuch, eine aussagenlogische Theorie im Hinblick auf diese historischen Umstände ihrer modernen Formulierung darzulegen. Diese Aufgabenstellung führte insbesondere dazu, dass die Analyse der zu betrachtenden Begriffe auf logischen und semantischen Konzepten Freges und Russells sowie auf Ideen mancher ihrer Zeitgenossen basiert oder auf diese Bezug nimmt. Im ersten Teil der Arbeit werden einige logische Grundbegriffe sowie die Begriffe, die man in der Logik benutzt, diskutiert. Das Hauptziel dieses Abschnittes ist es, einige spezifische Merkmale der modernen Gestalt der Logik festzustellen. Im zweiten Teil der Arbeit werden die Grundbegriffe und Prinzipien traditioneller formaler Logik dargelegt. Der dritte Teil ist den Prinzipien des Aufbaus eines logischen Kalküls und seiner Interpretation gewidmet.

Da dieser Arbeit eine Lehrveranstaltung zugrunde liegt, ist jedes Kapitel von den thematisch entsprechenden Übungsaufgaben begleitet. Für einige Übungsaufgaben sind Lösungsvorschläge angegeben.

1 Moderne Gestalt der Logik

1.1 Logik und Philosophie der Logik

1.1.1 Zur Definition der Logik

Zunächst geben wir eine Definition von Logik an, um über sie sprechen zu können und um sie von anderen Wissenschaften abzugrenzen. Unter Logik verstehen wir die Wissenschaft, die richtiges Schließen untersucht. Diese Definition kann später erweitert werden.

Die Entwicklung der modernen Logik hängt mit ihren verschiedenen Anwendungen zusammen. Dazu zählen die Grundlagenforschung der Mathematik, die Methodologie der Wissenschaft, die Informatik, die Rechnertechnologie und die logische Analyse der normalen (oder natürlichen) Sprache. Bei den logischen Systemen, die in Hinblick auf die Bedürfnisse des jeweiligen Anwendungsgebiets formuliert werden, sind die Unterschiede mitunter so groß, dass die Theoretiker, die sich mit einem der logischen Systeme beschäftigen, sich kaum noch mit denjenigen verständigen können, deren Interessen einem anderen System gelten. Wie spezialisiert die Logik ist, zeigt ein Blick in das Inhaltsverzeichnis von fast jedem Buch, das Anspruch auf eine umfassende Darstellung verschiedener logischer Theorien erhebt. Ein Beispiel dafür ist die Klassifikation von logischen Theorien, die 1968 von N. Rescher vorgeschlagen wurde ([Re68]).

Rescher unterteilt Logik in Grundlogik, Metalogik (sie hat die Grundlogik zu ihrem Gegenstand) und angewandte Logik, die er in mathematische, wissenschaftliche und philosophische Entwicklungen der Logik untergliedert. Zwar entspricht diese Klassifikation der Breite und dem Umfang der theoretischen Interessen, die man durch das Wort „Logik“ bezeichnet, aber das Aufbauen dieser Klassifikation wirft auch einige Fragen auf. So liegt ein Nachteil dieser Klassifikation in der Vagheit der Kriterien, die für die Einordnung dieser oder jener Logik benutzt werden. Es bleibt unklar, ob diese Kriterien in der Geschichte der Entwicklung einer der Logiken liegen oder in den Begriffen und Methoden, welche die Logik gebraucht. Ein Beispiel dafür ist die Einordnung der Syllogistik. Die syllogistische Logik ordnet Rescher der so genannten traditionellen

Logik zu, die er zum größten Teil mit ihrer im Laufe der Geschichte herausgebildeten lehrbuchreifen Gestalt identifiziert. Aber die Syllogistik wird auch heute auf verschiedenen logischen Gebieten, z. B. der Modallogik, untersucht und weiterentwickelt. Fraglich ist auch, dass demselben Bereich der traditionellen Logik die Diskussionen über Denkgesetze in der idealistischen Logik zugeordnet werden. Dieses Thema gehört einerseits zur Geschichte der Logik, und andererseits dient es zur Definition der Grundbegriffe der modernen Logik. Diese können aber auf dem Gebiet der philosophischen Anwendung der Logik diskutiert werden, insofern als hier die Logik selbst als zu untersuchendes Objekt auftritt.

Schon an Hand dieser Klassifikation sieht man, dass das Wort „Logik" auf zweifache Weise interpretiert werden kann. Einerseits versteht man darunter eine Wissenschaft, die als ein Zweig der Philosophie angesehen wird, und andererseits benutzt man das Wort „Logik", um ein (formalisiertes) System zu definieren, das als Gegenstand der logischen Untersuchung auftritt ([Cur63]).

Die Gestalt einer logischen Theorie, die man traditionell der Logik zuschreibt, ist durch solche Merkmale wie Präzision von Formulierungen und Schlüssen, genaue Abgrenzung logischer Objekte voneinander sowie die Möglichkeit, jeden Satz nach bestimmten Kategorien (z. B. solchen wie Wahrheit oder Falschheit) zu klassifizieren, gekennzeichnet. Manche moderne Anwendungen der Logik, besonders solche, die mit der normalen Sprache verbunden sind, können aber dazu führen, dass die Logik im Bereich dieser Anwendungen ihre derartige typisch logische Gestalt verliert.

Als Beispiele solcher Logiken, bei denen selbst ihre Zugehörigkeit zur Logik in Frage gestellt werden kann, können einige Entwicklungen der „*fuzzy logic*" dienen, die in den 70er Jahren von L. A. Zadeh und R. E. Bellman entwickelt wurde. Diese logische Theorie kann zur Untersuchung vager Begriffe, wie *groß* oder *kahl* eingesetzt werden, deren Bezeichnungen in der normalen Sprache oft vorkommen. Im alltäglichen Gebrauch bereiten vage Begriffe geringe Schwierigkeiten. Probleme entstehen erst bei der logischen Analyse der entsprechenden Begriffswörter. Manchen Philosophen (insbesondere Russell) diente diese Analyse als Bestätigung der Untauglichkeit der normalen Sprache für die wissenschaftliche Argumentation. Die Entwicklung der Wissenschaft kann man nach Meinung Russells dadurch charakterisieren, dass vage Erkenntnisse durch immer präzisere ersetzt werden. Eine derartige Ersetzung verlangt auch eine Präzisierung der Sprache. Diese These Russells ist in ihrer späteren Version Bestandteil der Diskussion über die Analyse der normalen Sprache. Diese Diskussion führte Russell mit einer philosophischen Schule, die in den 50er Jahren in Oxford entstand (deren Theorie unter dem Namen „*ordinary language philosophy*" bekannt ist), und zu deren Repräsentanten G. Ryle, J. O. Urmson, G. J. Warnock und P. F. Strawson zählen. Dadurch, dass diese Bewegung die natürliche Sprache zum Gegenstand der philosophischen Untersuchung macht, wird das Interesse an solchen Themen wiederbelebt, wie der Frage danach, ob der Verlust eines Haares die Kahlköpfigkeit ausmacht. Vagheit wird somit Gegenstand der logischen Analyse. Die Vagheit (insbesondere die eines Begriffs) lässt sich u. a. dadurch charakterisieren, dass die Anzahl der Objekte, auf die ein vager Begriff zukommt, undefiniert bleibt. Ein weiteres Charakteristikum der Vagheit besteht darin, dass die Grenze zwischen Trägern einer Eigenschaft, die durch ein vages Prädikat bezeichnet wird, und denjenigen, denen diese Eigenschaft nicht zukommt, (z. B. zwischen großen und nicht-großen Menschen) verwischt („*fuzzy*") ist. Sätze, welche vage Prädikate enthalten, unterliegen nicht immer dem Gesetz des ausgeschlossenen Dritten. Dieses Gesetz ist eins der drei so genannten logischen Grundgesetze. Unter diesen ist zunächst das Gesetz der Identität zu erwähnen, das man durch die Formel $A \equiv A$ ausdrücken kann. Dieses Gesetz, als eine Norm aufgefasst, ist die Forderung der Bestimmtheit, die an folgerichtiges Denken gestellt wird. Es verlangt, dass A (durch A bezeichnen wir eine Aussage) in ein und demselben Inhalt genommen werden muss, während wir A betrachten. Das Gesetz des Widerspruchs $\sim(A \cdot \sim A)$ besagt, dass man nicht zugleich die Aussage A behaupten und verneinen darf, oder dass A und nicht-A nicht beide gleichzeitig wahr sein können. Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten $A \vee \sim A$ bedeutet, dass entweder A oder nicht-A wahr ist (beide Aussagen können nicht zugleich falsch sein). Gegen dieses letzte Gesetz verstoßen die fraglichen Sätze. So gibt es Personen, von denen man nicht sinnvoll behaupten kann, dass sie entweder kahlköpfig oder nicht kahlköpfig sind. Einen Gegenstand, der einem als groß erscheint, beschreibt ein anderer als nicht groß. Obwohl der alltägliche Gebrauch solcher Begriffe keine ernsthaften Schwierigkeiten auslöst, da man sich immer verständigen kann, was groß und nicht groß, kahlköpfig oder nicht kahlköpfig ist, kann der besagte Verstoß gegen das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten als einer der Gründe für die Erweiterung der zweiwertigen Logik betrachtet werden. Spricht man über den Wahrheitswert solcher Sätze wie „Arno ist kahlköpfig“, kann man entweder noch einen zusätzlichen Wert neben *wahr* und *falsch* einführen – *unbestimmt* –, oder aber eine Reihe von Werten, die zwischen *wahr* und *falsch* liegen. Diese Reihe kann auch unendlich sein. Es gibt verschiedene Formalisierungen dieser Idee. In manchen formalisierten Sprachen und ihren Anwendungen werden *wahr* und *falsch* durch 1 und 0 bezeichnet. Dank dieser Bezeichnungsweise kann man die unendlich vielen Werte in das Intervall einer Reihe von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 einbetten. Bei der Entwicklung einer logischen Theorie werden die Werte in Beziehungen zueinander gebracht, so dass man aus einem Satz mit einem Wahrheitswert einen anderen Satz mit einem bestimmten Wert folgern kann.

Eine andere Möglichkeit ist, die Begriffe *wahr* und *falsch* selbst als vage anzusehen. Nach einer solchen Auffassung sind „wahr“ und „falsch“ Prädikate, die verschiedene Grade bei ihrem Auftreten zulassen. Benutzt man die schon angesprochene Methode der Einbettung der Wahrheitswerte in ein Zahlenintervall für die Erklärung dieser Idee, kann man sagen, dass die unendliche Anzahl der Punkte aus dem Intervall (0,1) jetzt durch die unendliche Anzahl unbestimmter („*fuzzy*“) Teilmengen aus diesem Intervall ersetzt wird. Diesen Teilmengen kann man solche Begriffe wie *sehr wahr, nicht sehr wahr, mehr oder weniger wahr, eher wahr* zuordnen. Die auf einem solchen Fundament aufgebaute Logik erlaubt keine präzise Schlussfolgerung, denn die Relation der logischen Folgerung, die sich durch eine Beziehung zwischen Wahrheitswerten beschreiben lässt, kann hier dank der Vielfachheit der Grade der Werte selbst einen Grad haben. Man kann diesen Zusammenhang durch die Behauptung ausdrücken, dass ein Satz aus dem anderen nur zu einem bestimmten Grad folgt. In der Logik war und bleibt der Begriff der Schlussfolgerung traditionell einer der Grundbegriffe. Zu ihrem Gegenstand hatte Logik immer die Bestimmung der Bedingungen, welche die Glaubwürdigkeit der Schlussfolgerung garantieren. Diese traditionell verstandene Logik erleidet bei einer solchen Entwicklung der *fuzzy* Logik eine Umwandlung, die es unmöglich macht, die entstandene Theorie weiterhin als Logik zu charakterisieren.

Damit in Zusammenhang und wegen der Vielfachheit der Gestalten von logischen Theorien stellt sich die Frage nach der Einheitlichkeit der Logik, die u. a. zu folgenden Fragestellungen führt:

1. Was sind die Grundlagen der Logik?
2. Worin besteht die Natur des logischen Wissens?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Logik und den anderen wissenschaftlichen Disziplinen?

Jede dieser Fragen impliziert weitere, obwohl ihre Abgrenzung nicht immer explizit vorgenommen werden kann. Wenn man z. B. die Natur des logischen Wissens betrachtet, analysiert man oft die linguistische Form, in der dieses Wissen existiert. Von dem Versuch zu bestimmen, was die Bedeutung der logischen Zeichen ist, welche Werte Variablen in logischen Sätzen annehmen können, was logische Konstanten repräsentieren, erhofft man sich eine Antwort auf die Frage, was das Besondere an dem logischen Wissen ist, und wie es erworben wird.

Will man Logik begründen, fragt man nach dem Wesen der logischen Form. Lässt sich diese Form unabhängig von der Analyse der Erkenntnis selbst begreifen, oder wird sie als eine in den Produkten der Denktätigkeit gegebene Erkenntnisform erfasst? Wenn sie somit eine Form des Denkens ist, dann bleibt die Frage zu klären, worin sich das Logische von dem Psychischen oder Linguistischen unterscheidet. Hier kommt das Problem der Beziehung der Logik zu anderen Wissenschaften zum Vorschein. Hat Logik einen besonderen Gegenstand im Vergleich zu anderen Disziplinen? Wie ist ihre Relation zu diesen?

Obwohl der Gegenstand der Philosophie der Logik oft keine besondere Definition bekommt, werden alle erwähnten Probleme und Fragen sowohl in einer allgemeinen als auch in einer konkreten Form unter diesem Titel diskutiert. Um den Gegenstand dieser Diskussion zu präzisieren, könnte man sich auf die Analogie zu dem Terminus „Philosophie der Mathematik“ beziehen, unter dem man nicht nur Untersuchungen der philosophischen Bedeutung mathematischer Begriffe und Theorien versteht, d. h. nicht nur der möglichen Folgen der Anwendung solcher Begriffe und Theorien für die Philosophie. In erster Linie meint man unter diesem Begriff die Grundlagenforschung dieser Wissenschaft selbst. Der Gegenstand dieser Forschung ist die Bestimmung des Gegenstands der Mathematik und ihrer Grundbegriffe sowie des spezifischen Charakters des theoretischen Wissens, das man im Rahmen der Mathematik erwirbt.

Den Gegenstand der Philosophie der Logik definieren wir als Untersuchung der Grundlagen der Logik. Wenn wir Bezug auf die Probleme der Philosophie der Logik nehmen, werden wir uns hauptsächlich mit der Periode der Entwicklung der Logik beschäftigen, die mit der Formulierung der ersten Systeme der mathematischen Logik verbunden ist. Wir folgen der Periodisierung, die Bocheński vorgeschlagen hat ([Boch70, 314]), und markieren den Anfang dieser Periode mit 1879 – dem Jahr der Erscheinung der *Begriffsschrift* Freges – und ihr Ende mit 1910-1913 – den Jahren der Erscheinung der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell. Diese Periode war besonders fruchtbar, was die Klärung der logischen Grundbegriffe anbelangt. Dieser Zeit gehört auch eine besondere Definition der spezifischen Natur der Logik an sowie die Formulierung der Themen und Richtungen, die die Problematik der Philosophie der Logik bestimmen.

1.1.2 Die Rolle der Semantik in der Begründung der Logik

Der Analyse von logischen Prinzipien legen wir einige semantische Überlegungen zugrunde. Wenn die Semantik zu der Begründung der Logik herangezogen wird, tritt sie nicht in einer formalisierten Gestalt auf, sondern als eine Reihe zusammenhängender Begriffe, Schemen und Definitionen, in die die logische Problematik eingebettet wird. Wir werden jeder Spracheinheit als einem Zeichen ein Bezeichnetes zuordnen, wobei die Wahl der Auffassung des Bezeichneten offen bleibt. Einem Satz ordnen wir eine Aussage zu, einem grammatischen Prädikat einen Begriff, einem Namen einen Gegenstand, einer Konjunktion eine Kopula oder eine Relation, einer Phrase das von ihr Bezeichnete. Diese Idee der „Verdoppelung“ der Termini stammt von Curry ([Cur63]). Ob man dabei die Aussage mit dem Satz selbst oder mit einem Gedanken oder mit einem Sachverhalt identifiziert oder noch weitere semantische Schichten einführt, ist eine Frage, die schon eine bestimmte Auffassung der Grundlagen der Logik voraussetzt und impliziert, und die man bei der Klärung dieser Begriffe in Betracht ziehen kann.

Besonders wichtig außer der Einführung solcher Zweifachheit der Termini ist die mit dieser Einführung zusammenhängende Unterscheidung zwischen dem Zeichen als Mittel der Bezeichnung und dem Zeichen als bezeichnetem Objekt. Warum es wichtig ist, diese Unterscheidung zu machen, zeigt ein einfaches Beispiel, das Curry angibt. Nehmen wir zwei Sätze:

(1) Arno ist rothaarig.

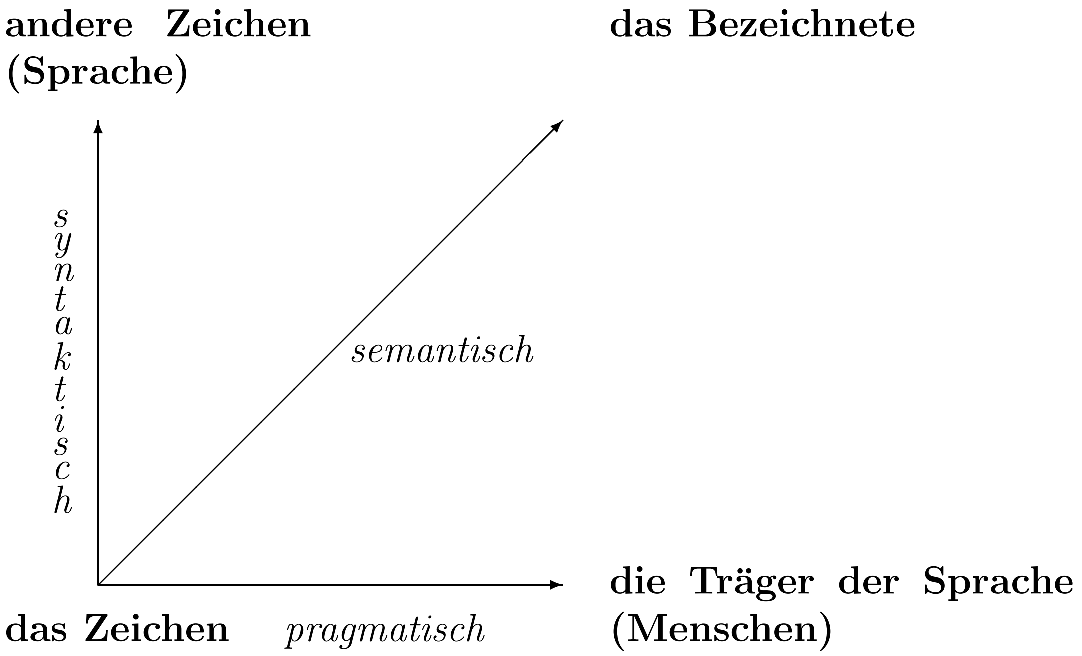
(2) Arno ist ein Name aus 4 Buchstaben.

Wenn man keine sichtbare Unterscheidung zwischen den Vorkommen des Namens „Arno" in den gegebenen Sätzen macht, könnte man, von bestimmten logischen Prinzipien ausgehend und von dem uns intuitiv klaren Inhalt der Sätze absehend, den Schluss aus den gegebenen Sätzen ziehen, dass ein Name aus 4 Buchstaben rothaarig ist. Im Satz (1) wird der Name „Arno" als bezeichnender Name gebraucht, er hat in der Terminologie Russells ([PM], Appendix C) ein „transparentes" Vorkommen, d. h., er wird benutzt, um über etwas, was sich von ihm selbst unterscheidet, zu sprechen. Im Satz (2) hat „Arno" ein „nicht-transparentes" Vorkommen, der Name wird hier nicht als solcher gebraucht, sondern nur erwähnt. Um diesen Unterschied sichtbar zu machen, trifft man die Vereinbarung, dass ein Name (oder ein beliebiger anderer Sprachausdruck), der nur erwähnt wird und nicht in seiner bezeichnenden Funktion gebraucht wird, durch Anführungszeichen zu kennzeichnen ist.

Der semantische Ansatz bei der Klärung der logischen Grundbegriffe und der Konstruktion einer logischen Theorie ist einerseits historisch bedingt und hat andererseits seine Gründe sowohl in der Struktur semantischer Theorien als auch in den Charakteristika der modernen Stufe der Entwicklung der Logik.

An der Grenze zwischen dem 19. und dem 20. Jahrhundert entstand die Idee einer allgemeinen Zeichentheorie, die unabhängig voneinander von verschiedenen Autoren entwickelt wurde. In erster Linie sind hier Ch. S. Peirce und F. de Saussure zu nennen. Auch E. Husserl führte in *Logischen Untersuchungen* eine bedeutende semiotische Analyse durch, und Freges und Russells Werke sind durch semiotische Ausführungen gekennzeichnet. Die neuere semiotische Forschung knüpft vor allem an die Meta-Mathematik Hilberts an. Als bedeutende Forscher auf diesem Gebiet sind A. Tarski und R. Carnap zu bezeichnen. Der Name „Semiotik" sowie die allgemeine Einteilung der Wissenschaft stammt von Ch. Morris, der seine Ansichten in dem programmatischen Aufsatz „Foundations of the Theory of Signs“ (1938) formulierte ([Mor38]).

Man unterteilt die Zeichentheorie (*Semiotik*) in drei Bereiche, abhängig davon, welche der Beziehungen des Zeichens zu anderen Objekten betrachtet werden. *Syntax* beschäftigt sich mit den Beziehungen eines Zeichens zu anderen Zeichen, *Semantik* mit der Beziehung zwischen Zeichen und Bezeichnetem, *Pragmatik* mit der Beziehung zwischen Zeichen und dem Subjekt, dem Menschen, der das Zeichen produziert und verwendet. Bocheński verwendete 1954 für die Darstellung der besagten Beziehungen ein Schema ([Boch93]), das auf der Idee von Morris basiert, und repräsentierte diese Beziehungen als Dimensionen des Zeichens (*Schema 1*).



Schema 1

Wenn wir über Dimensionen eines Zeichens und Objekte, die den Charakter dieser Dimensionen bestimmen, sprechen, gehen wir von den Funktionen aus, welche die Objekte in dem Prozess ausführen, in dem etwas als ein Zeichen fungiert. Die Eigenschaft, ein Zeichen zu sein, liegt nicht in der Natur des Objekts, das in einer Situation der Bezeichnung oder des Sprachgebrauchs als ein Zeichen auftritt, sondern wird von dem Objekt erst durch eine solche Situation erworben.

Morris führt besondere Bezeichnungen für die Beziehungen der Zeichen zu den Objekten, die sie bezeichnen, zu anderen Zeichen und zu Interpreten (denjenigen, die Zeichen interpretieren, oder den Trägern der Sprache) ein. Auf der Ebene der syntaktischen Dimension eines Zeichens tritt die Beziehung *implizieren* auf. Auf der Ebene der semantischen Dimension sind das die Beziehungen *bedeuten* und *bezeichnen*, auf der Ebene der pragmatischen Dimension ist das die Beziehung *ausdrücken*. Das Wort „Tisch“ z. B. impliziert den Ausdruck „ein Möbelstück, auf das man etwas legen kann“, bedeutet ein solches Möbelstück, bezeichnet diejenigen Objekte, auf die man das Wort anwendet, und drückt seinen Interpreten aus. Zwischen all diesen Dimensionen existieren aber Verbindungen. Sie zeigen sich erstens dadurch, dass die Wissenschaften, die eine der Dimensionen untersuchen, oft den Gegenstand zu einem ihrer Objekte haben, der von einer anderen Wissenschaft untersucht wird. Zweitens kommen diese Verbindungen dadurch zum Vorschein, dass man einige semiotische Begriffe nur mit Hilfe aller drei Zweige der Semiotik definieren kann, so z. B. die Begriffe *Zeichen* und *Sprache*.

Die Syntax (deren bestimmte Form einerseits von objektiven Ereignissen und andererseits von dem Verhalten der Träger der Sprache geregelt wird) untersucht die syntaktischen Beziehungen zwischen den Zeichen. Die logische Syntax, die Morris bei seiner Argumentation am meisten beeinflusste, erlaubt, eine Sprache als eine Gesamtheit von Objekten zu beschreiben, die miteinander durch zwei Arten von Regeln verbunden sind: die Regeln der Konstruktion und die Regeln der Rekonstruktion. Die ersten bestimmen, welche Zeichenkombinationen zulässige selbständige Zeichen der Sprache sind (Sätze oder Formeln). Die Regeln der zweiten Klasse bestimmen, welche Zeichen man aus den zulässigen selbständigen Zeichen der Sprache bilden kann. Man kann also *die Syntax der Sprache* als *Untersuchung der Zeichen und ihrer Kombinationen* definieren, die nach *syntaktischen Regeln gebildet sind.*

Die Semantik untersucht die Beziehungen zwischen Zeichen und Objekten. Die Sätze, die für die Semantik typisch sind, sind Sätze der Form „‚Arno‘ bezeichnet Arno“. In Sätzen der Semantik treten Zeichen einer Sprache oft als Zeichen auf, und deswegen ist einer der Hauptunterschiede, auf denen die Semantik basiert, der Unterschied zwischen der so genannten Objektsprache und Metasprache. Als Objektsprache fungiert in der Semantik die Sprache, die durch bestimmte syntaktische Regeln definiert ist, deswegen sagt man, dass die Semantik die Syntax voraussetzt und auf der Syntax basiert. Die Sätze der Semantik selbst sind Sätze einer Metasprache. Die Beziehungen zwischen Zeichen und Objekten, die die Semantik untersucht, werden durch semantische Regeln reguliert. Unter einer semantischen Regel versteht man eine Regel, die definiert, unter welchen Bedingungen ein Zeichen ein Bezeichnetes (ein Denotat) hat. Die semantische Regel bestimmt somit die Klasse von Denotaten, die ein Zeichen haben kann. Die Träger der (normalen) Sprache formulieren solche Regeln normalerweise nicht, weil für sie die semantischen Regeln in der Form von Sprachgebrauchsfertigkeiten existieren. Da man die Zeichen nach dem Umfang der von ihnen implizierten Zeichen unterscheidet, unterscheidet man zwischen Indizes, charakterisierenden und universalen Zeichen. Für diese Arten von Zeichen gibt es verschiedene semantische Regeln. Diese bestimmen die Klassen von Denotaten, die jeder Art der Zeichen entsprechen. Denotate der Indexzeichen sind einzelne Gegenstände, Denotate von einstelligen charakterisierenden Zeichen sind Eigenschaften und von mehrstelligen charakterisierenden Zeichen sind die Denotate Relationen.

Die Pragmatik untersucht die Beziehungen von Zeichen und ihren Interpreten. Sie ist mit der Analyse der psychologischen, biologischen und soziologischen Ereignisse verbunden, die den Prozess des Sprachgebrauchs und der Bezeichnung beeinflussen. Von dem Gesichtspunkt der Pragmatik, glaubt Morris, kann man die Sprache als ein Verhaltenssystem ansehen. Er schlägt vor, als spezifisch pragmatische solche Begriffe wie *Verstehen*, *Interpretation* und Ähnliche zu betrachten. Den Begriff *Wahrheit*, der auch als einer der Hauptbegriffe der Semantik auftritt, betrachtet er als einen, der bestimmte pragmatische Aspekte hat. Dieser Gedanke wird später von Montague weiterentwickelt. Montague schlägt vor, den Begriff der Wahrheit als einen pragmatischen Begriff zu betrachten, der aber nicht von der Semantik übernommen, sondern im Unterschied zu dem entsprechenden semantischen Begriff durch einen Kontext des Zeichengebrauchs definiert wird. Pragmatische Regeln halten die Bedingungen fest, unter denen ein Objekt für den Interpreten als ein Zeichen funktioniert. Da diese Bedingungen nicht immer durch semantische und syntaktische Regeln reguliert werden können, wie im Fall des Auftretens von Befehlen, Modalitäten und Ähnlichem, werden sie dem Bereich der Pragmatik zugeordnet.

Morris' Darstellung basiert ohne Zweifel in erster Linie auf Begriffen, die im Rahmen der logischen Untersuchungen formuliert wurden. Die Hauptbegriffe der Zeichentheorie, die für die Logik relevant sind (wie z. B. *Sinn* und *Bedeutung*), wurden in Verbindung mit der Konstruktion einer formalisierten Sprache und der Forderung, zwischen Zeichen und Bezeichnetem scharf zu unterscheiden, in besonders aufschlussreicher Form von Frege zum Ausdruck gebracht. Seine Ideen, von Russell, Wittgenstein und Carnap diskutiert, haben sowohl die moderne logische und semantische Terminologie als auch die Tendenz der logischen Entwicklung geprägt. Russell ist der zweite Autor, mit dessen Namen man die Formulierung von semantischen Hauptbegriffen verbindet. Obwohl man oft die Originalität mancher seiner Ansichten im Vergleich zu Freges Theorie bestreitet, gehört Russell zweifellos das Verdienst, als ein Ziel seiner logischen Untersuchungen das Bestreben zu erklären, die logischen Gegenstände in die Beziehung zu den für sie stehenden Zeichen zu bringen, durch die er logische Begriffe zu erklären versucht. Die Formulierung einer *theory of symbolism*, unter der die Theorie der Relation zwischen Zeichen und Bezeichnetem verstanden wird, betrachten Russell und ihm folgend Wittgenstein als Hauptziel ihrer Studien und Diskussionen. Während der Fregeschen Periode war somit die logische Problematik mit der semantischen stark verflochten.

Neben den historischen Gründen und den Vorteilen und der Bequemlichkeit des semantischen Ansatzes bei der Betrachtung der Grundlagen der Logik wird dieser Ansatz auch durch Funktionen bedingt, die in der Logik keine andere Theorie als die semantische erfüllen kann.

1. Die Semantik zerlegt das zu Erkennende in bestimmte Kategorien oder Typen. Somit liefert sie der Logik, die sich mit bestimmten Gesetzmäßigkeiten von Zusammenhängen der Erkenntnisse befasst, ihre Grundbegriffe. Weder die semantische Interpretation der Logik noch Definition und Gebrauch logischer Begriffe können allein mit Hilfe syntaktischer (formaler) Mittel realisiert werden. Die Logik selbst entwickelt nicht solche Begriffe wie

Wahrheit oder *Falschheit*. Sie übernimmt diese Begriffe aus der Semantik und der Erkenntnistheorie. Selbst die Anzahl der von der logischen Theorie anerkannten Wahrheitswerte ist durch die semantischen Voraussetzungen der Theorie bestimmt.

2. Die Semantik formuliert die Wahrheitsbedingungen für die Sätze der Logik. Da eine logische Theorie in der Form einer Sprache dargelegt werden kann, wird die Relation dieser Sprache zu ihrem Anwendungsgebiet durch semantische Regeln reguliert.

3. Die nächste wichtige Funktion der Semantik besteht darin, dass sie eine Interpretation formalisierter logischer Sprachen liefert. Eins der Merkmale der modernen Entwicklung der Logik ist der große Anteil des Formalismus an der Aufstellung einer logischen Theorie. Eine logische Theorie kann mit Hilfe von logischen Zeichen als eine Reihe von Formeln formuliert werden. Eine solche logische Sprache hat nur insofern einen theoretischen Wert, als sie eine semantische Interpretation zulässt oder eine Semantik schon als Basis hat (eine Semantik kann entweder als Interpretation einer schon existierenden Sprache eingeführt oder aber von einer solchen Existenz unabhängig aufgebaut werden).

4. Schließlich besteht eine der Funktionen einer semantischen Theorie darin, dass sie die Grundlage für die Formalisierung der normalen Sprache bildet. Normale Sprache betrachtet man dabei als ein Phänomen, dessen Existenz und Funktionieren durch subjektive Faktoren bedingt sind. Solche semantischen Begriffe wie *Sinn* und *Bedeutung* werden gebraucht, um die Rolle dieser Faktoren bei der Bestimmung des Bezeichneten zu definieren und dadurch scheinbar nicht-formalisierbare Aspekte der normalen Sprache zu formalisieren. Das betrifft z. B. Sätze, die subjektive Beziehungen der Träger der Sprache zu anderen Sätzen ausdrücken. Eine solche Formalisierung erlaubt eine weitere logische Analyse der natürlichen Sprache und ist Voraussetzung für die Entwicklung einer logischen Theorie, die sich mit derartigen Sätzen und ihren Zusammenhängen befasst.

Die Verwendung von semantischen Begriffen und Ideen ist somit für die Begründung der Logik nicht nur nützlich, sondern auch notwendig.

Übungsaufgaben

1. Charakterisieren Sie vage Begriffe.
2. Betrachten Sie folgende Ausdrücke.

   k, ‚k', „k", Logik, ‚Logik', „Logik"

   Setzen Sie gegebene Ausdrücke in die unten angeführten Phrasen ein, so dass Sie wahre Sätze erhalten.

   a) ______________ ist ein Sprachausdruck.
   b) ______________ bezeichnet ______________.
   c) ______________ ist ein Teil von ______________.
   d) ______________ enthält Anführungszeichen.
   e) ______________ ist ein Buchstabe.
   f) ______________ ist ein Wort.

1.2 Der Wahrheitsbegriff und der Formbegriff

1.2.1 Der Wahrheitsbegriff in der Logik

Die Aufgabe der Logik besteht in der Untersuchung und Formulierung verschiedener Arten von Schlussfolgerungen. Jeder Schluss unterliegt von dem logischen Gesichtspunkt aus der Forderung, dass er die Beziehung der logischen Folgerung reproduzieren muss. Unter der Bedingung, dass die Voraussetzungen des Schlusses wahr sind, gewährleistet diese Beziehung, dass der Schlusssatz selbst auch wahr ist. Eine der wichtigsten Botschaften, die uns diese Forderung vermittelt, ist die Notwendigkeit, die logischen Deduktionsregeln durch ein Wahrheitskonzept zu begründen. Logik entwickelt keinen eigenen Wahrheitsbegriff, aber er ist Teil des Gegenstands der Logik, insofern als diese die Schlüsse als Zusammenhänge von Wahrheitswerten untersucht. Den Wahrheitsbegriff übernimmt die Logik in erster Linie aus der Erkenntnistheorie. Am häufigsten beruht die logische Semantik auf der Korrespondenztheorie der Wahrheit, die im Rahmen der semantischen Interpretation einer logischen Theorie die Gestalt einer Reihe von Regeln annimmt.

Dieser durch den Gebrauch des Begriffs der logischen Folgerung vorausgesetzte Bezug auf den Wahrheitsbegriff zeigt, warum die Deutung des Wahrheitsbegriffs zur Grundlagenforschung der Logik gehört. Die Untersuchung des Wahrheitsbegriffs bestimmt eine der Richtungen, welche man in der Entwicklung der Grundlagen der Logik unterscheiden kann. Diese Richtung kann man in erster Linie mit der Problematik der Natur der logischen Gesetze verbinden. Wenn Logik die Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen des Wahren untersucht, stellt sich die Frage, was für eine Realität dem Wahren zukommt. Betrachtet man das Wahre als ein Objekt, dann befasst sich Logik mit objektiven Zusammenhängen. Unseren Gedanken (Urteilen, Sätzen) werden andere Gebilde (Komponenten solcher Zusammenhänge) gegenübergestellt, die selbst einen Wahrheitswert haben können und deren Wahrheitswert von dem Wahrheitswert unserer tatsächlich auftretenden Gedanken abweichen kann. Auf diesen Unterschied wiesen im Rahmen der Diskussion über Psychologismus Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts Frege und Husserl hin. Für die Entwicklung der psychologistischen Thesen und Ideen, die Frege und Husserl bekämpften, gab es unterschiedliche Gründe, die zum großen Teil in dem Charakter der von der Logik untersuchten Gegenstände und den vielfältigen Möglichkeiten sie aufzufassen liegen. Frege ordnete den logischen Gegenständen die Komponenten zu, die am Verfahren des Schließens beteiligt sind ([NS], „Logik", 3), und den logischen Gesetzen die Gesetze des Schließens. Als Schließen betrachtete er ein solches Urteilen, das sich in der Form eines wahren Urteils (oder in unserer Terminologie: einer wahren Aussage) vollzieht, wobei dieses Urteil andere Wahrheiten als seine Rechtfertigungsgründe hat. Aber selbst aus zwei wahren Urteilen kann man nicht immer ein anderes wahres Urteil folgern. Obwohl die Logik dieser Tatsache Rechnung tragen soll, betrachtet sie keine konkreten Urteile und Schlüsse. Deswegen sind ihre Gegenstände keine konkreten Begriffe, sondern Begriffe von solchen, z. B. die Begriffe eines Begriffs und eines Gegenstands. Diese, wie auch andere logische Objekte, sind unsinnlich und in dieser Hinsicht ähneln sie den Gegenständen der Psychologie. „Sie sind weder sichtbar noch tastbar", schreibt Frege ([NS], 3). Das ist einer der Gründe für die Gefahr des Eindringens des Psychologismus in die Logik. Der zweite Grund liegt in der Tatsache, dass die Sprache der Träger des Logischen ist. Die logischen Gegenstände, wie Begriffe und Wahrheitswerte, sind uns nur in der Form einer Wortgruppe oder eines Satzes gegeben. Aber irgendeine logische Struktur oder logische Beziehung wiederzugeben, ist oft nicht das Ziel des Sprechenden oder zumindest nicht sein einziges Ziel. Das Urteilen, das vom logischen Gesichtspunkt aus eine bestimmte Struktur aufweist, die sich unter dem Einfluss der subjektiven Faktoren nicht ändert, hat jedes Mal, wenn das Urteil gefällt wird, einen unterschiedlichen Ablauf ([Ged], 30, [NS], 3). Dieser ändert sich von einer Person zur anderen, da jeder zu demselben Urteil aus verschiedenen individuellen Gründen kommt, unterschiedliche Interessen und Erfahrungen hat und durch verschiedenste Vorstellungen bei dieser Handlung beeinflusst wird. Das Urteilen als ein Geschehen hat eine bestimmte Regularität, welche Psychologie und Erkenntnistheorie studieren. Logik interessiert sich aber für das Sein des schon gefällten Urteils, und zwar für sein objektives Sein. Sie beschäftigt sich mit der Realität eines Urteils, die sich einerseits in Beziehungen dieses Urteils zu anderen Urteilen zeigt, und andererseits offenbart sich diese Realität in der Möglichkeit, die Bedingungen des Wahrseins des Urteils aufzudecken. Diese Möglichkeit ist dadurch gegeben, dass sich der durch das Urteil anerkannte Wahrheitswert eines Gedankens in Begriffe oder in Begriffe und Gegenstände zerlegen lässt. Womit das Urteil in Beziehungen zu anderen Urteilen tritt, ist sein Wahrheitswert. Die Möglichkeit, das logische Korrelat des Urteils in seine Bestandteile zu zerlegen, charakterisiert den Wahrheitswert als ein zusammengesetztes Objekt. In der Sprache sind aber das Logische und das Psychologische vermischt ([NS], 6). Ein anderes Problem, das zu psychologistischen Ansichten führen kann, ist das Problem der Unterscheidung zwischen der Geschichte eines Begriffs einerseits und der „Entstehung“ des Begriffs bei einer einzelnen Person andererseits ([GLA], XIX). Während die Geschichte des Begriffs die Geschichte seiner Erkenntnis und der Identifizierung des Begriffswortes mit einer bestimmten Bedeutung ist, wird das Erfassen des Begriffs bei einer einzelnen Person jedes Mal durch verschiedene Gründe und Bedingungen hervorgerufen. Während die Bedeutung, die man mit einem Begriffswort verbindet, keine Vorstellung oder ein ähnlich subjektives psychologisches Gebilde ist, wird der Begriff von einer einzelnen Person aufgrund der Analyse eines psychischen Ereignisses (oder mehrerer Ereignisse) erfasst. Wären die logischen Objekte solche psychischen Ereignisse, die einzeln, veränderlich und vergänglich sind, und die sich von Subjekt zu Subjekt unterscheiden, dann würde damit nach Frege das Erkenntnisziel ins Subjektive gezogen. „Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen“ ([GLA], XIX). Mit dieser Aussage erklärt Frege, worin er die Gefahr des Psychologismus sieht. Durch eine psychologistische Betrachtungsweise kommt man leicht zu einem solipsistischen Gesichtspunkt, der selbst die Möglichkeit eines wissenschaftlichen Wissens in Frage stellt.

Anhand dieser Argumentation sehen wir, dass man, von einem psychologistischen Gesichtspunkt ausgehend, logische Objekte als reale Gegenstände und logische Termini als Beobachtungstermini betrachten kann. Wenn man nun, davon ausgehend, die Information analysiert, die uns die logischen Sätze (Gesetze) vermitteln, kann man darauf kommen, dass sie die tatsächlichen Regularitäten oder Gesetzmäßigkeiten des Denkens darstellen. Eine solche Auffassung bestimmt das Wesen des Psychologismus, das darin besteht, dass die Logik als eine empirische Wissenschaft betrachtet wird, die Gesetze und Formen des Denkens untersucht, das seinerseits als ein psychisches reales Verfahren auftritt.

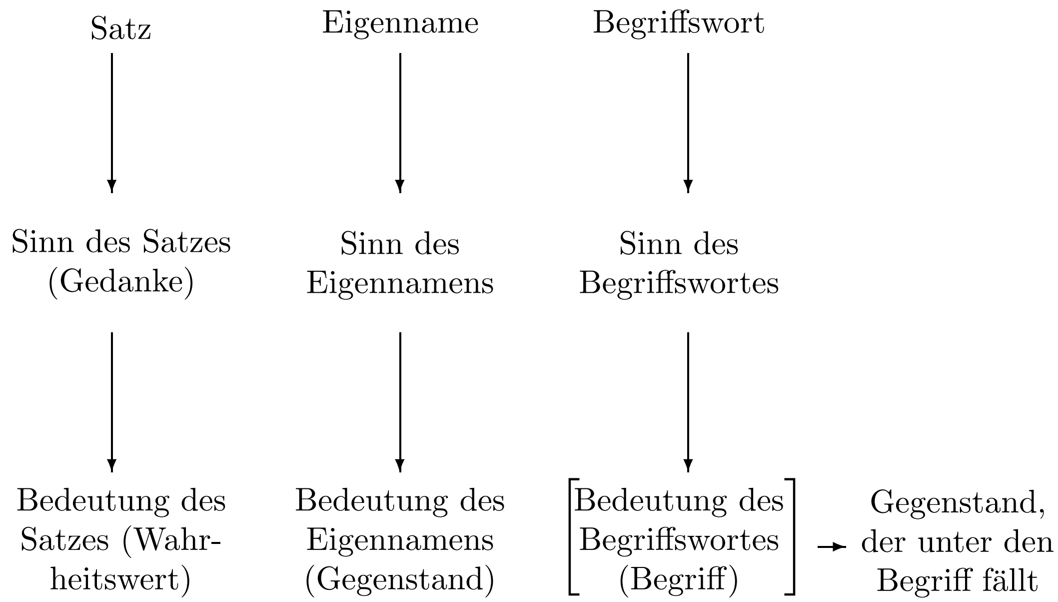
Man kann weiterhin zwischen dem Akt des Schließens aus den gegebenen Voraussetzungen und den Zusammenhängen dieser Voraussetzungen mit anderen Aussagen, die von einem einzelnen Akt des Schließens nicht abhängen, unterscheiden. Indem wir in jedem einzelnen Fall schließen, vollzieht sich ein subjektiv bedingtes Schließen. Der Zusammenhang der Aussagen in einem solchen einzelnen Fall ist nicht notwendigerweise mit dem Zusammenhang identisch, der einen wahren Schluss aus den gegebenen Voraussetzungen liefert. Wie die Wahrheit aufgefasst wird, ob als Charakteristikum, das laut den einer logischen Theorie zugrunde gelegten Konventionen einigen Aussagen unabhängig von der Anerkennung ihrer Wahrheit zukommt, oder aber als eine von einer Handlung des Subjekts abhängige Entität oder Beziehung, bestimmt die Auffassung der Natur der logischen Gesetze. Nach Frege besteht das Wesen der logischen Gesetze darin, dass sie keine Gesetze des wirklichen Schließens sind, obwohl das wirkliche Schließen den Stoff für jede logische Untersuchung liefert. Das wirkliche Schließen kann richtig und insofern logisch sein. Aber wenn alles wirkliche Schließen richtig wäre, wären Fehlschlüsse unmöglich ([NS], 3). Frege weist in diesem Zusammenhang auf den Doppelsinn des Wortes „Gesetz" hin. Einerseits besagt ein Gesetz, was ist, und schreibt andererseits vor, was sein soll ([GGA], XV). Wenn man von Denkgesetzen redet, wie es in der Logik üblich ist, kann man den Eindruck gewinnen, als ob diese Gesetze das Denken auf dieselbe Weise regierten „wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Außenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang". Die Information, welche die logischen Sätze wiedergeben, betrifft nach Freges Meinung nicht den tatsächlichen Ablauf des Denkens und auch nicht die Regularitäten, die das Denken aufweist. Das besagt aber nicht, dass Logik sich nicht mit den objektiven Zusammenhängen beschäftigt. Ihren normativen Charakter haben die logischen Gesetze dank der Objektivität der Gegenstände, welche die Logik betrachtet, und dank der Objektivität der Zusammenhänge und Zusammensetzungen, in die diese Gegenstände miteinander treten.

1.2.2 Konventionen über die Träger der Wahrheitswerte

Was man als Kriterium der Wahrheit einer Spracheinheit betrachtet, bestimmt u. a., wie der Träger des Wahrheitswertes und dementsprechend der Gegenstand der logischen Untersuchung definiert werden. Findet man dieses Kriterium im Bereich der Beziehungen zwischen Sprachzeichen (z. B. in der Konsistenz der Sätze) oder im Bereich der Relationen zwischen Zeichen und Bezeichnetem, wie die Korrespondenztheorie der Wahrheit, dann werden unter die Träger der Wahrheitswerte Sätze eingereiht. In einigen Fällen, wie bei Russell, der vor 1905 die Wahrheit als Eigenschaft komplexer Objekte (Propositionen) betrachtete, die nicht mit den Sätzen identisch sind, sind die Wahrheitsträger in erster Linie solche zusammengesetzte Objekte (Propositionen) selbst. Bei Frege sind das Gedanken, die ihrerseits in Sätzen ausgedrückt werden. Wenn man aber das Kriterium der Wahrheit in einem Bereich sucht, wo mehrere verschiedene Subjekte agieren, dann muss der Wahrheitsträger nicht unbedingt ein einzelner Satz sein, sei er einfach oder zusammengesetzt. Als ein Wahrheitsträger kann hier ein Kontext betrachtet werden, in dem mehrere Sätze in einem Zusammenhang stehen und in dem deswegen nicht unbedingt ein einzelner Satz eine sinnvolle, als wahr bewertbare Einheit ist. Die moderne Logik, die sich auch mit Kontexten befasst, kommt zu diesem Thema gerade dadurch, dass sie bestimmte Charakteristika des Trägers der Sprache berücksichtigt: seine Einstellungen, Begriffe oder Information, über die ein solcher Träger verfügt, seine Einschätzung der Wahrheitsbedingungen der Sätze.

Deswegen treffen wir zunächst eine Vereinbarung darüber, welchen Objekten wir die Eigenschaft *wahr zu sein* zusprechen. Einer der ersten Gedanken, auf die man im Zusammenhang mit dieser Frage kommt, ist die Anwendung des Wortes „wahr“ auf Sätze. Frege, den dieses Problem insbesondere 1918-1919 im Aufsatz „Gedanke“ beschäftigte, bemerkte, dass man die Eigenschaft *wahr* auch Bildern und Vorstellungen zuschreibt. Wird das Wort „wahr“ in Bezug auf solche Objekte gebraucht, wird es aber nicht als ein „Eigenschafts-Wort“ benutzt, sondern als ein „Beziehungs-Wort“. Stillschweigend wird bei den Behauptungen über die Wahrheit der Bilder eine Beziehung der Übereinstimmung gemeint. Bewertet man ein Bild als wahres, steckt dahinter nach Freges Meinung die Zurückführung auf einen Gedanken, den Gedanken über die Beziehung des Bildes zu dem abgebildeten Objekt. Die Wahrheit definiert Frege aus diesen Gründen als Eigenschaft eines Gedankens. Er unterscheidet zwischen: 1) dem Fassen eines Gedankens, das er auch als das Denken beschreibt, 2) der Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens (dem Urteilen) und 3) der Kundgebung des gefällten Urteils (dem Behaupten).

Kundgegeben wird das Urteil in einem Satz. Diese Form der Existenz eines Urteils erlaubt es, den Gedanken und den Wahrheitswert als eine semantische Interpretation des Satzes anzusehen ([WB], 96, s. *Schema 2*).



Schema 2

Für Frege sind Wahrheit und Falschheit abstrakte Gegenstände (das Wahre und das Falsche), und ein Satz ist dann wahr, wenn der dem Satz entsprechende Gedanke wahr ist und seine Bedeutung folglich das Wahre ist. Dank der Tatsache, dass Sätze als ihre Bedeutung einen Wahrheitswert besitzen, kann man alle wahren Sätze (sowie auch alle falschen) einander gleichsetzen, was eine besondere Bedeutung für die logische Theorie hat, denn der Umstand, dass ein Satz wahr oder falsch ist, impliziert die Möglichkeit, bei der Analyse der logischen Beziehungen zwischen Sätzen von ihrem Inhalt abzusehen und die Gesetze und Regeln zu formulieren, die für die Sätze eines beliebigen Inhalts gelten. Wollen wir nun die Sätze näher bestimmen, die wir als wahre oder falsche beschreiben können, sagen wir, dass das die Aussagesätze sind, die etwas über die Eigenschaften eines Objekts oder eine Relation von (mindestens) zwei Objekten behaupten, oder aber komplexe Sätze, die als ihre Teilsätze solche Aussagesätze enthalten. Wir werden als Objekte, die wahr oder falsch sein können, auch Aussagen zulassen, denn diese, selbst wenn sie sich von Sätzen unterscheiden sollten, können als Klassen von Sätzen gewisser Form interpretiert werden.

Schlüssen sprechen wir vorerst nicht die Eigenschaft *wahr* zu. Ein Schluss ist ein Zusammenhang von mindestens zwei Aussagen, von denen eine der Schluss (der Schlusssatz) selbst ist, und die andere(n) als Prämisse(n) auftreten. Wir charakterisieren einen Schluss als richtig, korrekt oder annehmbar. Man kann einen Schluss allerdings auch als eine Aussage darstellen und dann über den Wahrheitswert (oder über das System der Wahrheitswerte) dieser Aussage sprechen.

1.2.3 Definitionen

Eine weitere Konvention betrifft Definitionen, die mit dem Wahrheitsbegriff zusammenhängen. Weil der Wahrheitswert eines Satzes als seine semantische Interpretation angesehen werden kann, geben wir keine Definition des Wahrheitswertes als eines selbständigen unabhängig vom Satz denkbaren Objekts. Wir definieren, unter welchen Bedingungen ein Satz (eine Aussage) wahr ist. Dabei benutzen wir die Idee Tarskis ([Tar35]), der von der klassischen Korrespondenztheorie der Wahrheit ausgeht. Für einen atomaren oder elementaren Satz, der keine weiteren Sätze als seine Bestandteile enthält, werden die Wahrheitsbedingungen folgendermaßen definiert. Bezeichnen wir einen Satz durch „p“, dann sagen wir, dass „p“ dann und nur dann wahr ist, wenn p. Nach dem Beispiel Tarskis ist der Satz „Der Schnee ist weiß“ dann und nur dann wahr, wenn der Schnee weiß ist.

Die Wahrheitsbedingungen der komplexen Sätze definieren wir, indem wir bestimmte logische Konjunktionen einführen, denen wir Korrelate aus der natürlichen Sprache zuordnen. Die Definition, die wir geben, können wir einerseits als Definition der Wahrheitsbedingungen der zusammengesetzten Sätze auffassen, und andererseits als Definition der aussagenlogischen Funktionen, die durch diese Konjunktionen vertreten sind. Wir gehen davon aus, dass die einfachen (oder auch komplexen) Sätze, die solche Konjunktionen verbinden, wahr oder falsch sind, und somit den Wahrheitswert w (*wahr*) oder f (*falsch*) haben.

Es gibt eine singuläre Konjunktion, die sich auch als Funktion von einem Argument (das Argument einer solchen Funktion ist der Wahrheitswert einer Aussage) beschreiben lässt. Die Funktion, für die die Konjunktion „$\sim$“ („nicht“) steht, hat für das Argument w den Wert f, und für das Argument f den Wert w. Diese Konjunktion bezeichnet man als *Negation*. Die anderen Konjunktionen sind binär. Die Kombinationen der Werte ww, wf, fw, ff der Sätze, die durch die jeweilige Konjunktion verbunden sind, ergeben folgende Werte:

„$\vee$“	(„… oder …“) (*nicht-ausschließende Disjunktion*)	—	$wwwf$
„$\cdot$“	(„… und …“) (*Konjunktion*)	—	$wfff$
„$\supset$“	(„wenn …, dann …“) (*Implikation*)	—	$wfww$
„$\subset$“	(„…, wenn …“) (*konverse Implikation*)	—	$wwfw$
„$\equiv$“	(„… dann und nur dann, wenn …“) (*Äquivalenz*)	—	$wffw$
„$\not\equiv$“	(„entweder …, oder …“) (*ausschließende Disjunktion, Antiäquivalenz*)	—	$fwwf$
„$\mid$“	(„nicht beide … und …“) (*Sheffer-Strich, Antikonjunktion*)	—	$fwww$
„$\bar{\vee}$“	(„weder …, noch …“) (*Antidisjunktion*)	—	$fffw$
„$\not\supset$“	(„…, aber nicht …“) (*Antiimplikation*)	—	$fwff$
„$\not\subset$“	(„nicht …, aber …“) (*konverse Antiimplikation*)	—	$ffwf$

Wenn wir die gegebenen Definitionen als Beschreibung einer Abbildungsvorschrift ansehen, ordnen wir jeder logischen Konjunktion eine Funktion zu, die im Fall von binären Konjunktionen für jede der 4 Kombinationen der Wahrheitswerte (ww, wf, fw, ff) einen Wahrheitswert (w oder f) als ihren Wert hat. Wenn wir von den kombinatorischen Überlegungen ausgehen, können wir aus zwei Wahrheitswerten 2^4 ($= 16$) von einander verschiedene geordnete 4-Tupel aus den Elementen w und f bilden.

	ww	wf	fw	ff	
∇_1	w	w	w	w	
∇_2	w	w	w	f	Disjunktion
∇_3	w	w	f	w	konverse Implikation
∇_4	w	f	w	w	Implikation
∇_5	f	w	w	w	Antikonjunktion (Sheffer-Strich)
∇_6	w	w	f	f	
∇_7	w	f	f	w	Äquivalenz
∇_8	f	f	w	w	
∇_9	f	w	f	w	
∇_{10}	f	w	w	f	Antiäquivalenz (ausschließendes „oder“)
∇_{11}	w	f	w	f	
∇_{12}	w	f	f	f	Konjunktion
∇_{13}	f	w	f	f	Antiimplikation
∇_{14}	f	f	w	f	konverse Antiimplikation
∇_{15}	f	f	f	w	Antidisjunktion
∇_{16}	f	f	f	f	

∇_1, ∇_{16} werden nicht als aussagenlogische Funktoren betrachtet, denn die Werte dieser Funktionen hängen nicht von den Wahrheitswerten ihrer Argumente ab. ∇_6, ∇_{11} werden nicht als logische Konjunktionen benutzt, da die Werte der Funktionen, die sie repräsentieren könnten, mit den Werten eines ihrer Argumente zusammenfallen und sie deswegen keine Funktionen von 2 Argumenten sind. ∇_8, ∇_9 werden aus demselben Grund nicht als logische Konjunktionen benutzt, weil der Wahrheitswert der jeweiligen angeblichen Funktion in diesem Fall mit dem Wert der Verneinung eines der Argumente zusammenfällt.

Diese Überlegungen zeigen auch, dass hinter dem Wunsch, eine Konjunktion bzw. ihr Korrelat in der normalen Sprache als Bezeichnung (oder Ausdruck) einer Beziehung (z. B. einer kausalen, wie im Fall der Implikation) zwischen Aussagen aufzufassen, oft nur die entsprechende Auslegung der fraglichen wahrheitswertigen Funktion steht. Gehen wir davon aus, dass die Logik, die wir studieren, eine zweiwertige Logik mit den Werten *wahr* und *falsch* ist, und dass jeder logische Ausdruck einen von diesen Werten annehmen kann, dann sind wir durch die angegebenen Definitionen zu keiner durch die Tradition bedingten oder durch die natürliche Sprache aufgezwungenen Auffassung des „Namens“ der Funktion verpflichtet. Die Annahme, dass besondere Beziehungen zwischen Aussagen die Werte von logischen Funktionen bestimmen, würde bedeuten, dass die Logik (insbesondere die Aussagenlogik) inhaltliche Zusammenhänge von Aussagen untersucht. Dies ist insofern nicht zutreffend, als das Ziel der Logik darin besteht, allgemeine Schlussregeln, die auf jeden Inhalt anwendbar sind, zu gewinnen.

Die dritte Konvention betrifft die Anzahl der Wahrheitswerte. Wir setzen voraus, dass jede Aussage wahr oder falsch ist, womit wir unsere Analyse auf das Gebiet der zweiwertigen Logik einschränken.

1.2.4 Konventionen über den Formbegriff

Neben dem Wahrheitsbegriff, dessen Definition sich sowohl auf die Interpretation der logischen Sprache als auch auf die Auffassung des Gegenstands der Logik auswirkt, spielt der Formbegriff in der Logik eine große Rolle. Der Formbegriff grenzt den Bereich des Logischen ab und definiert u. a. die ontologischen Annahmen, mit denen eine logische Theorie verbunden ist. Da Logik die Schlussarten systematisch so beschreiben soll, dass sie den Charakter einer Gesetzmäßigkeit gewinnen, ist der Formbegriff einer der wichtigsten logischen Begriffe. Die logischen Gesetze sollen erlauben, einen richtigen Schluss aus Voraussetzungen beliebigen Inhalts zu ziehen.

Der Begriff der Form ist somit auch ein wesentlicher Teil der Definition der Logik. Nachdem man die Logik als Wissenschaft des richtigen Schließens definiert hat, kann diese Definition dadurch präzisiert werden, dass die Logik von dem Inhalt der Aussagen, deren Zusammenhänge sie untersucht, absieht und nur die Form dieser Zusammenhänge berücksichtigt. Logische Gesetze gelten für jeden Inhalt. Man kann die Beziehungen zwischen den Begriffen *Mensch*, *Grieche* und *sterblich* betrachten und aus den Voraussetzungen „Alle Menschen sind sterblich“ und „Alle Griechen sind Menschen“ den Schluss „Alle Griechen sind sterblich“ ziehen. Mit derselben Notwendigkeit lässt sich aus den Voraussetzungen „Jedes partikuläre

Urteil kann in die Form mit ‚es gibt' umgesetzt werden" und „Jedes Urteil, das in die Form mit ‚es gibt' umgesetzt werden kann, ist ein Existentialurteil" der Schluss „Jedes partikuläre Urteil ist ein Existentialurteil" folgern. Zu bemerken ist allerdings, dass die eben angegebenen Schlüsse nicht nur dieselbe logische Form haben, sondern auch dadurch gekennzeichnet sind, dass ihre Prämissen wahre Aussagen sind.

Noch klarer kommt die Anwendbarkeit von logischen Prinzipien auf Aussagen beliebigen Inhalts in der Aussagenlogik zum Ausdruck, die nicht die Relationen zwischen Termini betrachtet, sondern zwischen Aussagen. Logische Konjunktionen (insbesondere binäre Konjunktionen) können zwischen Aussagen mit vollkommen unterschiedlichem Inhalt gesetzt werden, ohne dass dabei die Frage nach dem Wahrheitswert des gewonnenen zusammengesetzten Satzes ihren Sinn verliert. Das Einzige, worauf es ankommt, ist der Wahrheitswert dieser Aussagen. Die Aussage „Wenn alle Körper ausgedehnt sind, dann ist der Schnee weiß" ist wahr, obwohl die Begriffe, die in der ersten Teilaussage vorkommen, keine inhaltliche Beziehung zu den Begriffen haben, die in der zweiten Teilaussage erwähnt werden. Genauso wahr ist auch die Aussage „Wenn zwei mal zwei fünf ist, dann ist der Schnee weiß".

Mit dem Formbegriff kann man eine andere Richtung in der Entwicklung der Grundlagen der Logik in Zusammenhang bringen. Wenn der Wahrheitsbegriff zu einer bestimmten Auffassung der Natur und der Struktur der logischen Objekte beiträgt, indem er eine semantisch interpretierbare Einheit der logischen Sprache und ihre Bestandteile bestimmt, gibt der Formbegriff eine Auffassung des Inhalts der logischen Zeichen und der Gegenstände, deren Existenz die Logik voraussetzt oder zulässt.

Bei den logischen Zeichen handelt es sich normalerweise um Formeln und ihre Bestandteile: Konstanten und Variablen. Eine logische Formel kann selbst mit der logischen Form identifiziert werden, und zwar der logischen Form der Sätze. Diese Identifizierung kommt dadurch zustande, dass man die Beziehung zwischen zwei Sprachausdrücken *dieselbe logische Form haben* definiert und diese Beziehung auf die Möglichkeit zurückführt, die Sprachausdrücke auf die gleiche Formel zu bringen (die Sätze „Sokrates liebt Wein" und „Platon liebt Sokrates" kann man beide durch dieselbe Formel „aRb" repräsentieren).

Warum vermeidet man den Versuch einer direkten Definition der logischen Form? Einen Aufschluss darüber könnten uns Russells Notizen zum Begriff der logischen Form von 1912, die erst 1992 veröffentlicht wurden ([Rus92]), geben. Russells Argumentation basiert auf folgenden zwei Voraussetzungen. Erstens behauptet er, dass die Logik sich mit der Form von Komplexen beschäftigt, unter denen Russell Korrelate von Sätzen versteht und denen er die Objektivität von Tatsachen zuspricht. Worauf Logik operiert, oder eher was sie zum Ausdruck bringt, ist nichts Einzelnes. Das führt dazu (oder äußert sich dadurch), dass Logik Variablen benutzt. Hier diskutiert Russell zunächst die Möglichkeit, das, was wir als eine Form bezeichnen könnten, zu definieren. Wenn ein Komplex eine Form hat und wir danach fragen, was diese Form ist, kann sie kein Bestandteil des Komplexes sein. Die Bestandteile des Komplexes sind auf irgendeine Art zusammengefügt, und diese Art ist die Form des Komplexes. Wäre die Form selbst ein Bestandteil des Komplexes, dann müsste sie irgendwie auf die anderen Bestandteile des Komplexes bezogen sein, und man müsste dann annehmen, dass die Art und Weise dieses Beziehens die Form ist. Eine solche Annahme führt aber zum Fortschreiten ins Unendliche. Eine andere Möglichkeit, die Form eines Komplexes aufzufassen, die hier für Russell in Frage kommt, ist die Möglichkeit, über zwei Komplexe zu behaupten, dass sie „dieselbe Form haben“. Russell schlägt auch eine entsprechende Definition vor. Zwei Komplexe haben dieselbe Form, wenn einer aus dem anderen durch Substitution von neuen Termen für die in ihm vorkommenden gewonnen wird. Einen Komplex kann man dann als einen logischen Komplex definieren, wenn dieser für beliebige Substitutionen ein Komplex bleibt, d. h., der Komplex verliert nicht seine Einheitlichkeit, und seine Bezeichnung bleibt ein Satz. Die Logik ließe sich dann als eine Klasse von logischen Komplexen definieren. Die Schwierigkeit bei dieser Auffassung besteht darin, dass keine Substitution in einem Komplex vorgenommen werden kann, wenn man den Komplex für ein von dem Satz verschiedenes Objekt hält. Substituieren kann man nur für Zeichen (nicht für das von einem Zeichen Bezeichnete), und was man für ein Zeichen substituiert, kann nur ein Zeichen sein. Ein anderer Nachteil einer solchen Auffassung der Form besteht darin, dass sie von vornherein nichtexistierende Komplexe, wie z. B. $x \neq x$, verbietet. In der logischen Theorie und ihren Anwendungen können aber solchen Komplexen entsprechende Formeln vorkommen, und sie werden sogar gebraucht, um beispielsweise die leere Klasse zu definieren. Der Schluss, den Russell daraus zieht, ist, dass man Komplexe nicht als Ausgangsdaten der Logik betrachten darf. Wenn man von der Annahme ausgeht, dass die Formen selbst primitive Daten der Logik sind, dann kann man sie folgendermaßen charakterisieren. Einer Form kann man (wie einer Funktion) Werte zuordnen. Solche Werte sind Komplexe, welche die Form besitzen. Abhängig davon, welche Werte eine Form hat, kann man sie als eine notwendige oder eine mögliche Form definieren. Eine Form ist notwendig, wenn sie für jede Kombination der Werte von Variablen einen Wert hat, und möglich, wenn die Negation dieser Behauptung nicht notwendig ist. Die Logik untersucht notwendige und mögliche Formen. Eine Form ist nach dieser Auffassung etwas, aber sie ist kein Bestandteil eines Komplexes, dessen Form sie ist. Eine Form ist etwas, was sich von ihrem Zeichen unterscheidet. Eine Form kann unmöglich sein, was bedeutet, dass solchen Ausdrücken wie „$x \neq x$“ eine Form entspricht. Russells Schlüsse lassen sich aber auch so bewerten: Wenn der Ausdruck einer Form eine Kombination von Variablen oder von Variablen und logischen Konstanten (z. B. „aRb“ oder „$p \supset q$“) ist, kann man durch Zuordnung bestimmter Werte für die Variablen einen konstanten Ausdruck bekommen. Dieser ist aber selbst keine Form, und seine Form lässt sich ohne Bezug auf die besagte Kombination von Variablen (also eine Formel) gar nicht ausdrücken. Formeln kann man aber unterteilen, indem man als Unterteilungskriterium die Möglichkeit einer Interpretation dieser Formel nimmt. Nach Russell gibt es drei Klassen von Formen (und entsprechenden Formeln), die man mit Hilfe einer solchen Interpretation bekommt: notwendige, mögliche und unmögliche. Geht man von Russells Beispielen und von seiner Auffassung der Notwendigkeit aus, die er mit der Eigenschaft einer propositionalen Funktion identifiziert, wahre Propositionen als Werte für beliebige Werte der Argumente der Funktion zu haben, dann können wir diese Klassen sogar als Klassen von Tautologien, neutralen Formeln und Kontradiktionen betrachten. Das Fazit: erstens präzisiert man den Begriff der logischen Form mit Hilfe des Wahrheitsbegriffs, zweitens spricht man nicht über die Form als solche, die als etwas Bezeichnetes der Formel gegenübersteht. Im zweiten Fall könnte man sonst behaupten, dass die logische Form selbst der Sinn oder die Bedeutung einer logischen Formel ist. Eine solche Annahme führt zu Problemen, die sich hier nur andeuten lassen. Man unterscheidet zwar zwischen der Form und der Formel, aber sieht in der Formel die Vergegenständlichung der Form, weil erst in der Gestalt einer Formel die Form die Existenz erlangt, welche die Form auch zu analysieren erlaubt.

Es bleibt die Frage offen, wovon die logische Form die Form ist. Denn ist sie die Form der Sätze, ist es fraglich, ob ihre logische Form mit ihrer syntaktischen Form übereinstimmt. Wenn nicht, wie Russell in seiner Theorie der Beschreibungen zeigt ([Rus05], [PM]), steht derjenige, der sich mit dieser Frage befasst, vor der Aufgabe, den Unterschied zu zeigen. Wie man die logische Form auffasst und was man für Träger der logischen Form hält, bestimmt also schließlich die Auffassung der Bedeutung von logischen Zeichen. Es geht hier somit auch um die ontologischen Annahmen einer logischen Theorie, z. B. darum, ob den logischen Funktoren irgendeine Realität entspricht. Wenn sie keine synkategorematischen Ausdrücke sind, was für Realität bezeichnet dann z. B. das Wort „nicht“ oder „oder“? Ist der Gebrauch dieser Wörter nur der Ausdruck eines mentalen Zustands des Sprechenden, der Ausdruck von seinem Nicht-Glauben oder Zweifel, wie Russell meint? In einem solchen Fall könnte man die logische Form als die Form der Beziehung ansehen, in die ein Denkender die Teile des gedachten Inhalts setzt. Inwiefern ist dann die logische Form objektiv? Welche Beziehung hat die logische Form zu dem gedachten Inhalt und was bestimmt eine solche Zusammensetzung der Inhalte? Ist es überhaupt möglich, das Formale und das Inhaltliche immer auseinander zu halten? Und welche Realität hat das Formale und das Inhaltliche in der Logik?

Übungsaufgaben

3. Diese Aufgaben betreffen den programmatischen Aufsatz Freges „Über Sinn und Bedeutung“ (1892). Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen:

   a) Was ist nach Frege der Grund für die Gleichsetzung von zwei verschiedenen Zeichen (wenn man z. B. behauptet, dass $a = b$)?

   b) Geben Sie zwei Beispiele für eine solche Gleichsetzung.

   c) Worin liegt die Verschiedenheit der Zeichen, die man als gleichbedeutend betrachtet?

   d) Wählen Sie eins der Zeichen, die Sie in der Teilaufgabe b) einführen und bestimmen Sie seinen Sinn bzw. seine Bedeutung.

   e) Wie kann man die Beziehungen zwischen einem Zeichen der natürlichen Sprache und seinem Sinn und Bedeutung beschreiben? Sind diese Beziehungen eineindeutig?

   f) Wie unterscheiden sich der gewöhnliche und der „ungerade“ Gebrauch der Wörter?

   g) Was unterscheidet den Sinn eines Zeichens von einer Vorstellung? Charakterisieren Sie die Vorstellung und den Sinn.

   h) Welche Redewendungen benutzt Frege, um den Unterschied zwischen dem Sinn und der Bedeutung eines Zeichens und zwischen ihren semantischen Rollen auszudrücken?

   i) Warum ist der Gedanke nicht mit der Bedeutung des Satzes identisch?

   j) Welche Sätze haben nach Frege keine Bedeutung? Geben Sie Freges Beispiel an und finden Sie zwei eigene Beispiele solcher Sätze.

   k) Wann interessiert man sich für die Bedeutung des Satzes?

   l) Wie definiert Frege den Wahrheitswert eines Satzes?

   m) Welche Bestandteile hat ein Gedanke und welche Bestandteile hat die Bedeutung des Satzes?

n) Was ist Urteilen?

o) Was sind die Bedeutung und der Sinn eines Nebensatzes, der die Aussage eines anderen wiedergibt? Was sind die Bedeutung und der Sinn einer Beschreibung?

1.3 Logische Theorie als eine formalisierte Sprache

1.3.1 Syntax einer logischen formalisierten Sprache

Eine moderne logische Theorie wird normalerweise als eine formalisierte Sprache aufgebaut. Das Ziel einer solchen Konstruktion besteht darin, dass man die logische Form des Schließens reproduzieren und untersuchen kann. Eine formalisierte Sprache kann man wie jede andere Sprache als eine Gesamtheit von Zeichen auffassen, die man in bestimmte syntaktische Kategorien einteilen kann. Wir unterscheiden folgende syntaktische Kategorien.

1. *Konstanten* (Namen, die eine bestimmte Bedeutung haben). Man unterscheidet einfache oder primitive Konstanten (Eigennamen wie z. B. „Sokrates“) und zusammengesetzte Konstanten (darunter auch Sätze).
2. *Variablen.* Diese haben keine bestimmte Bedeutung, sondern deuten unbestimmt ein Element einer nichtleeren Menge ihrer möglichen Werte an. Sie können durch Namen ersetzt werden.
3. *Formen.* Das sind Zeichenkombinationen, die man aus Sätzen oder anderen zusammengesetzten Namen gewinnt, indem man einige bezeichnende Ausdrücke in diesen durch Variablen ersetzt. Eine Form ist keine Konstante, die einen bestimmten Gegenstand bezeichnet. Sie ist eher mit mehreren konstanten Ausdrücken verbunden. Der Wert, den die Form durch die Ersetzung einer oder mehrerer in ihr vorkommenden Variablen durch Konstanten bekommt, ändert sich in Abhängigkeit von dem Wert, der der (oder den) entsprechenden Variablen zugesprochen wird. Eine n-stellige Form enthält n freie Variablen.
4. *Funktoren.* Wir unterscheiden diese von Funktionen. Unter einer Funktion verstehen wir eine Operation, die, auf etwas als Argument angewandt, diesem Argument ein Objekt zuordnet. Der Definitionsbereich einer Funktion besteht aus Objekten, die als Argumente der Funktion auftreten, und ist begrenzt. Der Wertebereich einer Funktion besteht aus ihren Werten. Wahrheitswertige Funktionen werden von Frege in der „Begriffsschrift“, sowie in den Aufsätzen „Funktion und Begriff“ (1891), „Über Begriff und Gegenstand“ (1892), „Was ist eine Funktion“ (1904)

eingeführt. Man spricht von einer n-stelligen Funktion, wenn n die Anzahl ihrer Argumente ist. Einer n-stelligen Form kann man in einer bestimmten Sprache eine n-stellige Funktion zuordnen. Dass die Funktion etwas von dem Funktor Verschiedenes ist, erkennt man daran, dass eine Funktion sich immer mit der entsprechenden Abbildungsvorschrift identifizieren lässt, während das Zeichen für Funktion (Funktor) keine Vorschrift ist, sondern ein Teil ihrer Beschreibung und einer Bezeichnungskonvention, die man in Bezug auf die Funktion treffen kann.

Konstanten, Variablen, Formen und Funktoren bezeichnet man auch als *eigentliche Symbole*, denen man ein Bezeichnetes (ein bestimmtes Objekt oder eine Menge von Objekten) zuordnet. Unter den *uneigentlichen* (oder *synkategorematischen*) *Symbolen* unterscheiden wir folgende.

1. *Klammern.* Sie dienen als Interpunktionszeichen einer logischen Sprache.
2. *Konjunktionen.* Eine Konjunktion ist eine Kombination von uneigentlichen Zeichen, die in Verbindung mit einer oder mehreren Konstanten oder Formen eine neue Konstante oder Form ergibt. Konstanten oder Formen, auf die eine Konjunktion angewandt wird, nennt man Operanden. Ist die Anzahl der Operanden einer Konjunktion n, dann heißt diese Konjunktion n-stellig.
3. *Operatoren* (darunter auch *Quantoren*). Unter einem Operator versteht man eine Kombination von uneigentlichen Symbolen, die zusammen mit einer oder mehreren Variablen (Operator-Variablen) und einem Operand (mehreren Operanden) eine neue Konstante oder Form liefert. Operator-Variablen sind durch Operatoren *gebunden.* Eine Variable hat in einem Ausdruck ein *freies* Vorkommen, wenn sie keine Operator-Variable ist. Man spricht über m-n-stellige Operatoren: sie werden auf m verschiedene Operator-Variablen und n Operanden angewandt. Solche Quantoren wie Allquantor und Existenzquantor sind z. B. 1-1-stellige (oder einfache) Operatoren.

Werden solche konstruktive Elemente des Aufbaus einer formalisierten logischen Sprache zusammen mit Konstruktionsregeln für die Ausdrücke der Sprache ohne Interpretation eingeführt, gewinnt man dadurch einen rein formalen Bestandteil der logischen Theorie (formale Sprache). Die Interpretation dieser Sprache wird mittels einer Metasprache gegeben, wofür man am häufigsten eine natürliche Sprache benutzt, die allerdings formalisierbar ist.

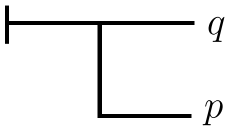
Bei dem Aufbau einer formalen Sprache wird zunächst das Alphabet der Sprache eingeführt, unter dem man eine Menge von unteilbaren primitiven Symbolen versteht, aus denen man beliebig viele Ausdrücke der Sprache konstruieren kann. Ein Ausdruck der Sprache ist eine endliche Folge solcher Symbole. Aus den Elementen des Alphabets kann man zwei Arten von Ausdrücken konstruieren: diejenigen, die als Formeln der Sprache (oder wohlgebildete Ausdrücke der Sprache) anerkannt werden, und Zeichenfolgen, die keine Formeln der Sprache sind. Die Kriterien zur Unterscheidung wohlgebildeter Ausdrücke der Sprache von denen, die als Ausdrücke der Sprache gar nicht anerkannt werden, formuliert man in einer Definition, die auch als Konstruktionsregel der Sprache betrachten werden kann. Einige der wohlgebildeten Ausdrücke der Sprache können als Axiome (primitive Sätze) der Sprache eingeführt werden. Man gibt ferner die (Deduktions-) Regeln an, nach denen man aus den schon konstruierten Formeln der Sprache andere Formeln ableiten kann. Einer solchen formalen Sprache wird eine semantische Interpretation zugefügt, deren Regeln erstens festlegen, was und wie ein Ausdruck der Sprache bezeichnet, und zweitens den primitiven Sätzen der Sprache einen ausgezeichneten Wert als Bezeichnetes zuordnen. Wir werden noch Gelegenheit haben, die Konstruktion einer logischen Sprache sowie einige Prinzipien einer solchen Konstruktion näher zu betrachten.

1.3.2 Frege über die Forderungen an Syntax und Semantik einer formalisierten Sprache

Wir legten fest, welche syntaktische Kategorien eine formalisierte Sprache enthält, und deuteten an, wie man eine solche Sprache konstruiert. Berechtigt ist nun die Frage, worin der Wert der Formalisierung der Sprache besteht, die in der Logik vorgenommen wird, und die jedes Mal in einer bestimmten logischen Theorie eine konkrete Realisierung bekommt.

Frege stellte sich die Aufgabe, eine besondere Sprache zu konstruieren, die auch andere Funktionen als die normale Sprache erfüllt. In diesem Zusammenhang formulierte er 1879 die Idee und die Prinzipien der Konstruktion einer Begriffsschrift – „der Formelsprache des reinen Denkens“ ([BS]). Bei dem Versuch, zu verstehen, zu welcher Art von Wahrheiten die arithmetischen Aussagen gehören, entsteht der Bedarf an einer solchen Sprache. Stützen sich arithmetische Aussagen bei ihrer Begründung auf rein logische Sätze oder auf Erfahrung, und inwiefern kann man das arithmetische Wissen als eine Kette von logischen Schlüssen darstellen? Um diese Fragen zu beantworten, braucht man eine Genauigkeit, über die die alltägliche Sprache nicht verfügt. Die Begriffsschrift steht zu der alltäglichen Sprache in einer ähnlichen Beziehung wie das Mikroskop zum Auge. Die Kraft des Auges ist ungenügend, wenn besonders scharfe Unterscheidung verlangt wird. Das Mikroskop ist dafür gut geeignet, aber gerade aus diesem Grund taugt es nicht für alles andere. Frege konstruiert die Begriffsschrift auf folgende Weise. Er bestimmt zwei Arten der Zeichen, die die Ausdrücke dieser Sprache bilden – Variablen und Konstanten. Verschiedenen Arten von Variablen werden verschiedene Gegenstandsbereiche zugeordnet. Einer Variablen kann man einen beliebigen Wert aus dem entsprechenden Gegenstandsbereich zusprechen, wobei zwei gleichartige Variablen denselben Wert annehmen können. Jedes konstante Zeichen hat seine eigene Bedeutung. Diese Bedeutung wird für jedes solches Zeichen speziell definiert.

Nehmen wir als Beispiel für das Zeichen mit einer bestimmten Bedeutung die Bezeichnung des Urteils. Das Fällen eines Urteils wird mit Hilfe des Zeichens „$\vdash$“ bezeichnet. Den senkrechten Strich „|“ nennt Frege „Urteilsstrich“. Der waagerechte Strich ist der „Gedankenstrich“. Schreibt man „$\boldsymbol{-}A$“, bedeutet dieser Ausdruck das Gedachtwerden eines Inhalts, eine bloße Zusammensetzung der (objektiven) Vorstellungen. Schreibt man „$\vdash A$“, bedeutet das das Fällen des Urteils, A wird hier behauptet. „A“ steht dabei für den Inhalt, der eine Behauptung zulässt. Freges Bezeichnungsweise konnte sich nicht durchsetzen, obwohl sie einige Vorteile aufweist. Einer dieser Vorteile ist mit der Bezeichnung der logischen Konjunktionen verbunden. Logische Konjunktionen bezeichnet Frege mit Hilfe von Kombinationen von verschiedenen Strichen, so dass die meisten logischen Formeln nicht bloß in einer Zeile stehen, sondern eine zweidimensionale Gestalt haben. Eine solche Bezeichnungsweise impliziert keine Fragen über die Bedeutung von logischen Konstanten, da in dieser logischen Sprache die Konjunktionen nicht als selbständige, von anderen Zeichen trennbare Einheiten auftreten. Ohne Variablen, die mit ihrer Hilfe auf bestimmte Weise zueinander positioniert sind, sind sie nicht denkbar. Ein Beispiel ist die Bezeichnung für die Formel $p \supset q$, die behauptet wird:



Frege formulierte Regeln des Schließens und stellte einige logische Sätze und Schlüsse in dieser Sprache dar. Die Sprache, die er formulierte, ist nicht das Ergebnis einer Übertragung der mathematischen Darstellungsmethoden auf die logische Sprache, obwohl der Buchtitel das vermuten lässt. Die Begriffsschrift stellt allgemeine Beziehungen zwischen Begriffen und Aussagen auf, die insofern auch für mathematische Begriffe und Aussagen gelten, als diese ihrer Gattung nach Begriffe und Aussagen sind. Was Frege von der Mathematik übernimmt, ist in erster Linie der Begriff der Funktion und ihrer Argumente. Frege will die traditionellen logischen Begriffe *Subjekt* und *Prädikat* durch diese Begriffe ersetzen.

In dem Buch *Grundgesetze der Arithmetik*, dessen erster Band 1893 erschien, betrachtet Frege die Forderungen an eine formalisierte Sprache, die an diese von einer wissenschaftlichen Untersuchung, die sich einer solchen Sprache bedient, gestellt werden. Diese Forderungen betreffen einerseits die syntaktischen und andererseits die semantischen Charakteristika der Sprachzeichen.

Von der Syntax der formalisierten Sprache wird Folgendes verlangt.

1. Die erste der Forderungen ist mit der Idee der Ergänzungsbedürftigkeit des Begriffs verbunden, die Frege als „Ungesättigtsein" des Begriffs bezeichnet. Ein Begriff ist bei Frege eine Funktion. Wie mathematische Funktionen, die ihren Argumenten bestimmte Werte zuordnen, ordnet der Begriff seinen Argumenten (Gegenständen) einen Wert zu, und zwar einen der zwei Wahrheitswerte – das Wahre oder das Falsche. Als Beispiel betrachten wir den Begriff *Mensch*. Als einen Gegenstand nehmen wir Sokrates. Sagen wir „Sokrates ist ein Mensch", dann sagen wir etwas Wahres aus oder behaupten einen wahren Gedanken. Der Satz erweist sich als wahr, weil der Begriff *Mensch* dem Gegenstand Sokrates den Wahrheitswert das *Wahre* zuordnet. Der Wert der Funktion *Mensch* (oder eher (*etwas*) *ist ein Mensch*)

kann für ein anderes Argument das *Falsche* sein. Jeden Begriff unterscheidet von dem Gegenstand (seinem möglichen Argument) das Ungesättigtsein, der Umstand, dass der Begriff immer einer Ergänzung bedarf. Dieses Ungesättigtsein ist die einzige Quelle der Bildung der komplexen Inhalte und Bedeutungen. Gäbe es dieses Ungesättigtsein nicht, könnten Teile eines Gedankens nicht aneinander haften. Der Begriff wird normalerweise in Bezug auf seine Argumente, die ersetzbar sind, als unersetzbar gedacht ([BS], 15). Diesem Konzept folgend wird verlangt, dass auch die Zeichen für Funktionen nicht allein erscheinen dürfen. Ihre Argumentstellen müssen immer ausgefüllt sein. In der Begriffsschrift erfüllen diese Funktion Buchstaben oder Variablen, die einen Gegenstand aus dem Gegenstandsbereich andeuten. In der gesprochenen Sprache gebraucht man zu diesem Zweck unbestimmt andeutende Pronomen, z. B. „etwas".

2. In der wissenschaftlichen Sprache braucht man unbestimmt andeutende Wörter oder Variablen (Frege nennt sie Buchstaben), um Sprachausdrücken Allgemeinheit zu verleihen. Allgemeinheit ist eine notwendige Eigenschaft des Gesetzes ([NS], „Logische Allgemeinheit", 278). Ein Gesetz ist nur dann wertvoll, wenn es viele Einzeltatsachen umfasst. Diese Allgemeinheit bringt man am besten zum Ausdruck, indem man Variablen und eine hypothetische Form des Urteils verwendet. Frege schlägt in einem seiner späteren Manuskripte „Logische Allgemeinheit" eine Unterscheidung vor, die der Unterscheidung von Sprache und Metasprache nahe steht. Diese Unterscheidung betrifft die Struktur einer wissenschaftlichen Sprache. Die Sprache, die sowohl Wörter als auch Buchstaben enthält, und in der man Gesetze formuliert, nennt Frege die „Hilfssprache". Die übliche Sprache nennt Frege „Darlegungssprache" ([NS], 280–281). Die Sätze der Hilfssprache sind Gegenstände, von denen in der Darlegungssprache die Rede sein soll. Das Wesen der Hilfssprache liegt darin, dass in ihr die gleichgestalteten Eigennamen oder Buchstaben innerhalb eines Satzes denselben Gegenstand bezeichnen. Sagt man z. B. „Wenn Napoleon ein Mensch ist, ist Napoleon sterblich", oder „Wenn a ein Mensch ist, ist a sterblich", bezeichnet man durch „Napoleon" oder im anderen Fall durch „a" ein und dieselbe Person. Die Hilfssprache hat also Eigenschaften der formalisierten Sprache, über die wir sprechen.

Hinter den Forderungen Freges an die Semantik der formalisierten Sprache steht folgende Idee. Das Zeichen ist das, schreibt Frege, was „uns dazu dient, irgendetwas zu bezeichnen, auszudrücken oder zu behaupten. Dabei wollen wir nicht von dem Zeichen etwas sagen, wenn wir es gebrauchen, sondern seine Bedeutung ist uns in der Regel die Hauptsache“. Das Zeichen ist „nur ein willkürlich gewähltes Mittel des Gedankenausdrucks, das ganz außerhalb der Betrachtung bleibt. In dieser Stellvertretung liegt der Nutzen der Zeichen“ ([GGA], 105). Die Forderungen an die semantische Interpretation der in der Wissenschaft gebrauchten Zeichen sind folgende:

1. Die Zeichen müssen eine Bedeutung haben. Insbesondere, sind Eigennamen, die keinen Gegenstand bezeichnen, unzulässig, sowie Sätze, die man weder als wahr noch als falsch bewerten kann. Solche Sätze können zwar Gegenstand einer wissenschaftlichen Untersuchung sein, dürfen aber nicht als diejenigen Sätze zugelassen werden, mit deren Hilfe diese Untersuchung sich vollzieht ([GGA], 76–77).
2. Jedes konstante Zeichen muss vollständig erklärt werden, d. h., jedes solche Zeichen muss eine Bedeutung erhalten.
3. Buchstaben oder Variablen bekommen einen fest begrenzten Gegenstandsbereich zugeordnet, wobei einer der Gegenstände aus diesem Bereich von Variablen angedeutet werden kann ([GGA], 78).
4. Die Erklärung des Zeichens darf nicht durch die Erklärung eines komplexen Ausdrucks erfolgen, in dem das Zeichen vorkommt, da in verschiedenen Kontexten das Zeichen unterschiedliche Bedeutung haben kann. Dieses Prinzip nennt Frege der „Grundsatz der Einfachheit des erklärten Ausdrucks“ ([GGA], 79). Das Prinzip garantiert, dass in unterschiedlichen Fällen in verschiedenen Ausdrücken das Zeichen dieselbe Bedeutung hat. Dabei ist das Zeichen nicht einfach, wenn die Bedeutung des Ganzen aus den Bedeutungen der Teile folgt, und wenn diese Teile in anderen Verbindungen als selbständige Zeichen mit eigener Bedeutung behandelt werden. Um diese Forderung zu verdeutlichen, nehmen wir den Satz „Mensch ist ein Lebewesen“. Hier bedeutet das Wort „Mensch“ einen besonderen Gegenstand, nämlich den Umfang des Begriffs *Mensch*. Sagt man dagegen, „Sokra-

tes ist Mensch“, bedeutet hier „Mensch“ den Begriff selbst. In diesem Fall wird *Mensch* nicht als etwas selbständiges (z. B. als alle Menschen) gedacht, wie im ersten Fall, wo die Klasse aller Menschen in eine Beziehung zu einer anderen Klasse gebracht wird. Hier geht es um *Menschsein*, also darum, ob der Gegenstand Sokrates die Merkmale besitzt, die man im Begriff *Mensch* vereinigt.

5. Ein anderer Grundsatz der Bezeichnung: verschiedene Dinge bekommen verschiedene Zeichen. Also ist Mehrdeutigkeit der Zeichen, wie man sie in der normalen Sprache vorfindet, in der Begriffsschrift (in der formalisierten wissenschaftlichen Sprache) unzulässig ([GGA], 138).

6. Als eine besondere Forderung kann man auch die Ersetzbarkeit der Zeichen formulieren. Die Zeichen können nach einer bestimmten Regel oder Definition einander ersetzen ([GGA], 111–112). Die Ersetzung eines Zeichens durch ein anderes kann einen Fortschritt der Erkenntnis bedeuten, wenn man feststellt, dass die Zeichen, die verschiedenen Sinn haben, wie z. B. „der Abendstern“ und „der Morgenstern“, die gleiche Bedeutung besitzen, in unserem Fall denselben Himmelskörper bezeichnen.

Aus allen diesen Forderungen können wir schließen, was noch nach Frege eine formalisierte Sprache charakterisiert. Eines ihrer allgemeinen Charakteristika ist die Rolle, die Frege dieser Sprache zuschreibt. Diese Rolle besteht in der Aufdeckung der Zusammenhänge der (gedachten) Inhalte. Die formalisierte Sprache ist somit ein Instrument, das von der Wissenschaft benutzt wird, um das Wissen von Wahrheiten zu erreichen.

1.3.3 Funktionen formalisierter logischer Sprachen

Logische Sprachen werden entwickelt, um besondere Aufgaben zu erfüllen. Es fragt sich also, welche Funktionen eine formalisierte Sprache erfüllt, insbesondere eine formalisierte logische Sprache.

1. Die erste (aber nicht unbedingt die wichtigste) hier zu erwähnende Funktion der formalisierten logischen Sprache besteht in der Verkürzung der Formulierung von Schlussregeln und Schlüssen, sowie in der Vereinfachung deren Verständnisses. Dies ist aber nicht ihre einzige Funktion, wie man annehmen könnte, wenn

man dächte, dass formalisierte Sprachen nur durch Ersetzen normaler Wörter und Ausdrücke durch Buchstaben und Formeln entstehen.

2. Die zweite Funktion besteht in der Repräsentation der logischen Ableitung. Das Ziel, das die Logik mit der Entwicklung einer formalisierten Sprache verfolgt, ist nicht das bloße Ersetzen der Symbole einer Art durch die anderen, sondern die Reproduktion der logischen Deduktion, der Ableitung einer Aussage aus den anderen. Die Bedeutung logischer Zeichen ist deswegen nicht mit der Bedeutung einzelner Ausdrücke der normalen Sprache (einzelner Wörter oder Sätze) identisch. Was die logische Sprache repräsentiert, sind logische (nicht syntaktische!) Strukturen und Zusammenhänge. Wenn man die Ausdrücke der normalen Sprache für Träger von logischen Strukturen und Formen hält, repräsentieren die logischen Zeichen Eigenschaften von Ausdrücken der normalen Sprache, die es erlauben, Worte und Sätze unterschiedlichen Inhalts miteinander zu vergleichen und gegebenenfalls zu identifizieren. Sonst müsste man jeder syntaktischen Einheit der normalen Sprache ein logisches Zeichen zuordnen, was die logische Sprache zu einem Stenogramm der Ausdrücke der normalen Sprache machen würde. Die logische Sprache wird dadurch unnötig erweitert und ihre Syntax kann mit der Syntax der normalen Sprache gleichgesetzt werden. Um das zu vermeiden, wird die Semantik und die Syntax der formalisierten logischen Sprache durch besondere, von den syntaktischen verschiedene Definitionen und Regeln eingeführt. Das eröffnet die Möglichkeit, außer eindeutiger Definition von Symbolen und exakter Formulierung der syntaktischen Regeln, das eigentümlich Logische der Theorie hervorzuheben.

3. Die dritte Funktion einer formalisierten logischen Sprache besteht in der Konstruktion neuer Arten von Schlüssen, welche die Analyse der Umgangssprache nicht liefert. Durch die Untersuchung der Zusammenhänge von Zeichen, denen auf Grund von bestimmten Konventionen eine Bedeutung (ein Wahrheitswert) zugesprochen wird, wird eine Interpretation für einen beliebigen Inhalt der wohlgebildeten Zeichenfolgen der Sprache ermöglicht, die (für jeden Wert ihrer Bestandteile) einen ausgezeichneten Wert als ihre Bedeutung haben.

4. Eine weitere Funktion der formalisierten Sprache besteht darin, dass sie eine kontextuelle Definition von Objekten erlaubt, die nicht als primitive Objekte einer Theorie eingeführt werden. Deswegen hatte die Entwicklung der formalisierten Sprache einen besonderen Wert für solche Theorien wie den Logizismus, die als eins ihrer Ziele die Beseitigung der Widersprüche erklärten, die im Zusammenhang mit der Untersuchung der für die Begründung der Mathematik wesentlichen Begriffe entstanden. Die Möglichkeit einer kontextuellen Definition entbindet einen von der Notwendigkeit, die Existenz solcher Objekte wie Klassen anzunehmen. Kontextuelle Definitionen erlauben es, Zeichen für solche Objekte als Abkürzungen für komplexe Zeichenkombinationen einzuführen, welche ihrerseits keine problematischen Schlüsse in Bezug auf die besagten Objekte implizieren. Wenn ein Objekt durch eine solche Definition eingeführt wird, wird eine semantische Interpretation des Kontextes, in dem die Bezeichnung des Objekts vorkommt, gegeben. Als Beispiel einer solchen kontextuellen Definition betrachten wir eine Anwendung von Russells Theorie der Beschreibungen („*theory of descriptions*"), deren Grundideen 1905 in dem Aufsatz „On Denoting" formuliert wurden und die in *Principia Mathematica* (1910-1913) ausführlich dargelegt wurde. Eine der Fragen, die Russell zu der Formulierung der Theorie bewogen hat, war die Frage, ob jedes Zeichen etwas bezeichnet, und unter welchen Bedingungen es überhaupt ein Bezeichnendes ist (eine Bedeutung hat). Betrachten wir den Satz „Der jetzige König von Frankreich ist kahlköpfig". Wir verstehen diesen Satz, obwohl das, was durch die Phrase „der jetzige König von Frankreich" bezeichnet wird, nicht existiert. Man kann diesen Satz als einen komplexen Satz betrachten, als Behauptung, dass, wenn jemand der jetzige König von Frankreich ist, er dann auch kahlköpfig ist. Diese Darstellung des gegebenen Satzes macht ihn zu einem wahren Satz, denn die Implikationsaussage ist auch dann wahr, wenn das Antezedens der Aussage falsch ist. In dem gegebenen Fall ist das Antezedens der Aussage falsch, weil es die Person, deren Existenz man in dem Satz behauptet und der man die Eigenschaft *kahlköpfig zu sein* zuspricht, nicht gibt. Der gesunde Menschenverstand ist sicherlich nicht bereit, das zu akzeptieren. Zugleich kann man über den gegenwärtigen König von Frank-

reich behaupten, dass er keine Glatze hat. Die eben vorgeschlagene Auffassung der Struktur des ersten behauptenden Satzes macht auch den verneinenden zu einem wahren Satz, wenn die Kahlköpfigkeit (nicht die Existenz) verneint wird. Spricht man solchen Objekten wie *dem gegenwärtigen König von Frankreich* Eigenschaften zu, führt dies zu Widersprüchen ([Rus05], 48). Betrachten wir nun den Satz „Den jetzigen König von Frankreich gibt es nicht“, dessen Wahrheit für gewöhnlich nicht in Frage gestellt wird. Wenn wir sagen, dass der Satz wahr ist, bedeutet der Satz, dass es ein Objekt, das „der jetzige König von Frankreich“ heißt, nicht gibt. Indem wir dieses Objekt benennen und denken, nehmen wir also an, dass dieses Objekt ein Sein hat, um dieses Sein negieren zu können ([PM], 69). Russell sieht nur einen Ausweg aus dieser widersprüchlichen Situation. Man muss anerkennen, dass nicht jedes Zeichen eine Bedeutung in Isolation hat. Es gibt Zeichen (oder Zeichenkombinationen), die eine Bedeutung erst im Kontext erhalten. Russell behauptet, dass uns bei der Analyse derartiger Sätze die grammatische Form des Satzes irreführt. Während in der alltäglichen Sprache damit so gut wie keine Probleme verbunden sind, verlangt die wissenschaftliche Sprache eine Präzision, die nur die logische und nicht die syntaktische Analyse geben kann. Russell schlägt vor, derartige Sätze so umzuformulieren, dass ihre logische Struktur keine offenen Fragen lässt, die den Wahrheitswert des Satzes betreffen. Den ersten Satz kann man laut Russellscher Theorie so formulieren: „Es gibt ein Objekt c, so dass x der jetzige König von Frankreich dann und nur dann ist, wenn x c ist und c kahlköpfig ist“. Man schreibt: „$(\exists c) : \varphi x \,.\; \equiv_x \;.\, x = c : \psi c$“ oder „$\psi\{(\imath x)(\varphi x)\}$“. Den zweiten Satz kann man so umformulieren: „Falsch ist, dass es ein Objekt c gibt, so dass x der jetzige König von Frankreich dann und nur dann ist, wenn x c ist“. In der Sprache von *Principia*: „$\sim\{(\exists c) : \varphi x \,.\; \equiv_x \;.\, x = c\}$“ oder „$\sim E!(\imath x)(\varphi x)$“. Man sieht, dass sich nach dieser Umformulierung der erste Satz als ein falscher Satz erweist, und der zweite – als ein wahrer, ohne dass dabei irgendwelche Widersprüche entstehen. Die Theorie definiert einen der Mechanismen, mit deren Hilfe man durch die Umformulierung eines Satzes seine semantische Interpretation erreicht. Das Zeichen „$(\imath x)(\varphi x)$“, das „das x, das φx erfüllt“ bedeutet, ist nach Russell ein unvollständiges Symbol, also ein Symbol, das keine selbständige Bedeutung in Isolation hat. Die Theorie der Beschreibungen, die sich mit solchen Symbolen beschäftigt, liefert eine Methode zur Umformulierung von Sätzen, die unvollständige Symbole enthalten. Obwohl man oft die Problematik, die zur Formulierung dieser Theorie führte, für überholt erklärt, findet die Theorie der Beschreibungen immer neue Anwendungen in der Wissenschaft.

5. Eine weitere Funktion der formalisierten Sprache ist die Untersuchung kognitiver Verfahren und die Klärung der ontologischen Annahmen, die mit diesen Verfahren verbunden sind. Eine präzise Formulierung der Syntax und Semantik schafft eine idealisierte Rekonstruktion der Erkenntnis, und setzt voraus oder impliziert eine Gliederung des Erkennbaren.

1.3.4 Allgemeine Charakteristika der Entwicklung der Logik

Die Idee der Konstruktion einer formalisierten logischen Sprache kann man als das Produkt der Entwicklung der Logik ansehen. Diese Entwicklung lässt sich ihrerseits als Prozess der Erweiterung der Liste von standardisierten logischen Strukturen auffassen ([Smir96]).

Eine Standardisierung von logischen Strukturen erfüllt folgende zwei Funktionen. Sie kennzeichnet in erster Linie die Erweiterung des Anwendungsgebiets des diskursiven Denkens, für welches die Logik die Gesetze und Regeln aufstellt. Außerdem ist die Standardisierung der Form der Sprachausdrücke, auf die man logische Gesetze anwendet, der erste Schritt zur Darstellung einer logischen Theorie als einer formalisierten Sprache. Die formalisierte Sprache, die als eine Form der Darbietung der logischen Theorie auftritt, weist sowohl einige allgemeine Aspekte jeder Sprache auf, als auch spezifische Merkmale, die von einigen Eigenschaften der normalen Sprache abzusehen erlauben. Besonderheiten dieser Sprache kann man so beschreiben:

1. Es ist eine Sprache, die nicht zum Zweck der Kommunikation gebildet wird.

2. Sie ist eine Realisierung der Idee, Gegenstände mit vorgegebenen Eigenschaften (insbesondere mit einem ausgezeichneten Wahrheitswert, wie *wahr*) zu konstruieren.
3. Die Ausdrücke dieser Sprache sind sprachliche Korrelate solcher zu konstruierenden Gegenstände und können selbst als Objekte aufgefasst werden.
4. Die syntaktischen Regeln dieser Sprache bestimmen, wie die Ausdrücke der Sprache in Zusammenhang zueinander gebracht werden: die Ausdrücke der Sprache (Objekte der logischen Untersuchung) sind vollkommen durch die schon definierten Gegenstände und Regeln der Sprache bestimmt.

Wenn das Wissen in einer standardisierten Form präsentiert wird, verfolgt eine solche Präsentation verschiedene Ziele. Man sucht nach Formen, die eine Information klarer machen, oder diese Information anderen Personen verdeutlichen, oder sie zu speichern erlauben. Die Bedeutung der standardisierten Form für die Logik liegt in der Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen Spracheinheiten, in denen das Wissen präsentiert wird, auf einheitliche Weise zu beschreiben. Die Formulierung der Sätze, die über schon erzielte Kenntnisse berichten, muss garantieren, dass man allein aufgrund der Form der Aussagen einen Schluss bekommen kann. Darum endet der Prozess der Standardisierung der Sprachausdrücke in der Logik nicht nur mit einer bestimmten Umformung der Sätze der normalen Sprache nach einem vorgegebenen Typ. Man geht noch einen Schritt weiter und ersetzt einige Sprachausdrücke durch Variablen.

Die Standardisierung eines Teils der normalen Sprache ist eine unerlässliche Voraussetzung jeder Wissenschaft. Sie ist notwendig, und diese Notwendigkeit wird in erster Linie durch die Form der Existenz des wissenschaftlichen Wissens bestimmt. Die theoretischen Sätze sind von jeglichem persönlichen Bezug befreit. Ihr Inhalt ist allgemein zugänglich und für jeden gültig. In theoretischen Sätzen geht es um Tatsachen und Relationen zwischen Objekten oder Gruppen von Objekten.

Die Vorteile der Standardisierung sind, dass die standardisierte Beschreibung einer Tatsache oder eines Zusammenhangs erlaubt, von den theoretisch unwesentlichen Faktoren abzusehen. Dadurch bekommt man die Möglichkeit, die schon ausgearbeiteten Methoden der Problemstellung und Problemlösung anzuwenden. Wenn man einen theoretischen Satz beweisen will, bringt man für gewöhnlich die Ausgangsdaten und Voraussetzungen in eine standardisierte Form. Jeder, der einen mathematischen Satz jemals bewies, weiß, dass das der sicherste Weg ist, einen begründeten Schluss zu bekommen. Das Bewusstwerden der Notwendigkeit einer solchen Standardisierung kann man als den Ausgangspunkt der Entwicklung der Logik betrachten.

Aristoteles gilt zweifellos als der erster Logiker, der der Logik die Gestalt einer Theorie verliehen hat. Auf ihn geht es auch zurück, Aussagen, die man als Prämissen eines Schlusses benutzt, in einer Standardform zu formulieren. Diese Form ist die Form einer kategorischen Aussage. Eine kategorische Aussage ist eine Aussage, die einfach ist in dem Sinn, dass sie keine weiteren Aussagen als ihre Teile enthält. Sie ist die Aussage über einen Gegenstand und seine Eigenschaft, die als eine in dem Gegenstand selbst gefundene Eigenschaft gedacht wird. Die Wahrheitsbedingungen einer einfachen kategorischen Aussage sind deswegen durch keine weiteren Aussagen eingeschränkt, die als Teilaussagen möglicherweise implizit in der gegebenen Aussage enthalten sind. Die Elemente der logischen Struktur einer kategorischen Aussage sind Subjekt, Prädikat und Kopula. Ein Beispiel einer kategorischen Aussage ist „Alle Athener sind Griechen". Wird eine Aussage in die Form einer kategorischen Aussage gebracht, dann kann man das Subjekt und Prädikat durch Variablen ersetzen. Diese Ersetzung ist dadurch gerechtfertigt, dass die Formen der Schlüsse für Aussagen beliebigen Inhalts definiert werden. Welche Begriffe die Materie der einfachen kategorischen Aussage ausmachen, ist für die Form des Schlusses, für den die gegebene Aussage als eine Prämisse dient, ohne Belang, sofern die Prämissen des Schlusses wahr sind. Von Bedeutung für die Form des Schlusses sind die Qualität der Relation zwischen Subjekt und Prädikat und das quantitative Charakteristikum des Subjekts.

Die erste Erweiterung der Anzahl der standardisierten logischen Formen verbindet man mit der megarisch-stoischen Schule. Ihre Repräsentanten haben die Idee der Standardisierung der logischen Struktur komplexer Sätze entwickelt. Der Gebrauch solcher Strukturen im diskursiven Denken setzt voraus, dass die Teilsätze komplexer Sätze durch logische Konjunktionen (Funktoren) verbunden werden, und dass die Materie der Aussagen, für die die Teilsätze stehen, nur insofern von Bedeutung für den Wahrheitswert des komplexen Satzes ist, als diese Materie den Wahrheitswert der Teilsätze bestimmt. Die Frage, die einen in Bezug auf die Teilsätze eines komplexen Satzes interessiert, ist also die Frage nach dem Wahrheitswert der fraglichen Aussagen. Bringt man einen komplexen Satz in eine solche standardisierte Form, kann man die ganzen Teilsätze durch Variablen repräsentieren, und nicht nur die Satzteile wie bei der kategorischen Aussage. Der Wertebereich von Variablen wird also erweitert: Aussagen werden als Teil des Wertebereichs der logischen Variablen eingeführt.

Die weitere Erweiterung der Anzahl der standardisierten logischen Strukturen ist mit den Begriffen des Quantors und der Relation verbunden. Obwohl einige diesbezügliche Ideen schon aus der Antike stammen, werden diese Begriffe erst im 19. Jahrhundert eingeführt. Einer von denen, nämlich der Begriff des Quantors, ist mit dem Namen Freges verbunden, und der der Relation – mit denen von de Morgan, Peirce und Schröder. Die Relationentheorie ermöglicht die Darstellung der Struktur einer Relationsaussage durch geordnete n-Tupel von Elementen einer Menge, auf der die Relation definiert ist, wobei n die Anzahl der Stellen einer Relation ist. Die Anerkennung von Relationen als Mittel der Darstellung der logischen Struktur von Aussagen, die man auch bei Frege und Russell findet, bewirkt in erster Linie die Verallgemeinerung des Prädikatsbegriffs. In Verbindung mit Freges Thesen über die funktionale Natur des Prädikats und darüber, dass die Quantität der Aussage kein Charakteristikum des Subjekts dieser Aussage ist, führt sie dazu, dass die Unterscheidung zwischen den bei Aristoteles gleichgestellten Subjekt und Prädikat (die man beide als Begriffe charakterisieren kann) nun durch die Unterscheidung zwischen Argumenten einer Funktion und Funktion selbst ersetzt wird. Somit wird der Wertebereich von logischen Variablen weiter geteilt. Man unterscheidet nun nicht nur zwischen Term-Variablen und Aussagenvariablen, sondern innerhalb von Term-Variablen zwischen Individuen- (Gegenstands-) Variablen und Prädikatenvariablen, die n-stellig sein können. Diese Unterscheidung führte zu der Erweiterung des Anwendungsgebiets der Logik und insbesondere dazu, dass die logische Theorie zur Begründung der Mathematik herangezogen wurde.

Die Einführung von Quantoren kann man als ein weiteres Ergebnis der Idee betrachten, dass sich die Struktur einer Aussage mit Hilfe des Begriffs einer Funktion auffassen lässt. Während in der klassischen Logik der Gebrauch der Termini „alle“ und „einige“ die Qualität der Aussagen charakterisiert, werden diese Wörter nun als Zeichen für Operationen auf Aussagen angewandt. Wenn man eine Aussage in eine Funktion und ihr Argument (oder Argumente) zerlegt, kann man Aussagen, deren Bezeichnungen solche Operatoren enthalten, als Funktionen von Funktionen beschreiben. Versteht man dabei den Begriff, der in der Aussage einem Subjekt prädiziert wird, als eine Funktion, ist das, was die Quantoren bezeichnen, eine Eigenschaft dieser Funktion. Allgemeinheit ist somit keine Eigenschaft einer Aussage, sondern eine Eigenschaft einer Funktion. Das gilt auch für den Begriff der Existenz. Frege, dem die Einführung von Quantoren zugeschrieben wird, behauptet, dass Existenz einem Gegenstand nicht prädiziert werden kann. Nach Freges Überzeugung ist im Satz „Es gibt Menschen“ nicht von Individuen, wie es scheinen mag, sondern von dem Begriff *Mensch* selbst die Rede. Frege formuliert den Satz auf folgende Weise um: „Einige lebende Wesen sind vernünftig“ ([NS], „Dialog mit Pünjer über Existenz“, 70). Dieser Umformulierung legt Frege eine bestimmte Definition des Menschen zugrunde. Er zerlegt den Begriff *Mensch* in zwei andere Begriffe – *Lebewesen* und *vernünftig zu sein.* Was behauptet nun dieser neu gewonnene Satz? Er behauptet, dass zwei Begriffe in einer bestimmten Relation zueinander stehen. Diese Relation kann man als Relation zwischen Umfängen dieser Begriffe auffassen, und sagen, dass der Umfang eines Begriffs mit zumindest einem Teil des Umfangs des anderen zusammenfällt. Wäre Existenz ein Begriff, dann wäre dieser Begriff vollkommen ohne Inhalt, da er nichts abgrenzen könnte. Er hätte zwar den größten Umfang unter den Begriffen, wäre aber eine widersprüchliche Entität. Den Inhalt der Begriffe bilden Merkmale der Gegenstände, die unter diesen Begriff fallen. Um den Inhalt eines Begriffs zu bestimmen, müssen die Gegenstände, die unter den Begriff fallen, sich von denjenigen, denen dieser Begriff nicht zukommt, durch solche Merkmale unterscheiden. Existenz kommt aber, nach Freges Meinung, jedem Gegenstand zu, also kann man durch Existenz keine Gegenstände voneinander unterscheiden. Also hat der Begriff der Existenz keinen Inhalt, den er aber haben müsste, wenn er ein Begriff wäre. Folglich ist Existenz kein Begriff, und folglich kein Merkmal, das im Inhalt eines anderen Begriffs auftreten kann. Frege bezeichnet

Existenz als eine Eigenschaft eines Begriffs ([NS], 74). Vermutlich ist es die Eigenschaft eines Begriffs, einen nicht-leeren Umfang zu haben.

Übungsaufgaben

4. Betrachten Sie eine Sprache $\mathcal{S}$, deren Ausdrücke in drei syntaktische Kategorien eingeteilt sind – Namen (bezeichnet durch „n"), die ein Objekt nennen, Sätze (bezeichnet durch „s"), die eine Behauptung ausdrücken, und Funktoren, die einem Ausdruck oder mehreren Ausdrücken neue Ausdrücke zuordnen, in denen der gegebene Ausdruck (oder Ausdrücke) als einer der Bestandteile vorkommt. Die Ausdrücke, aus denen mit Hilfe eines Funktors ein neuer Ausdruck gebildet wird, bezeichnet man als Argumente dieses Funktors, und den Ausdruck, der gebildet wird, als seinen Wert. Funktoren kann man nach der Anzahl ihrer Argumente klassifizieren. Ordnet ein Funktor m Argumenten $X_1, \ldots, X_m$ einen Ausdruck Y zu, dann bezeichnet man den Funktor durch die Zeichenfolge $F_m X_1 \ldots X_m Y$. Die Funktoren unterteilt man nach der Art ihrer Argumente und Werte in 4 Kategorien:

   a) Funktoren, die Namen als Argumente und Namen als Werte haben. Sie heißen *Operatoren.* Ein Beispiel: der Funktor in dem Ausdruck „der Verfasser des *Tractatus*" gehört zu der Kategorie der Funktoren $F_1 nn$.

   b) Funktoren, die Namen als Argumente und Sätze als Werte haben. Sie heißen *Prädikatoren.* Ein Beispiel: der Funktor in dem Satz „Sokrates ist ein Mensch" gehört zu der Kategorie der Funktoren $F_1 ns$.

   c) Funktoren, die Sätze als Argumente und Sätze als Werte haben – *Konnektoren.* Der Funktor in dem Satz „Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich" gehört zu der Kategorie der Funktoren $F_2 sss$.

   d) Funktoren, die Sätze als Argumente und Namen als Werte haben. Der Funktor in dem Ausdruck „Der Philosoph, der *Tractatus* schrieb" gehört zu der Kategorie der Funktoren $F_1 sn$.

   I. Bestimmen Sie, zu welcher syntaktischen Kategorie die unterstrichenen Ausdrücke gehören.

i. „Wittgenstein ist der Verfasser des *Tractatus*“

ii. „Es ist notwendig, dass $9 > 7$ “

iii. „Es regnet oder es regnet nicht“

iv. „Wittgenstein ist der Verfasser des *Tractatus*“

v. „Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte, starb im Elend“

vi. „Wittgenstein ist der Verfasser des *Tractatus*“

II. Bezeichnen Sie diese Ausdrücke durch das entsprechende Symbol („n“, „s“ oder die Bezeichnung eines Funktors).

5. Das Alphabet $\mathcal{A}$ einer Sprache besteht aus einem Element, $\mathcal{A} = \{1\}$. Einen Ausdruck dieser Sprache definiert man folgendermaßen. (i) 1 ist ein Ausdruck der Sprache; (ii) ist a ein Ausdruck der Sprache, dann ist $(a1)$ ein Ausdruck der Sprache (ein Ausdruck der Sprache wird also aus einem anderen Ausdruck dadurch gebildet, dass man 1 rechts von a schreibt oder mit anderen Worten 1 auf a anwendet); (iii) nichts anderes ist ein Ausdruck der Sprache. Der Ausdruck „1“ bezeichnet seinerseits das Objekt | . Jeder Ausdruck der Sprache bezeichnet auch ein Objekt, das jedes Mal die Kombination einer endlichen Anzahl der Striche ist, so ist z. B. der Ausdruck „((11)1)“ ein Name des Objekts | | |. Die inneren Klammern, die die Konstruktionsweise des Ausdrucks wiedergeben, können ausgelassen werden (der Name „((11)1)“ hat in einem solchen Fall die Gestalt „(111)“). Bestimmen Sie, welche der Ausdrücke a)-c) und welche der Ausdrücke der Gestalt d)-e) (wobei a für einen Ausdruck der Sprache steht) korrekt (der gegebenen Definition entsprechend) gebildet wurden, und welche Objekte diesen Ausdrücken entsprechen.

a) (1(111))

b) (11)

c) ((11)(111))

d) $((111a1)1)$

e) $((a1)1)$

2 Traditionelle formal-logische Theorie der Aussage

2.1 Begriff

2.1.1 Definitionen

Jetzt wenden wir uns den logischen Grundbegriffen, wie sie in der traditionellen formalen Logik gebraucht werden, zu. Diese sind *Begriff*, *Urteil* und *Schluss*. Wir benutzen hier an Stelle von „Urteil" das Wort „Aussage", da wir davon ausgehen, dass das Urteil in einem Satz ausgedrückt wird. Das Urteilen (wie ein Urteil gefällt wird) wird im Rahmen dieser Untersuchung nicht betrachtet. Von Interesse ist nur die Form der Existenz des schon gefällten Urteils. Die Benutzung des Terminus „Aussage" gewährleistet außerdem eine einheitlichere Terminologie.

Wir haben Logik als die Wissenschaft vom richtigen Schließen definiert. Man kann auch alternative Definitionen der Logik geben. Eine von diesen beschreibt Logik als Wissenschaft von den Formen des richtigen Denkens. Obwohl diese Definition im Rückblick auf die Diskussion über Psychologismus eine gewisse Gefahr in sich birgt, hat sie den Vorteil, eine strikt logische Definition von Begriff, Aussage, und Schluss zu ermöglichen. Sonst müssen sie als primitive Begriffe angesehen werden, die wegen ihres grundlegenden Charakters keine Definition zulassen. Um aber der Gefahr einer psychologistischen Auffassung des Terminus „Denkform" zu entgehen, legen wir fest, dass dieses Wort für eine der Klassen von Einheiten steht, in die man einen gedachten Inhalt (eine Wissenseinheit oder eine Gesamtheit von solchen) teilen kann, so dass die bezeichnenden Ausdrücke für diese Bestandteile keine synkategorematischen Symbole sind.

Traditionell unterscheidet man drei Denkformen – Begriff, Aussage und Schluss.

Unter dem *Begriff* versteht man die Form des Denkens, welche Gegenstände durch die Einheit ihrer wesentlichen Merkmale charakterisiert und voneinander abgrenzt.

Die *Aussage*, unter der man einen Zusammenhang von mindestens zwei Begriffen versteht, lässt sich dann als eine Form des Denkens definieren, welche die Verhältnisse zwischen Gegenständen und ihren Merkmalen mittels Bejahung oder Verneinung repräsentiert. Relationsaussagen betrachten wir hier nicht, aber eine entsprechende Definition kann auch für sie gegeben werden.

Fasst man den Begriff der Aussage als fundamentalen Begriff (in Bezug auf die anderen logischen Grundbegriffe) auf, so definiert man als Aussage die Denkform, mit deren Hilfe erstens ein bestimmter Gegenstand von den anderen getrennt wird, zweitens ein Teil seines Inhalts dargelegt wird, und drittens eine Relation zwischen dem Gegenstand und dem gegebenen Teil seines Inhalts behauptet wird. Die Aussage kann man dann in ihre Bestandteile zerlegen, von denen einige als Begriffe definiert werden. Einige Zusammenhänge von Aussagen, in denen die Aussage selbst als eine Komponente auftritt, werden dann als Schlüsse bezeichnet. Die Möglichkeit einer solchen Auffassung wird letztendlich durch die Idee gerechtfertigt, die Aussage als Hauptform des logischen Denkens zu charakterisieren. Diese Idee ist offenbar dadurch begründet, dass erst der Aussage solche Eigenschaften wie wahr oder falsch zu sein zugesprochen werden. Dass die Aussage diese Eigenschaften besitzt, macht das Schließen möglich. Die Rolle der Aussage als einer Komponente des Schlusses ist also entscheidend für die Klassifikation von logischen Formen und bestimmt, welche von ihnen grundlegend ist. Zu beachten ist auch die Argumentation derjenigen, die den Begriff als eine fundamentale Form des logischen Denkens betrachten. Die Befürworter dieser Ansicht betrachten Logik als einen wesentlichen Teil des Instrumentariums jeder Wissenschaft und gehen davon aus, dass eine wissenschaftliche Untersuchung die Entwicklung und Formulierung eines Begriffs zu ihrem Ziel hat, und dass die Aussagen und Schlüsse, welche die Form der Existenz der Untersuchung darstellen, in den Begriff münden und in seinem Inhalt enthalten sind. Ohne ausdrücklich für jemanden in dieser Auseinandersetzung Partei zu ergreifen, setzen wir als Ausgangspunkt dieser Untersuchung den Begriff des Begriffs.

2.1.2 Klassifikation der Begriffe

Begriffe können in verschiedene Klassen unterteilt werden, abhängig vom Grund dieser Klassifikation.

Wenn man Begriffe durch Unterscheidung der Gegenstände charakterisiert, die mit Hilfe der Begriffe definiert werden, teilt man sie in folgende Gruppen.

1. Man unterscheidet *leere* und *nichtleere* Begriffe. Unter einen leeren Begriff fällt kein existierender Gegenstand. Um Unbestimmtheit einer solchen Beschreibung zu vermeiden, kann man auch behaupten, dass ein einfacher (oder atomarer) Satz, in dem der Name eines solchen Begriffs als Funktor (Prädikator) vorkommt, nicht wahr sein kann. Ein solcher Begriff ist z. B. *Zentaur*. Ein Begriff ist nicht leer, wenn man mindestens einen Gegenstand aufweisen kann, der unter den Begriff fällt, oder wenn mindestens einer der atomaren Sätze, in denen der Name des Begriffs als Funktor vorkommt, wahr ist. So ist z. B. dementsprechend der Begriff *Pferd* nicht leer.

2. Ferner unterscheidet man *konkrete* und *abstrakte* Begriffe. Einen konkreten Begriff (*Pferd*, *Mensch*, *Haus*) kann man zur Definition einzelner Gegenstände (einer Art) oder zu einer Behauptung über einen beliebigen von gleichartigen Gegenständen benutzen. Ein abstrakter Begriff (*Mut*, *Röte*) wird benötigt, um eine Eigenschaft von Gegenständen oder eine Relation zwischen einzelnen Gegenständen zu definieren oder zu repräsentieren. Eine Eigenschaft eines Gegenstands ist das, was mittels eines abstrakten Begriffs gedacht wird. Viele philosophische Probleme sind mit einzelnen abstrakten Begriffen wie z. B. *die Röte* verbunden. Man kann sich z. B. fragen, ob die Eigenschaft, die mit Hilfe eines solchen Begriffs gedacht wird und die offenbar als *ein* Objekt identifiziert wird, jedem der roten Gegenstände zukommt und dabei mit sich selbst identisch ist. Oder sind alle roten Gegenstände nur einander ähnlich? Eine Diskussion über solch eine Problematik würde uns hier aber viel zu weit führen, deswegen wird sie hier nur angedeutet.

3. Man unterscheidet *einzelne* und *allgemeine* Begriffe. Beschreibt man ein einzelnes Objekt, das zu einer Klasse gleichartiger Objekte gehört (*Mensch*, *Urteil*), oder eine solche Klasse, ist der Begriff allgemein. Der Begriff ist einzeln, wenn unter diesen Begriff ein einziges Objekt fällt (*Augsburg*). Es gibt auch Begriffe, die eine Gesamtheit von Gegenständen betreffen, welche gleiche Eigenschaften (oder mindestens eine gleiche Eigenschaft) besitzen. Ein Beispiel eines solchen Begriffs ist *Parlament*. Solche Begriffe nennt man *Sammelbegriffe*. Wenn man die Bildungsweise eines Begriffs berücksichtigt, kann man das Spezifische

eines Sammelbegriffs und den Unterschied zwischen einem Sammelbegriff, der selbst als allgemeiner Begriff auftritt, und einem allgemeinen Begriff, der kein Sammelbegriff ist, folgendermaßen beschreiben. Ein allgemeiner Begriff kann auf jedes Element der Klasse der Gegenstände angewandt werden, deren Unterklasse durch den fraglichen Sammelbegriff definiert ist. Der Sammelbegriff dagegen lässt sich nicht auf jedes oder ein einzelnes Element einer solchen Unterklasse anwenden, deren Elemente ein Ganzes bilden, das durch den gegebenen Sammelbegriff definiert wird. Nimmt man z. B. die Klasse von Menschen, kann man über jeden Menschen behaupten, dass dieser ein Parlamentarier ist. Denkt man über Parlamentarier als eine Gruppe von Objekten, gewinnt man die Möglichkeit, diese Gruppe als ein Parlament zu beschreiben. Dieser Begriff lässt sich seinerseits jedoch nicht auf einzelne Menschen anwenden, sondern nur auf die besagte Gruppe.

Zieht man die Charakteristika des Begriffs in Betracht, die den Begriff als eine Gesamtheit von anderen Begriffen repräsentieren, liefert das Gründe für folgende Klassifikationen.

1. Ein Begriff kann *registrierend* oder *nicht-registrierend* sein. In einem registrierenden Begriff kann man solche Merkmale unterscheiden, die innerhalb einer Klasse von Gegenständen einen besonderen Teil bestimmen. Zu einer solchen besonderen Unterklasse werden Elemente einer Klasse entsprechend ihren raumzeitlichen oder anderen Eigenschaften vereinigt. In diesem Sinne sind registrierende Begriffe quantitativ bestimmt. Nicht-registrierende Begriffe sind dagegen nur qualitativ bestimmt, wie z. B. *Mensch*. Der Begriff *Menschen, die heutzutage in Europa wohnen*, ist registrierend.

2. Man unterscheidet ferner *absolute* und *relative* Begriffe. Ein relativer Begriff schließt ein Merkmal ein, das eine Relation eines Gegenstands zu einem anderen festhält. Ein absoluter Begriff hat dagegen kein solches Merkmal. *Mensch*, *Gebäude* sind absolute, *Vater*, *Lehrer* – relative Begriffe.

3. Ein Begriff kann *positiv* oder *negativ* sein, wie z. B.*Mensch* und *Nicht-Mensch*. Für gewöhnlich geht man davon aus, dass ein negativer Begriff sich von dem positiven nur durch die so ge-

nannten Artmerkmale unterscheidet. Für das gegebene Beispiel bedeutet dies: wenn man den Menschen als ein vernunftbegabtes Lebewesen definiert, ordnet man dem Begriff *Nicht-Mensch* alle anderen Lebewesen zu, denen man keine Vernunft zuspricht. Wenn man dagegen dem Begriff *Nicht-Mensch* alle Objekte zuordnet, die in unserem Diskussionsbereich vorkommen, sogar solche, die mit Hilfe von abstrakten Begriffen beschrieben werden, droht der negative Begriff kein Begriff zu werden, da er in diesem Fall keine inhaltliche Bestimmtheit hat.

2.1.3 Merkmale

Bei der Klassifikation der Begriffe benutzten wir schon mehrmals den Terminus „Merkmal". Unter einem Merkmal versteht man in der Logik das, worin verschiedene Gegenstände einander ähnlich sind, oder worin sie sich voneinander unterscheiden. Merkmale unterteilt man in wesentliche und unwesentliche, allgemeine und Unterscheidungsmerkmale, Hauptmerkmale und abgeleitete Merkmale, zufällige und notwendige. Wir betrachten nur zwei dieser Unterscheidungen.

Allgemein heißen die Merkmale, in denen Gegenstände einander ähneln oder identisch sind. Merkmale, durch die sich Gegenstände voneinander unterscheiden, heißen *Unterscheidungsmerkmale*. Quadrat und Rhombus z. B. haben einige allgemeine Merkmale, sie sind beide Vierecke und haben gleiche Seiten. Das Unterscheidungsmerkmal, das ein Quadrat im Vergleich zum Rhombus hat, besteht darin, dass es rechteckig ist.

Wenn man einen Begriff bildet, kann man nicht alle Merkmale des gedachten Gegenstands in den Begriff einschließen. Eine solche Aufgabe ist nicht nur kaum realisierbar kraft der Mannigfaltigkeit von Merkmalen eines Gegenstands, sondern lohnt sich auch nicht vom logischen Standpunkt aus. Die wissenschaftliche Erkenntnis verlangt das Auswählen derjenigen Merkmale, die es einerseits erlauben, den gedachten Gegenstand von anderen Objekten zu unterscheiden, und die andererseits diesem Gegenstand unter allen Umständen und Bedingungen zugehören, so dass ohne diese Merkmale der Gegenstand als solcher überhaupt nicht gedacht werden kann. Solche Merkmale heißen *wesentlich*. Das Quadrat hat zwei wesentliche Merkmale – rechteckig zu sein und gleiche Seiten zu haben. Ein Quadrat kann auch unwesentliche Merkmale haben, wie eine bestimmte Seitenlänge (z. B. die Seitenlänge 1). Das Merkmal, das einem Gegenstand sowohl zukommen, als auch nicht zukommen kann, wobei das Fehlen des Merkmals die Existenz dieses Gegenstands nicht beeinflusst, heißt *unwesentlich*. Ob die Seitenlänge eines Quadrates 1 oder 2 ist, ist unwesentlich, insofern es sich um definierende Eigenschaften eines Quadrates handelt, durch die man jedes beliebige Quadrat im Gegensatz zu anderen Objekten der gleichen Gattung charakterisiert.

Da man durch wesentliche Merkmale einen Gegenstand von den anderen unterscheiden kann, darf man wesentliche Merkmale als Unterscheidungsmerkmale ansehen. Wenn ein Gegenstand mehrere wesentliche Merkmale hat (wie ein Quadrat), reicht eins als Unterscheidungsmerkmal nicht aus. Durch die Eigenschaft *rechteckig zu sein* kann man das Quadrat von dem Rhombus unterscheiden, nicht aber von einem Rechteck. Die Gleichheit der Seiten allein reicht nicht aus, um Quadrat und Rhombus auseinander zu halten. Also lassen sich die Gegenstände, die unter einen Begriff fallen, nur durch die Einheit der wesentlichen Merkmale von den Gegenständen unterscheiden, die unter einen anderen Begriff fallen.

Zu bemerken ist, dass durch die Einheit der Merkmale nicht die Individuen derselben Art voneinander unterschieden werden, sondern Exemplare, auf die ein Begriff anwendbar ist, von den Exemplaren, die durch einen anderen Begriff vertreten sind. Einen Menschen kann man durch Merkmale, die in dem Begriff *Mensch* vereinigt sind, von den Individuen anderer Arten unterscheiden, den Individuen, deren Eigenschaften Merkmale anderer Begriffe z. B. *Pflanze* oder *Gebäude* bilden.

Man spricht aber nicht nur über Merkmale von Gegenständen, die als Grund für die Begriffsbildung auftreten, und die somit den Unterschied zwischen zwei verschiedenen Begriffen ausmachen können. Einen schon gebildeten Begriff kann man infolgedessen auch als eine Gesamtheit von verschiedenen Merkmalen beschreiben. Diese zeigen die Relation des Begriffs zu anderen Begriffen. Die Klassifikation der Merkmale, die man in einem Begriff unterscheidet, folgt der Unterteilung der Merkmale von Gegenständen, die mit Hilfe des Begriffs definiert werden, in wesentliche und unwesentliche. Wenn man über wesentliche Merkmale spricht, unterscheidet man zwischen einem Gattungsmerkmal und einem Artunterschied.

Ein *Gattungsmerkmal* wird zur Definition der Gegenstände, die mit Hilfe des gegebenen Begriffs charakterisiert werden, benötigt. Wenn wir jedem Begriff eine Klasse von Gegenständen zuordnen, dann bilden die Gegenstände, die durch den gegebenen Begriff definiert werden, eine Unterklasse der Klasse der Gegenstände, die man dem Gattungsbegriff zuordnen kann. Wenn wir Logik als Wissenschaft definieren, ist das ein Merkmal, das die Logik nicht von anderen Wissenschaften (den Begriff der Logik nicht von anderen Begriffen mit demselben Gattungsmerkmal) unterscheidet, sondern von allem anderen, das sich nicht als Wissenschaft definieren lässt. Ein Gattungsmerkmal betrachtet man als eines der wesentlichen Merkmale des fraglichen Objekts, die den *Hauptteil* des Begriffsinhaltes bilden. Im Begriff *Quadrat* ist dieses Merkmal *Rechteck*. Ein weiteres wesentliches Merkmal ist ferner der *Artunterschied*. Das ist ein Begriff, der dazu dient, dass man den gegebenen Begriff von anderen Begriffen derselben Gattung unterscheiden kann. Sprechen wir z. B. über Logik, dann können wir das Merkmal *vom richtigen Schließen*, durch welches wir Logik als Wissenschaft charakterisieren, als solch einen Artunterschied betrachten. Das Gattungsmerkmal zusammen mit einem Artunterschied ergibt eine *Art*. Die Art ist ein Merkmal, insofern sie einem Gegenstand zugesprochen werden kann. Die Art *Quadrat* kann man z. B. einer geometrischen Figur zusprechen. Der so genannte *Nebenteil* (im Inhalt) eines Begriffs, der unwesentliche Merkmale enthält, kann aus mehreren Merkmalen bestehen. Eine Art solcher Merkmale ist das *eigene Merkmal*. Das ist das Merkmal, das allen Gegenständen einer gegebenen Klasse zukommt, und das kein wesentliches Merkmal dieser Gegenstände ist, aber von diesen abgeleitet werden kann. Ein in diesem Zusammenhang traditionell angegebenes Beispiel ist das Merkmal *Tastgefühl haben* bei Menschen, das allen Lebewesen zukommt. Eine weitere Art der Merkmale ist das *nichteigene Merkmal*. Das ist ein Merkmal, das allen Gegenständen der gegebenen Klasse zukommt, sich aber nicht aus den wesentlichen Merkmalen ableiten lässt (z. B. die schwarze Farbe der Krähe).

2.1.4 Umfang und Inhalt eines Begriffs

Man unterscheidet zwischen dem Umfang eines Begriffs und seinem Inhalt. Durch Umfang und Inhalt charakterisiert man sowohl Begriffe als auch Beziehungen zwischen Begriffen.

Der *Inhalt eines Begriffs* besteht aus allen seinen Elementen (oder Merkmalen), die man als selbständige Begriffe betrachten kann. Meistens wird aber der Inhalt eines Begriffs mit den wesentlichen Merkmalen identifiziert, die dem gedachten Gegenstand zukommen. Laut dieser Auffassung bilden den Inhalt des Begriffs *Quadrat* die Begriffe *rechteckig zu sein* und *gleiche Seiten zu haben.*

Den *Umfang eines Begriffs* definiert man als alle diejenigen Begriffe, für die der gegebene Begriff als Hauptteil ihres Inhalts (oder ein Gattungsmerkmal) dient. Man ist oft geneigt, den Umfang eines Begriffs als die Menge (oder die Klasse) der Gegenstände, die unter diesen Begriff fallen, zu betrachten. Obwohl diese Auffassung ein bequemes Modell für die Beschreibung der Beziehungen zwischen Begriffen liefert, kann man eine solche Definition nicht als zutreffend bezeichnen, und das aus folgenden Gründen.

Erstens handelt es sich in der Logik um Relationen zwischen Begriffen, nicht um Relationen zwischen Gegenständen. Zweitens kann die Annahme, dass der Umfang eines Begriffs aus Gegenständen besteht, zu der Annahme führen, dass der Umfang des Begriffs ein Aggregat und somit selbst ein besonderer Gegenstand ist. Frege fasste den Begriff als Funktion auf. Der Wert einer derartigen Funktion ist ein Wahrheitswert, und ihre Argumente sind Gegenstände. Wenn der Begriff als eine Funktion auftritt, kann er selbst nicht als Gegenstand betrachtet werden. Dafür fehlt die Möglichkeit, ihn in diesem Zusammenhang ohne jegliche Ergänzung zu denken. Man kann aber die Klasse der Gegenstände, die unter den Begriff fallen, selbst als einen Gegenstand ansehen. Ob Frege diese Klasse als Umfang des Begriffs betrachtet, ist fraglich. Als Begriffsumfang bezeichnet Frege, davon ausgehend, dass ein Begriff eine (wahrheitswertige) Funktion ist, den Wertverlauf einer solchen Funktion ([FBB], „Funktion und Begriff", 28). Man kann den als Gegenstand aufgefassten Begriffsumfang (Wertverlauf) nun mit anderen gleichartigen Gegenständen vergleichen, und Frege betrachtet es als evidente Tatsache, dass aus der Identität der Wertverläufe von zwei Funktionen man immer auf die Gleichheit der Werte dieser Funktionen für ein und dasselbe Argument schließen kann und umgekehrt. In dem Aufsatz „Funktion und Begriff" (1891) benutzt er die Gleichheit der Werte von zwei Funktionen für dasselbe Argument als Definition der Beziehung *denselben Wertverlauf zu haben* zwischen diesen Funktionen ([FBB], 23–24). Bei dem Vergleich der

Wertverläufe von zwei Funktionen vergleicht man also in der Tat geordnete Paare, die aus einem Argument und dem Wert der jeweiligen Funktion für dieses Argument bestehen, wodurch letztendlich an die Stelle der Klasse der Gegenstände (als eines Begriffsumfangs) eine andere Klasse, nämlich die Klasse der besagten Paare gesetzt wird. Trotzdem spricht Frege auch über Klassen der unter einen Begriff fallenden Gegenstände. Nun gibt es verschiedene Funktionen (Begriffe), unter denen es auch solche gibt, deren Umfang nicht mittels desselben Begriffs gedacht werden kann, durch den die Gegenstände, die unter den Begriff fallen, definiert werden. Über Sokrates oder Platon kann man sinnvoll behaupten, dass jeder von ihnen ein Mensch ist. Es wäre aber kaum sinnvoll zu sagen, dass die Klasse aller Menschen ein Mensch ist. Die Klasse aller Menschen können wir als eine Klasse beschreiben, die nicht ihr eigenes Element ist. Betrachten wir nun die Klasse solcher Klassen, und fragen wir uns, ob diese Klasse (die als $\mathcal{K}$ bezeichnet wird) sich selbst angehört oder nicht. Wenn ja, dann fällt sie unter den Begriff einer Klasse, die sich selbst nicht angehört, und folglich gehört sie sich selbst nicht an. Wenn wir aber annehmen, dass die Klasse $\mathcal{K}$ sich selbst nicht angehört, dann gehört sie zu $\mathcal{K}$. Wir bekommen einen Widerspruch ([GGA], 253–255). Aus diesem Widerspruch zieht Frege mehrere Schlüsse. Einer davon, der von ihm in verschiedenen Zusammenhängen erwähnt wird, besteht darin, dass dem Umfang eines Begriffs als Klasse der Gegenstände, die unter diesen Begriff fallen, Gegenständlichkeit abgesprochen werden muss. Selbst wenn die Klasse der Gegenstände, die durch den Begriff definiert werden können, als Gegenstand anerkannt wird, muss es ein „uneigentlicher“ Gegenstand sein. Ein Ausweg daraus ist die Definition der Klasse (des Umfangs eines Begriffs) als einer Einheit der Merkmale. Im Umfang eines Begriffs realisieren sich somit die Beziehungen dieses Begriffs zu anderen Begriffen, während sich in seinem Inhalt die Beziehungen des Begriffs zu Gegenständen, die unter diesen Begriff fallen, realisieren.

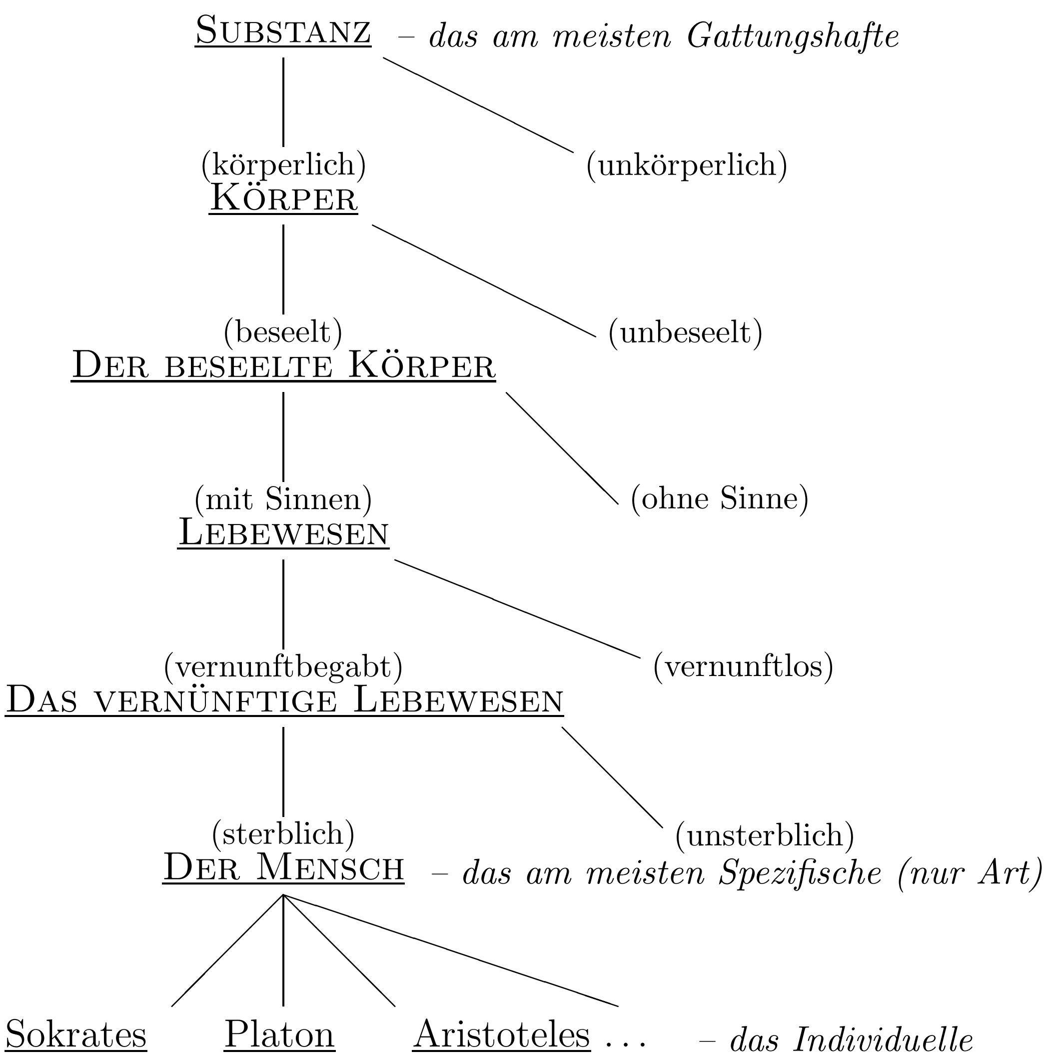
Die Beziehung zwischen dem Umfang und Inhalt eines Begriffs charakterisiert man folgendermaßen.

Wenn der Inhalt des Begriffs A ein Teil des Inhalts des Begriffs B ist, dann fällt der Umfang des Begriffs B in den Umfang des Begriffs A. Und umgekehrt: wenn der Umfang von A ein Teil des Umfangs von B bildet, dann ist B ein Teil des Inhalts des Begriffs

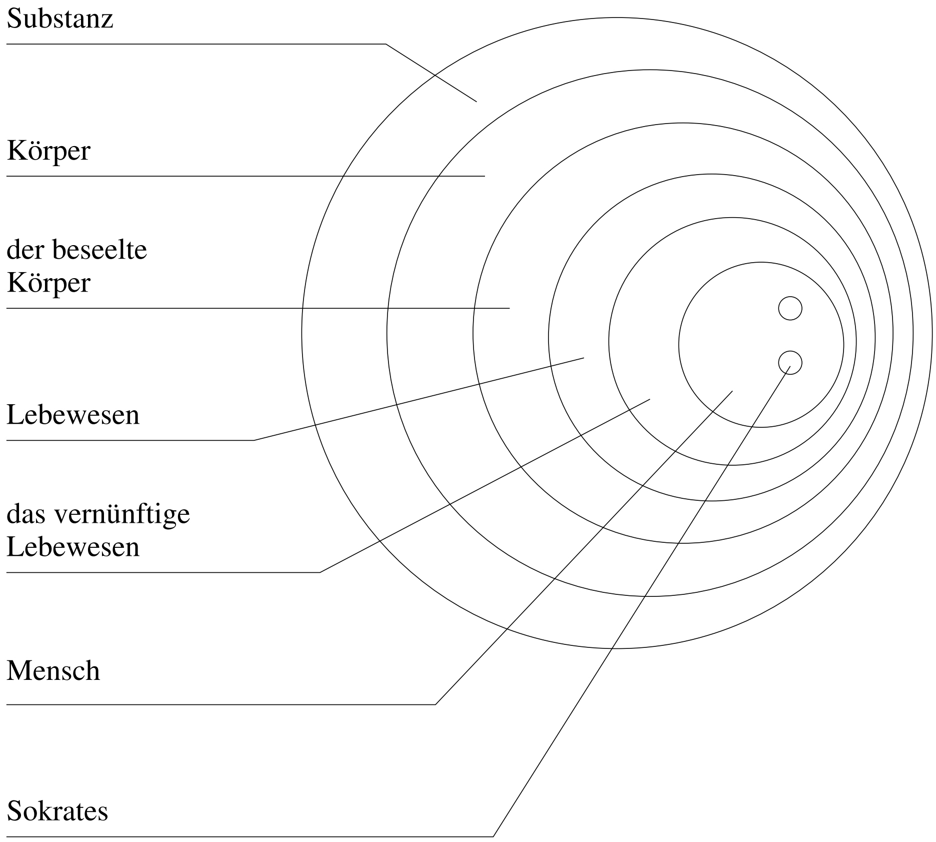
A. Nehmen wir die Begriffe *Mensch* und *Grieche*. Da jeder Grieche ein Mensch ist, ist *Mensch* ein Merkmal eines jeden Griechen, und somit bildet dieser Begriff einen Teil des Begriffsinhaltes von *Grieche*. Der Begriff *Mensch* kommt aber auch im Inhalt der Begriffe vor, die wir einfachheitshalber durch das Wort „Nicht-Grieche" bezeichnen können. Also enthält der Umfang des Begriffs *Mensch* den Umfang des Begriffs *Grieche*. Diese Beziehung zwischen dem Inhalt und Umfang eines Begriffs bezeichnet man als *das Gesetz der reziproken Beziehung* zwischen dem Inhalt und dem Umfang eines Begriffs (*Reziprozitätsgesetz der Begriffe*). Dieses Gesetz gilt nicht für zwei beliebige Begriffe, sondern nur für diejenigen, von denen einer der Gattungsbegriff in Bezug auf den anderen ist. Wenn wir diese Forderung nicht berücksichtigen, können wir die Fälle, wo zwei Begriffe verschiedenen Inhalt aber den gleichen Umfang haben, nicht erklären. Unter Berücksichtigung dieser Forderung kann man das Gesetz folgendermaßen formulieren. *Jede Erweiterung des Inhalts eines Begriffs führt zur Einschränkung seines Umfangs, und jede Einschränkung des Inhalts führt zur Erweiterung des Umfangs.*

Wenn ein Element des Umfangs eines Begriffs kein Teil des Inhalts anderer Begriffe sein kann, heißt es *Individuum*. Als eine *Gattung* bezeichnet man einen Begriff, der in Bezug auf einen anderen, in dessen Inhalt er als Hauptteil vorkommt, einen größeren Umfang hat. Als eine *Art* charakterisiert man den Begriff, der in Bezug auf den anderen, der in seinem Inhalt als der Hauptteil vorkommt, einen kleineren Umfang hat. Die Begriffe der Art und Gattung sind somit relativ. Fällt der Umfang eines Begriffs in den Umfang eines anderen, dann ist der zweite Begriff eine Gattung in Bezug auf den ersten Begriff, und der erste – eine Art für den zweiten. Ein Begriff kann Gattung für einen zweiten und zugleich eine Art für einen dritten Begriff sein. Die erste und die berühmteste Klassifikation der Termini nach ihrem Umfang stammt von Porphyr (von Tyrus) (3. Jh. n. Chr.) (*Schema 3*). Das ist der so genannte „Baum des Porphyr" ([Boch70], 24.03). In der Klassifikation von Porphyr ist die *Substanz* eine Gattung, die keine Art sein kann. Solche Begriffe heißen *Kategorien*. Sie haben den größten Umfang und den kleinsten Inhalt im Vergleich zu anderen Begriffen. *Lebewesen* ist eine Art für *Körper* und Gattung für das *vernünftige Lebewesen*. *Mensch* ist hier nur eine Art, *Sokrates* – ein Individuum. In der Logik hat sich die diagrammatische Darstellung der Umfänge und deren Beziehungen durchgesetzt. Diagrammatisch dargestellt sieht der Baum des Porphyr so aus (*Schema 4*). Mit Hilfe von Diagrammen werden formal-logische Beziehungen zwischen Begriffen sowie Figuren und Modi des Syllogismus dargestellt. Als erster hat Leibniz solche Darstellungen entworfen. Sie blieben bis 1903 unveröffentlicht. Beachtet werden solche Darstellungen seit Euler (zunächst 1768). Weiterentwickelt hat sie unter anderen Venn (1880) ([Boch70], 304–306).

Der Baum des Porphyr



Schema 3



Schema 4

2.1.5 Formal-logische Beziehungen zwischen Begriffen

Zwischen zwei beliebigen Begriffen kann man immer eine Relation feststellen, die sowohl Inhalt als auch Umfang dieser Begriffe betrifft. Derartige Relationen werden als *formal-logische* Beziehungen zwischen Begriffen bezeichnet.

Ihrem Inhalt nach unterscheidet man *vereinbare* und *unvereinbare* Begriffe. Vereinbar sind zwei Begriffe, die solche Merkmale in ihrem Inhalt haben, dass deren Umfang völlig oder zum Teil zusammenfallen kann. Trifft das auf die Begriffe nicht zu, heißen sie unvereinbar.

1. Vereinbare Begriffe können gleichbedeutend oder *äquipollent* sein, wie *Rechteck mit gleichen Seiten* und *Quadrat*. Solche Begriffe sind ihrem Umfang nach gleich, aber fallen dem Inhalt nach nicht zusammen.

2. Zwei vereinbare Begriffe können sich *schneiden*, wie *Blume* und *Fleischfresser*. Ein Teil des Umfangs eines Begriffs fällt in die-

sem Fall mit einem Teil des Umfangs des anderen zusammen. Der Hauptteil des Inhalts der beiden Begriffe ist verschieden.

3. Zwei vereinbare Begriffe können zueinander in der Relation eines Unterordnenden zu einem Untergeordneten (einer Gattung zu einer Art) stehen, wie *Pflanze* und *Tulpe*. In diesem Fall ist der Umfang eines Begriffs ganz in dem Umfang eines anderen enthalten, und der Inhalt des unterordnenden (*subordinierenden*) Begriffs ist ein Teil des Inhalts des untergeordneten (*subalternen*) Begriffs.

4. Verschiedene Arten ein und derselben Gattung sind *koordiniert*. Der Umfang solcher Begriffe (wie z. B. *Löwe* und *Tiger*) hat keine gemeinsamen Teile (deswegen kann man sie auch als unvereinbare Begriffe definieren), aber der Inhalt beinhaltet ein und dasselbe Gattungsmerkmal.

5. Unvereinbare Begriffe können *kontradiktorisch* oder widersprüchlich sein, wie *weiß* und *nicht-weiß*. Bei kontradiktorischen Begriffen kann man immer einen als positiven Begriff und den anderen als negativen Begriff betrachten, wobei der negative Begriff aus dem Umfang des positiven ausgeschlossen wird. Wenn wir diese Begriffe als Arten derselben Gattung ansehen, dann können wir sie dadurch charakterisieren, dass sie sich komplementär zueinander verhalten: alles, was nicht-weiß ist, ist nicht weiß, und alles, was weiß ist, ist nicht nicht-weiß.

6. Unvereinbare Begriffe können *konträr* sein, wie z. B. *weiß* und *schwarz*. Solche Begriffe sind einem dritten Begriff untergeordnet, aber im Unterschied zu kontradiktorischen Begriffen sind sie nicht komplementär zueinander. Nicht für jeden Begriff lässt sich ein konträrer Begriff finden. Meistens findet man konträre Begriffe im Umfang solcher Gattungsbegriffe, deren Arten vergleichbar in Bezug auf eine Eigenschaft sind. Für zwei konträre Begriffe gilt, dass einer von denen in Bezug auf den dem anderen kontradiktorischen Begriff subaltern ist, und somit mit Hilfe von diesem definiert werden kann, aber sein Inhalt weist ein gewisses Merkmal auf, das ihn als einen positiven Begriff zu charakterisieren erlaubt.

7. Begriffe, die ihrem Umfang nach einander ausschließen, und dabei keinen gemeinsamen nahestehenden Gattungsbegriff haben, heißen *disparat*. Beispiel: *Seele* und *Dreieck*.

Übungsaufgaben

6. Charakterisieren Sie folgende Begriffe, von der gegebenen Klassifikation der Begriffe ausgehend:

   a) Haus

   b) das runde Quadrat

   c) Form

7. Bestimmen Sie einen der Artbegriffe, für den die folgenden Begriffe Gattungsbegriffe sind:

   a) Wissenschaft

   b) Satz

   c) Sprache

   d) Gebäude

   Was sind für den jeweiligen Artbegriff Individuen oder für den von Ihnen angegebenen Begriff ein Artbegriff?

8. Bestimmen Sie, in welchen formal-logischen Beziehungen folgende Begriffe zueinander stehen.

   a) Kröte – Kugelschreiber

   b) Dürer – Picasso

   c) sterblich – unsterblich

   d) Löwe – Raubtier

   e) Haus – Treppe

   f) Wissenschaftler – Nobelpreisträger

   g) Rechteck mit gleichen Seiten – Quadrat

   h) heiß – kalt

2.2 Einfache kategorische Aussage

2.2.1 Struktur einer einfachen kategorischen Aussage

Eine Aussage ist eine Form des Denkens, die eine Relation zwischen Gegenständen und ihren Merkmalen durch Bejahung oder Verneinung repräsentiert. Schon dieser Definition kann man die wesentlichsten Charakteristika einer Aussage entnehmen – ihre Komplexität und Einheitlichkeit einerseits, und die Möglichkeit, eine Aussage und ihr sprachliches Korrelat (Satz) als wahr oder falsch zu bewerten, andererseits. Diese Charakteristika erlauben, die Aussage als Hauptform des logischen Denkens zu betrachten. Sie bestätigen, dass man nicht mittels eines einzelnen Begriffs denken kann. Vielmehr lässt sich der Begriff selbst als ein Gebilde betrachten, das mit Hilfe mehrerer Aussagen konstruiert wird. Sein Inhalt wird im Kontext dieser Aussagen gebildet und vervollständigt. Jede Aussage, in der einem Gegenstand etwas zugesprochen wird, kann man als eine Art Schlusses betrachten, dessen Prämissen das Subjekt der fraglichen Aussage definieren und dem es definierenden Begriff eine Eigenschaft zu- oder absprechen. Nehmen wir die Aussage *Alle Menschen sind sterblich*. Unabhängig davon, wie das Erkennen tatsächlich verläuft, kann man diese Aussage als Schlusssatz ansehen, den man von der Annahme ausgehend konstruiert, dass der Inhalt des Begriffs *Mensch* einen solchen Begriff wie *Lebewesen*, den man bereits mit dem Begriff der Sterblichkeit verbindet, als eins seiner Elemente enthält. Die Kenntnis davon, dass Menschen sterblich sind, setzt in einem solchen Fall das Wissen voraus, dass Menschen Lebewesen sind und dass jedes Lebewesen sterblich ist. Dieses Wissen realisiert sich in der Form von besonderen Aussagen. Nur die Tatsache, dass ein Begriff schon in einigen solchen Aussagen vorkommt, erlaubt uns, ihn als ein selbständiges logisches Objekt zu betrachten, ohne uns explizit auf alle bekannten Aussagen zu beziehen, in denen der Begriff als ihr Subjekt auftritt. Wenn wir Merkmale im Inhalt eines Begriffs aufzählen, oder von seinem Umfang reden, betrachten wir ihn als einen selbständigen Gegenstand, ein einzeln auftretendes und fassbares Objekt. Die immer wieder von den Logikern deklarierte Gleichgültigkeit der logischen Untersuchung bezüglich des Inhalts (von Aussagen) verschleiert manchmal die Besonderheiten der von der Logik studierten Zusammenhänge zwischen Objekten, obwohl gerade diese Zusammenhänge für die Begründung mancher logischen Prinzipien wichtig sind. Als eine solche Besonderheit kann man den Umstand ansehen, dass hinter jedem Begriff eine oder mehrere Aussagen stehen, welche seinen Inhalt definieren und diesen Begriff in eine Relation zu anderen Begriffen bringen. Deswegen führt die Feststellung, dass der Begriff in seinem Inhalt eine Einheit von Merkmalen ist, zu der Idee, dass jeder Begriff einen Zusammenhang von Aussagen darstellt. Als eine „Kurzfassung“ eines solchen Zusammenhangs tritt der Begriff in andere Aussagen ein. Einer der Protagonisten dieser Idee war Cohn ([Cohn08]), der seine Aufgabe in der Entwicklung der Kantischen Idee einer wissenschaftlichen Philosophie sah, die eine allgemeine methodologische Grundlage der Wissenschaft bilden und formulieren sollte. Jede Wissenschaft in ihrem gegenwärtigen Zustand kann man als eine Menge von zusammenhängenden Aussagen betrachten, wobei dieser Zusammenhang einige Begriffe zum Ausgangspunkt hat und in die Formulierung anderer Begriffe münden soll. Diese Idee basiert auf einem bestimmten logischen Konzept. Laut diesem Konzept ist, erstens, die Aussage ein Komplex, der aus Begriffen zusammengesetzt ist, und zweitens, erhält der Begriff, der als Subjekt der Aussage auftritt, in dieser Aussage eine Definition oder eine „Teildefinition“, indem er in eine Relation zu dem entsprechenden Gattungsbegriff oder anderen Begriffen gebracht wird. Seinem Inhalt wird ein neues Merkmal zugefügt, indem dem Begriff eine Eigenschaft zugesprochen wird, die man ihm zuvor vielleicht nicht zusprach. In *Die Grundlagen der Arithmetik* äußerte Frege den Gedanken (der bis heute von seinen Interpreten diskutiert wird), dass die Wörter nur im Satz eine Bedeutung haben ([GLA], 71). In Zusammenhang mit der Auffassung einer Aussage als einer Kombination von Begriffen, die in einer Relation zueinander stehen, könnte eine solche Behauptung bedeuten, dass in der Aussage (wir sprechen jetzt einfachheitshalber über eine bejahende Aussage) der Inhalt des Begriffs (des Subjekts der Aussage) um ein neues Merkmal erweitert wird. Mit Freges These, dass der Begriffsumfang (falls dieser sich mit der Bedeutung des Begriffsworts identifizieren lässt) als ein Zusammenhang der Merkmale des Begriffs aufgefasst werden kann, ließe sich das begründen. Allerdings interessiert sich die Logik weniger für die Funktionen einer Aussage in dem Verfahren der Erweiterung des Inhalts eines Begriffs, sondern mehr für die Beziehungen zwischen Denkformen, bei denen schon ein fester Inhalt vorausgesetzt wird. Die erste Aufgabe überlässt die Logik eher der Erkenntnistheorie.

Die Bestandteile einer kategorischen Aussage sind Subjekt, Prädikat und Relation oder Kopula. Das Subjekt einer Aussage ist ein Begriff, der den Gegenstand des Denkens als solchen identifiziert. Man bezeichnet das Subjekt einer Aussage durch „S“. Das Subjekt einer Aussage ist von dem Gegenstand des Denkens zu unterscheiden. Dieser Unterschied besteht in erster Linie darin, dass der Gegenstand von dem Erkennenden nicht in allen seinen Eigenschaften und Beziehungen (zu anderen Gegenständen) erfasst werden kann, und dass dem Subjekt der Aussage deswegen nicht jede Eigenschaft des Gegenstands zugesprochen werden kann. Wenn man ein Objekt zum Gegenstand des Denkens macht und diesen mit Hilfe eines Begriffs als Subjekt einer Aussage über diesen Gegenstand repräsentiert, kann man nicht alle seine Beziehungen berücksichtigen. Man sondert nur einige seiner Eigenschaften ab, so dass sie ausreichen, dieses Objekt von anderen zu unterscheiden. Ausschöpfend kann eine solche Absonderung kaum sein. Die Existenz des Objekts, das in der Aussage durch das logische Subjekt vertreten wird, hängt ferner nicht von einem einzelnen Vorkommen des Satzes ab, der für die jeweilige Aussage steht, und folglich nicht davon, ob das Objekt jeweils durch das Subjekt repräsentiert und somit begrifflich erfasst wird. Ein und dasselbe Objekt kann außerdem zum Subjekt verschiedener Aussagen werden. Da in jeder Aussage das Subjekt in eine besondere Beziehung zu einem besonderen Prädikat tritt, ist oft das Subjekt einer konkreten Aussage seinem Inhalt nach nicht mit dem Subjekt einer anderen Aussage identisch, selbst wenn die beiden Subjekte dasselbe Objekt repräsentieren und durch dasselbe Begriffswort vertreten werden.

Das zweite logische Element einer kategorischen Aussage ist das Prädikat, das man durch „P“ bezeichnet. Das Prädikat repräsentiert das Wissen von Eigenschaften eines Objekts.

Subjekt und Prädikat einer konkreten Aussage bilden zusammen *Materie einer Aussage*. Die Materie der Aussage bestimmt die Existenz und den Charakter der logischen Beziehungen zwischen den Aussagen.

Das dritte Element der Aussage heißt Kopula. Sie wird durch solche Wörter wie „ist“ oder „ist nicht“ bezeichnet. Manchmal wird die Relation zwischen Subjekt und Prädikat einer Aussage auch durch andere Verben ausgedrückt. Davon abhängig, ob man das Prädikat dem Subjekt zu- oder abspricht, unterscheidet man zwei Formen von Kopula: die behauptende und die verneinende. Diese Form ist entscheidend für die Bestimmung der *Qualität der Aussage*. Die Identifizierung der sprachlichen Form der Kopula mit dem Wort „ist" und die Mehrdeutigkeit dieses Wortes in einem Satzzusammenhang waren Faktoren, die zusammen mit einigen anderen Problemen zum Revidieren der Auffassung der Struktur einer Aussage führten. In *The Principles of Mathematics* (1903) weist Russell darauf hin, dass in solchen Sätzen wie „Sokrates ist sterblich", „Sokrates ist ein Mensch" und „Sokrates ist der Philosoph, der zum Tod durch Gift verurteilt wurde" das „ist" vollkommen verschiedene Relationen zwischen dem Subjekt und dem jeweiligen Prädikat vertritt. Während im ersten Satz einem Gegenstand eine Eigenschaft zugesprochen wird, wird in der zweiten Aussage das Objekt (Sokrates) in eine Relation zu einer Klasse von Menschen gebracht, und in der dritten geht es um Identität zwischen zwei Objekten. Die Notwendigkeit, eine logische Theorie, die dieser Mehrdeutigkeit Rechnung trägt, zu entwickeln, war einer der Gründe dafür, dass die Mittel der traditionellen formalen Logik für unzureichend erklärt wurden.

Die Struktur einer kategorischen Aussage drückt man durch die Formel „$S - P$" aus.

In der formalen Logik stellt man die kategorischen Aussagen den hypothetischen und den disjunktiven gegenüber. Die Struktur einer hypothetischen Aussage wird durch die Formel „Wenn $A - B$, dann $C - D$" und die Struktur einer disjunktiven durch die Formel „$A - B$, oder $-C$, oder $-D$" dargestellt.

2.2.2 Qualität und Quantität einer Aussage. Klassifikation von Aussagen

In Abhängigkeit von dem Charakter der Kopula unterteilt man Aussagen nach ihrer Qualität in bejahende und verneinende. In bejahenden Aussagen (*Alle Menschen sind sterblich*) spricht man dem Subjekt das Prädikat zu. In verneinenden Aussagen (*Manche Vögel können nicht fliegen*) trennt man das Prädikat von dem Subjekt ab.

In Abhängigkeit von dem Umfang, in dem das Subjekt in der Aussage genommen wird, unterteilt man Aussagen nach ihrer *Quantität* – in partikuläre und allgemeine. In partikulären Aussagen bezieht sich der Inhalt des Prädikats auf einen Teil des Umfangs des Subjekts (*Einige Menschen sind Philosophen*). Um eine partikuläre Aussage auszudrücken, benötigt man zusätzliche Sprachelemente, solche Wörter und Phrasen wie „ein", „einige", „ein Teil", „manche". In allgemeinen Aussagen (*Alle Philosophen sind Menschen*) bezieht sich das Prädikat auf alle Gegenstände einer bestimmten Klasse. Das Subjekt wird also in solchen Aussagen in seinem vollen Umfang genommen. Die Sätze, die für allgemeine Aussagen stehen, enthalten besondere zusätzliche Wörter oder Wortgruppen, die auf die *Distribuiertheit* des Subjekts hinweisen. Das sind solche Ausdrücke wie „alle", „jeder", „der". Als einen Spezialfall von allgemeinen Aussagen betrachtet man einzelne Aussagen, in denen der Umfang des Subjekts aus nur einem Gegenstand besteht (*Sokrates ist ein Mensch*). Einzelnen Aussagen wird häufig kein besonderer Platz in der Klassifikation von Aussagen zugewiesen. Sie werden allgemeinen Aussagen zugeordnet, weil in diesen Aussagen das Subjekt stets in seinem vollen Umfang genommen wird. Das Subjekt einer einzelnen Aussage ist immer ein einzelner Begriff, der in seinen Umfangsbeziehungen zu anderen Begriffen nur als Element ihres Umfangs auftritt. Da ein solcher Begriff immer ein Individuum in einer dem Baum des Porphyr entsprechenden Unterordnung der Begriffe ist, kann sein Umfang nicht unterteilt werden und wird damit schon „per Definition" in seinem vollen Umfang genommen.

In der Logik vereinigt man die beiden Kriterien und klassifiziert kategorische Aussagen in vier Arten – allgemein bejahende, allgemein verneinende, partikulär bejahende und partikulär verneinende.

1. Eine *allgemein bejahende* Aussage ist allgemein nach ihrer Quantität und bejahend nach ihrer Qualität. Für die formale Darstellung derartiger Aussagen benutzt man die Formel „alle S sind P". Oft wird eine allgemein bejahende Aussage durch „A" bezeichnet. Diese Bezeichnung gehört zu den mnemotechnischen Ausdrücken, die schon seit Anfang des 13. Jahrhunderts nachweislich gebraucht werden ([Boch70], 32.06, 32.09). Beispiel – *Alle wahren Aussagen sind allgemeingültig.*

2. *Allgemein verneinende* Aussagen sind allgemein nach ihrer Quantität und verneinend nach ihrer Qualität. Die Formel ist „Kein S ist P", die Bezeichnung – „E", das Beispiel – *Keine*

wahre Aussage ist allgemeingültig.

3. *Partikulär bejahende* Aussage ist partikulär nach der Quantität und bejahend nach der Qualität. Die Formel – „Einige S sind P“, die Bezeichnung – „I“, das Beispiel – *Einige wahre Aussagen sind allgemeingültig.*

4. *Partikulär verneinende* Aussagen sind partikulär ihrer Quantität nach, und verneinend nach ihrer Qualität. Die Formel – „Einige S sind nicht P“, die Bezeichnung – „O“, das Beispiel – *Einige wahre Aussagen sind nicht allgemeingültig.*

2.2.3 Distribuiertheit der Termini einer Aussage

Wenn man von der Relation zwischen Subjekt und Prädikat einer Aussage, die man an Hand der gegebenen Klassifikation beschreibt, zur Charakterisierung der Begriffe übergeht, welche die Stelle von Subjekt und Prädikat einnehmen, spricht man von der *Distribuiertheit* der Termini einer Aussage.

Ein Terminus der Aussage heißt *distribuiert*, wenn er in dieser Aussage in seinem vollen Umfang genommen wird, und *nicht distribuiert*, wenn nur ein Teil seines Umfangs betrachtet wird.

1. In einer allgemein bejahenden Aussage ist das Subjekt immer distribuiert. Das Prädikat ist üblicherweise nicht distribuiert, und wird nur in einigen Ausnahmefällen in seinem vollen Umfang genommen. In den meisten Fällen ist das Subjekt einer solchen Aussage dem Prädikat untergeordnet, wie in der Aussage *Alle Philosophen sind Menschen.* In der Aussage *Aristoteles ist der Begründer der Logik* fallen die Umfänge des Subjekts und des Prädikats zusammen, und beide Termini sind distribuiert.

2. In einer allgemein verneinenden Aussage ist sowohl Subjekt als auch Prädikat distribuiert. Der Umfang des Subjekts wird völlig aus dem Umfang des Prädikats ausgeschlossen, und das bestimmt die Distribuiertheit des Prädikats (*Kein Philosoph ist ein Stein*).

3. In einer partikulär bejahenden Aussage ist das Subjekt niemals distribuiert. Das Prädikat kann dagegen sowohl nicht distribuiert (*Einige Logiker sind Engländer*), als auch distribuiert sein (*Einige Europäer sind Engländer*). Im ersten Fall schneiden sich

die Umfänge der Begriffe, im zweiten ist einer der Begriffe dem anderen untergeordnet, und das Subjekt ist der subordinierende Begriff.

4. In einer partikulär verneinenden Aussage ist das Subjekt niemals distribuiert. Das Prädikat ist dagegen immer distribuiert, da der betroffene Teil des Umfangs des Subjekts aus dem Umfang des Prädikats ausgeschlossen wird. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die ein solches Ausschließen erlauben. Die erste Möglichkeit ist, dass der Umfang des Prädikats in dem ganzen Umfang des Subjekts enthalten ist (*Einige Europäer sind nicht Engländer*) und die zweite, dass sich die Umfänge schneiden, wie in der Aussage *Einige Tiere sind nicht Fleischfresser*.

2.2.4 Logische Beziehungen zwischen den Aussagen der gleichen Materie. Logisches Quadrat

Die Aussagen A, E, I, O mit der gleichen Materie treten zueinander paarweise in die Beziehungen, die man in vier Arten unterteilen kann.

1. Eine der besagten Arten von Beziehungen ist die Beziehung der *Subalternation* zwischen den Aussagen A und I, E und O. A und E sind unterordnende und I und O – untergeordnete Aussagen. Die Beziehung der Subalternation lässt sich folgendermaßen charakterisieren. Ist eine allgemeine Aussage (A oder E) wahr, dann ist die partikuläre Aussage derselben Qualität (I oder O) auch wahr. Ist eine partikuläre Aussage falsch, dann ist auch die entsprechende allgemeine Aussage falsch. Aus der Wahrheit einer partikulären Aussage kann man aber die Wahrheit der entsprechenden allgemeinen Aussage nicht folgern. Nehmen wir als Beispiel die Aussage *Einige Menschen sind gelehrte Logiker*. Diese Aussage ist wahr, aber die entsprechende allgemeine - falsch. Auch aus der Falschheit einer allgemeinen Aussage folgt nicht die Falschheit der partikulären.

2. Die zweite Beziehung ist die Beziehung der *Kontradiktion* zwischen einer allgemein bejahenden und einer partikulär verneinenden Aussage (zwischen A und O), und zwischen einer allgemein verneinenden und partikulär bejahenden Aussage (zwischen E und I). Diese Beziehung ist derart, dass die Wahrheit

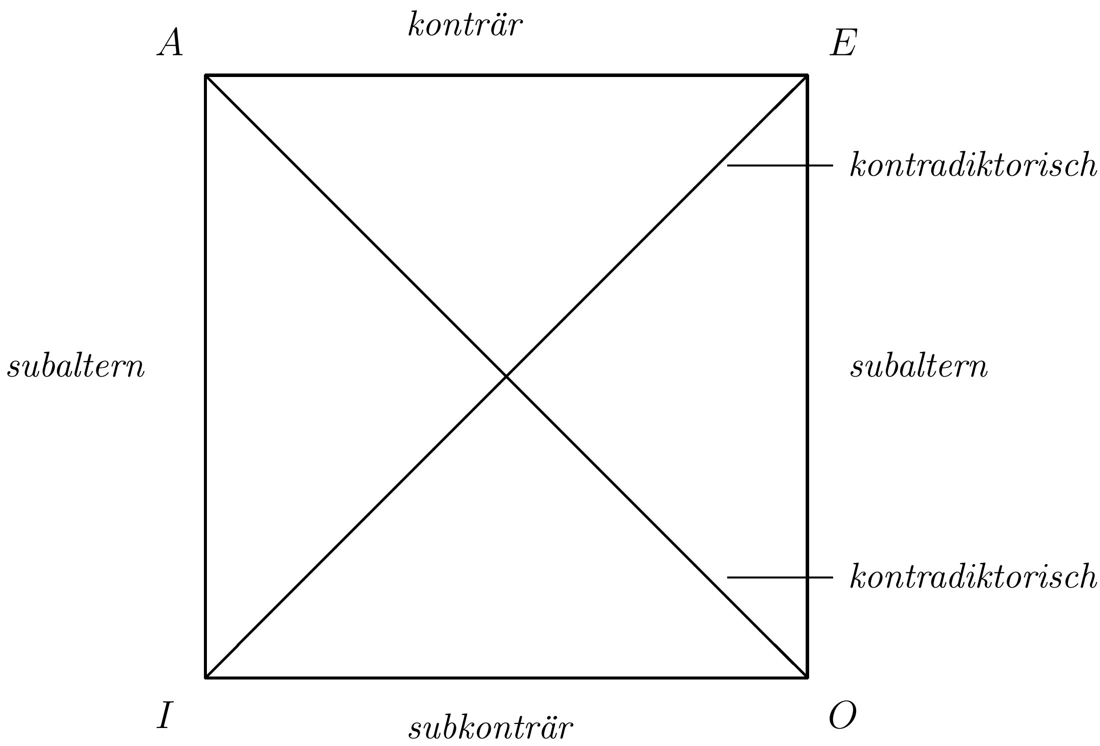
einer der Aussagen die Falschheit der kontradiktorischen impliziert, und umgekehrt. A und O (sowie E und I) stehen zueinander in der Relation einer Behauptung zu einer Verneinung. Wenn es wahr ist, dass I (*Einige Menschen sind Lebewesen*), dann ist es falsch, dass E (*Der Mensch ist nicht ein Lebewesen*). Wenn E (*Kein Philosoph ist ein Stein*) wahr ist, dann ist I (*Einige Philosophen sind Steine*) falsch. Wenn es wahr ist, dass A (*Der Mensch ist ein Lebewesen*), dann ist es falsch, dass O (*Einige Menschen sind nicht Lebewesen*).

3. Die dritte Beziehung ist die Beziehung zwischen allgemeinen Aussagen verschiedener Qualität A und E. Sie charakterisiert diese Aussagen als *konträr*. Konträre Aussagen können beide falsch sein, aber die Wahrheit der einen zieht immer die Falschheit der anderen nach sich. Dass beide zugleich falsch sein können, sieht man schon an dem einfachen Beispiel: *Alle Katzen sind weiß* und *Keine Katze ist weiß*. Beide Aussagen sind falsch, wahr ist, dass einige Katzen weiß sind.

4. Die vierte Beziehung – zwischen partikulären Aussagen unterschiedlicher Qualität I und O – charakterisiert diese Aussagen als *subkonträr*. Diese Aussagen können beide zugleich wahr sein, aber die Falschheit der einen impliziert die Wahrheit der anderen. Es ist falsch, dass einige Menschen keine Lebewesen sind, deswegen ist es wahr, dass einige Menschen Lebewesen sind. Weil es einen Teil des Umfangs des Begriffs *Mensch* nicht gibt, der aus der Menge aller Lebewesen ausgeschlossen ist, muss die Menge aller Menschen unter den Begriff *Lebewesen* fallen, und somit auch jede Teilmenge dieser Menge. Dass die subkonträren Aussagen zugleich wahr sein können, kann man auch durch Hinzunehmen anderer logischer Beziehungen zwischen Aussagen erklären. Nehmen wir an, dass eine partikulär bejahende Aussage wahr ist. Dann ist die kontradiktorische allgemein verneinende falsch, aber aus der Falschheit einer allgemein verneinenden Aussage folgt nicht die Falschheit einer partikulär verneinenden. Also kann man nicht aus der Wahrheit einer partikulär bejahenden Aussage auf die Falschheit der entsprechenden partikulär verneinenden schließen. Ist aber die partikulär bejahende Aussage falsch, dann ist die allgemein bejahende auch falsch, da sie die Aussage ist, die zu der gegebenen partikulär bejahenden

in der Beziehung der Subalternation steht. Aus der Falschheit der allgemein bejahenden Aussage folgt aber die Wahrheit der kontradiktorischen partikulär verneinenden Aussage.

Alle diesen Beziehungen stellt man mittels des so genannten logischen Quadrats dar (*Schema 5*).



Schema 5

Die eben beschriebenen logischen Beziehungen kann man auch als die Beziehungen zwischen Wahrheitswerten von Aussagen darstellen. Betrachten wir Subalternation, Kontradiktion, konträre und subkonträre Beziehungen als Funktionen, dann können wir sagen, dass sie dem jeweiligen Wahrheitswert der Aussage (A, E, I oder O) einen Wahrheitswert einer anderen Aussage aus dieser Liste zuordnen. Aber durch die Wahrheitswerte der Argumente einer dieser Funktionen wird nicht immer ein Wahrheitswert für jede der vier Arten von Aussagen definiert (*Tabelle 1*). Wenn wir z. B. die subalterne Beziehung zwischen I und A nehmen, und dem Argument

I den Wahrheitswert *wahr* zuordnen, hat diese Funktion keinen bestimmten Wert für die allgemein bejahende Aussage derselben Materie, der von dem Inhalt der Aussage unabhängig bleibt.

	A		*E*		*I*		*O*	
	w	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**
A	**w**	**f**	*f*	–	–	*f*	*f*	*w*
E	*f*	–	**w**	**f**	*f*	*w*	–	*f*
I	*w*	–	*f*	*w*	**w**	**f**	–	*w*
O	*f*	*w*	*w*	–	–	*w*	**w**	**f**

Durch die fett gesetzten „**w**" und „**f**" sind in der Tabelle die Werte der Argumente der besagten Funktionen bezeichnet.

Die kursiv gesetzten „*w*" und „*f*" stehen hier für die Werte der von dem jeweiligen Argument verschiedenen Aussagen. Diese Werte sind durch die fraglichen Funktionen bestimmt.

Übungsaufgaben

9. Betrachten Sie folgende Sätze.

   a) Sokrates ist ein Mensch.

   b) Nicht alle Vögel können fliegen.

   c) Einige Menschen sind Griechen.

   d) Ein Schluss ist dann richtig, wenn er nach logischen Regeln aus wahren Prämissen folgt.

   e) Das Gesetz des Widerspruchs gilt nicht für zwei beliebige Aussagen.

   f) Diese Zahl ist größer als jene.

   g) Der Mensch ist vernünftig.

   h) Aristoteles ist der Schüler von Platon.

   i) Wittgenstein brachte seinen Schülern Orangen.

   j) Russell behauptet, dass Wittgenstein in der Vernachlässigung seiner Berufung von seinem Stolz getrieben wurde.

   k) Wenn jemand ein Athener ist, dann ist dieser jemand ein Grieche.

   Welche dieser Sätze präsentieren kategorische, hypothetische oder Relationsaussagen?

   Versuchen Sie, jede kategorische Aussage als eine Relationsaussage zu formulieren.

   Versuchen Sie, jede kategorische Aussage als eine quantifizierte Aussage zu formulieren (als Aussage, die mit „Es gibt ..., so dass ...“ oder „Für alle (jeden) ... gilt, dass ...“ beginnt). Benutzen Sie für solche Umformulierungen auch Variablen.

10. Geben Sie ein Beispiel einer Aussage folgender Art an:

    a) eine allgemein bejahende Aussage, in der das Prädikat distribuiert ist

    b) eine partikulär bejahende Aussage, in der das Prädikat distribuiert ist

    c) eine partikulär verneinende Aussage

11. Warum können die Aussagen E und A zugleich falsch sein? Begründen Sie Ihre Antwort:

    a) durch ein Beispiel

    b) durch Analyse der logischen Beziehungen zwischen den Aussagen A und O, E und O einerseits und E und I, A und I andererseits.

12. Warum impliziert die Wahrheit einer partikulär bejahenden Aussage nicht die Wahrheit der allgemein bejahenden? Begründen Sie Ihre Antwort durch die Analyse der logischen Beziehungen zwischen kontradiktorischen und konträren Aussagen.

2.3 Ein einfacher kategorischer Syllogismus

2.3.1 Was ist ein Schluss?

Unter einem Schluss versteht man das Ableiten einer neuen Aussage aus einer oder mehreren gegebenen Aussagen. Aussagen, aus denen man ableitet, heißen Prämissen, die abgeleitete Aussage nennt man Schluss oder Schlusssatz. Wir interessieren uns hier für Schlüsse, deren Prämissen und Schlusssätze einfache kategorische Aussagen sind.

An einen logischen Schluss werden bestimmte Forderungen gestellt. Die erste Forderung ist, dass der Schlusssatz einen neuen Gedanken ausdrücken muss (im Vergleich zu den Prämissen). Ein logischer Schluss soll die notwendige Beziehung zwischen den Prämissen und dem Schlusssatz aufdecken und zustande bringen. Diese Notwendigkeit ist kein Charakteristikum der Modalität der Aussagen, welche die Komponenten des jeweiligen Schlusses ausmachen, sondern charakterisiert die Beziehung zwischen den Prämissen und dem Schluss. Man kann vom logischen Schließen sprechen, wenn diese Beziehung der Folgerung für wahre Prämissen beliebigen Inhalts sowie für die ihnen entsprechenden Schlüsse gilt. Die Notwendigkeit der Beziehung der Folgerung garantiert, dass sich aus wahren Prämissen der gleichen Form (in unserem Fall – aus den Aussagen der gleichen Qualität und Quantität mit einer bestimmten Position eines der Termini der Aussage) gleichförmige Schlüsse ziehen lassen. Durch Heranziehen des Gesetzes des Widerspruchs lässt sich diese Notwendigkeit auch definieren. Man kann behaupten, dass die Prämissen des Schlusses in einer notwendigen Beziehung zu seinem Schlusssatz stehen, wenn die Annahme, dass der Schlusssatz falsch ist, zu einem Widerspruch zu einer der Prämissen führt. Ein Beispiel dafür ist der folgende Schluss: *Alle Philosophen sind Menschen – Alle Menschen sind sterblich – Alle Philosophen sind sterblich*. Macht man die Annahme, die dem Schluss widerspricht (*Einige Philosophen sind nicht sterblich*), und betrachtet man die Annahme als Prämisse eines neuen Schlusses, ergibt diese Prämisse zusammen mit der Prämisse des gegebenen Schlusses *Alle Philosophen sind Menschen* den Schluss *Einige Menschen sind nicht sterblich*, der der Prämisse *Alle Menschen sind sterblich* widerspricht. Interessant bei dieser die Notwendigkeit des Schlusses betreffenden Argumentation ist, dass man die Beziehungen zwischen den Komponenten des Schlusses und seine logischen Charakteristika durch die formal-logischen Gesetze begründet ([As47], 150–154, [ForLo], 87–88). Eine derartige Begründung ist einer der typischen Züge der formalen Logik, welche die formal-logischen Gesetze somit zu einem Bestandteil des meta-logischen Instrumentariums macht. Bocheński ist der Meinung, dass Aristoteles für die Begründung seiner Syllogistik oft aussagenlogische Prinzipien benutzt, ohne sie explizit als Gegenstand seiner Untersuchung zu betrachten ([Boch70], 88–89). Der metalogische Gebrauch von formal-logischen Gesetzen, die als Sätze moderner aussagenlogischer Theorien auftreten, weist Parallelen zu dieser historischen Tatsache auf, und bestätigt die Einheitlichkeit und Kontinuität der logischen Theorie.

Nach der Anzahl der Begriffe in Prämissen unterteilt man Schlüsse in unmittelbare und mittelbare.

2.3.2 Unmittelbare Schlüsse

Unmittelbare Schlüsse sind diejenigen, bei denen man aus einer gegebenen Beziehung zwischen zwei Begriffen auf eine andere Beziehung zwischen diesen Begriffen (oder einem dieser Begriffe und dem zu dem anderen kontradiktorischen Begriff) schließt. Unmittelbare Schlüsse basieren auf logischen Beziehungen zwischen Aussagen der gleichen Materie oder auf logischen Beziehungen zwischen Begriffen in einer Aussage, die durch die Distribuiertheit der Begriffe bedingt sind.

Eine Art von unmittelbaren Schlüssen bilden die Schlüsse von der Wahrheit oder Falschheit einer Aussage der Form A, E, I, O auf die Wahrheit oder Falschheit der entsprechenden kontradiktorisch, konträr oder subkonträr entgegengesetzten, subordinierenden oder subalternen Aussagen. Diese Schlüsse werden in mehrere Gruppen unterteilt. Aus der Wahrheit (Falschheit) einer allgemein bejahenden (bzw. allgemein verneinenden) Aussage kann man auf die Falschheit (Wahrheit) einer partikulär verneinenden (bzw. partikulär bejahenden) Aussage schließen. Umgekehrt, von der Wahrheit (Falschheit) einer partikulär bejahenden (partikulär verneinenden) Aussage ausgehend, kann man auf die Falschheit (Wahrheit) einer allgemein verneinenden (allgemein bejahenden) Aussage schließen. Aus der Wahrheit einer subordinierenden Aussage kann man die Wahrheit einer subalternen Aussage folgern. Aus der Falschheit einer subalternen schließt man auf die Falschheit der subordinierenden. Aus der Wahrheit einer allgemeinen Aussage kann man auf die Falschheit der konträren, und aus der Falschheit einer partikulären Aussage auf die Wahrheit der subkonträren schließen. Solche Schlüsse haben eine kompliziertere Formulierungsform, als man bei unmittelbaren Schlüssen vermuten würde. Das zeigt folgendes Beispiel. Einen Schluss von der Falschheit einer allgemein bejahenden Aussage auf die Wahrheit der entsprechenden partikulär verneinenden kann man als Zusammenhang folgender Aussagen repräsentieren: wenn A falsch ist, dann ist O wahr – A ist falsch – also ist O wahr. Wenn man beachtet, dass aus der Wahrheit oder Falschheit einer Aussage nicht immer auf die Wahrheit oder Falschheit einer anderen Aussage geschlossen werden kann (*Tabelle 1*), ergeben sich folgende Schlüsse:

von der Wahrheit von A auf	die Falschheit von O
	die Falschheit von E
	die Wahrheit von I
von der Falschheit von A auf	die Wahrheit von O
von der Wahrheit von E auf	die Falschheit von I
	die Falschheit von A
	die Wahrheit von O
von der Falschheit von E auf	die Wahrheit von I
von der Wahrheit von I auf	die Falschheit von E
von der Falschheit von I auf	die Wahrheit von E
	die Wahrheit von O
	die Falschheit von A
von der Wahrheit von O auf	die Falschheit von A
von der Falschheit von O auf	die Wahrheit von A
	die Wahrheit von I
	die Falschheit von E

Andere Arten von unmittelbaren Schlüssen lassen sich auch als Operationen auf Aussagen charakterisieren, durch deren Anwendung man aus einer gegebenen wahren Aussage eine andere wahre Aussage gewinnt, die sich von der ursprünglichen durch die Lage des Subjekts und Prädikats, oder durch Qualität, oder durch diese beiden Charakteristika unterscheidet. Während die oben beschriebenen unmittelbaren Schlüsse direkt auf den Beziehungen des logischen Quadrats basieren, können die logischen Operationen auf Aussagen durch die Gesetzmäßigkeiten der Distribuiertheit der Termini von Aussagen charakterisiert werden. Diese Operationen sind folgende.

Obversion (*Umwandlung*) ist eine logische Operation auf Aussagen, bei der sich die Qualität der Aussage ändert, aber die Lage des Subjekts und der Wahrheitswert der Aussage bleiben gleich. Die Veränderung der Qualität der Aussage wird dabei dadurch realisiert, dass das Subjekt der Aussage, die als Prämisse eines solchen Schlusses dient, in eine Beziehung zu dem Begriff gebracht wird, der kontradiktorisch zu dem Prädikat der Aussage ist. Schema der Schlüsse, die man durch Obversion bekommt:

aus A:	*bekommt man E:*
Alle S sind P	Kein S ist nicht-P
aus E:	*bekommt man A:*
Kein S ist P	Alle S sind nicht-P
aus I:	*bekommt man O:*
Einige S sind P	Einige S sind nicht nicht-P
aus O:	*bekommt man I:*
Einige S sind nicht P	Einige S sind nicht-P.

Konversion (*Umkehrung*) ist eine logische Operation auf Aussagen, bei der das Subjekt der gegebenen Aussage zu dem Prädikat, und das Prädikat zum Subjekt der neuen Aussage gemacht wird, wobei sich die Qualität der gegebenen Aussage nicht ändert. Man unterscheidet einfache oder reine Umkehrung, welche die Quantität der Aussage erhält, und die Umkehrung mit Einschränkung. Einer einfachen Umkehrung unterliegen einerseits partikulär bejahende und andererseits allgemein verneinende Aussagen. Schema der Umkehrung:

aus I:	*bekommt man I:*
Einige S sind P	Einige P sind S
aus E:	*bekommt man E:*
Kein S ist P	Kein P ist S.

Umkehrung mit Einschränkung bedeutet, dass sich die Quantität der Aussage verändert.

aus A:	*bekommt man I:*
Alle S sind P	Einige P sind S.

Die Notwendigkeit der Einschränkung des Subjekts der gewonnenen Aussage hat in diesem Fall den Grund, dass das Prädikat einer allgemein bejahenden Aussage in der Regel nicht distribuiert ist. Würde man eine allgemein bejahende Aussage ohne Einschränkung umkehren, kann dabei das Gesetz der reziproken Beziehung zwischen dem Inhalt und dem Umfang eines Begriffs verletzt werden. Ist die allgemein bejahende Aussage, auf die man die Operation der Umkehrung anwendet, wahr, dann ist der Umfang des Subjekts der Aussage in dem Umfang ihres Prädikats enthalten, und der Inhalt des Prädikats ist ein Teil des Inhalts des Subjekts. Wird nun behauptet, dass der Umfang des Prädikats ein Teil des Umfangs des Subjekts ist, und wird weiter angenommen, dass diese Behauptung wahr sei, dann müsste der Inhalt des Subjekts der ursprünglichen Aussage ein Teil des Inhalts ihres Prädikats sein, der seinerseits schon ein Teil des Inhalts des Subjekts ist. Wenn die Umfänge des Subjekts und Prädikats dabei nicht zusammenfallen, könnte das implizieren, dass die Relation zwischen einem Ganzen und seinem Teil eine symmetrische Relation wäre. Die Umkehrung ohne Einschränkung ist für eine allgemein bejahende Aussage nur dann möglich, wenn das Subjekt und Prädikat der Aussage äquipollent sind (dann also, wenn das Prädikat der Aussage auch distribuiert ist). Eine partikulär verneinende Aussage unterliegt nicht der Umkehrung. Betrachten wir als Beispiel einer partikulär verneinenden Aussage *Einige Vögel können nicht fliegen.* Nehmen wir an, dass die

Umkehrung dieser Aussage möglich ist. Bei der Umkehrung ändert sich die Qualität der Aussage nicht, also muss die neue Aussage verneinend und ihr Prädikat (früheres Subjekt) distribuiert sein. Das Prädikat der gegebenen Aussage ist von vornherein als Prädikat einer verneinenden Aussage distribuiert. Also ist die Aussage, die wir durch Umkehrung bekommen, eine allgemein verneinende Aussage *Kein Wesen, das fliegen kann, ist ein Vogel.* Diese Aussage kann man nun einer einfachen Umkehrung unterwerfen, wodurch man die Aussage *Kein Vogel kann fliegen* gewinnt. Die Aussage, die wir der ersten Umkehrung unterwarfen, ist aber wahr. Also schlossen wir letztendlich von der Wahrheit einer partikulär verneinenden Aussage auf die Wahrheit der allgemein verneinenden Aussage derselben Materie, was gegen die Beziehungen des logischen Quadrats verstößt.

Unter einer *Kontraposition* (*des Prädikats*) versteht man eine Operation auf Aussagen, bei der eine Aussage zunächst der Obversion und dann der Konversion unterworfen wird. Durch die Kontraposition gewinnt man aus der Aussage A (Alle S sind P) eine allgemein verneinende Aussage E (Kein nicht-P ist S). Aus E (Kein S ist P) bekommt man I (Einige nicht-P sind S). Aus der partikulär verneinenden Aussage O (Einige S sind nicht P) gewinnt man die partikulär bejahende Aussage I (Einige nicht-P sind S). Eine partikulär bejahende Aussage I unterliegt nicht der Kontraposition, denn durch die Obversion aus I bekommt man eine partikulär verneinende Aussage, und diese unterliegt nicht der Umkehrung.

2.3.3 Mittelbare Schlüsse. Definitionen

Mittelbare Schlüsse sind Schlüsse, die man aus Aussagen mit teilweise übereinstimmender Materie zieht. Ein einfacher kategorischer Syllogismus ist eine Form deduktiver mittelbarer Schlüsse. Mit Hilfe solcher Schlüsse werden Relationen zwischen zwei Begriffen auf Grund ihrer Relation zu einem dritten Begriff festgestellt. Die Theorie des einfachen kategorischen Syllogismus ist ein wesentlicher Bestandteil der Syllogistik (der Lehre vom Schluss), die von Aristoteles entwickelt wurde.

Ein *einfacher kategorischer Syllogismus* ist ein Schluss, bei dem man auf die Beziehung zwischen zwei Termini, ausgehend von ihren Beziehungen zu einem dritten Terminus, schließt.

Ein Syllogismus enthält drei einfache kategorische Aussagen – zwei Prämissen und einen Schlusssatz (Schluss).

Der Terminus, welcher das Prädikat des Schlusssatzes ist (sowie der ihm gleichförmige in einer der Prämissen), heißt *größerer Terminus*. Die Prämisse, die den größeren Terminus enthält, heißt dementsprechend die *größere Prämisse*. Der Terminus, der das Subjekt des Schlusssatzes ist, und der ihm gleichförmige in einer anderen Prämisse heißt *kleinerer Terminus*, und die Prämisse, die ihn enthält, *kleinere Prämisse*. Der kleinere und der größere Terminus werden beide als *äußere* Termini bezeichnet. Der Terminus, der nur in Prämissen und nicht im Schlusssatz vorkommt, heißt *mittlerer Terminus*. Den größeren Terminus bezeichnet man durch „P“, den kleineren – durch „S“ und den mittleren – durch „M“.

Es gilt nicht immer, dass aus zwei wahren Prämissen ein Schluss folgt. Nehmen wir die Aussagen *Einige Blumen sind Fleischfresser* und *Alle Rosen sind Blumen* als Prämissen eines Schlusses, lässt sich kein Schlusssatz aus ihnen ableiten. Eine der Methoden, nach der man alle gültigen Schlüsse, welche die Form eines einfachen kategorischen Syllogismus haben (es gibt 24 solcher Schlussformen, die durch eine bestimmte Position des mittleren Terminus in Prämissen, sowie durch eine bestimmte Qualität und Quantität der Prämissen gekennzeichnet sind, und die *Modi* des Syllogismus heißen), gewinnen kann, besteht in der Analyse möglicher Beziehungen der Umfänge der Termini der größeren Prämisse und darauf folgender Analyse möglicher Beziehungen zwischen den Termini der kleineren Prämisse, die für einen Schluss notwendig sind, und den Ausschluss derjenigen Relationen, die keinen eindeutigen Schluss zulassen.

Als Beispiel eines solchen Verfahrens nehmen wir eine allgemein bejahende Aussage der Gestalt MaP (das klein geschriebene „a“ repräsentiert hier die Qualität und Quantität der Aussage, und man liest diese Zeichenfolge als „alle M sind P“) als größere Prämisse. Hat dann die kleinere Prämisse die Form SaM (alle S sind M), können wir auf die Aussage der Gestalt SaP (alle S sind P) schließen. Da der Umfang des Begriffs M in dem Umfang des Begriffs P, und der Umfang des Begriffs S in dem Umfang von M enthalten sind, muss der Umfang des Begriffs S ein Teil des Umfangs des Begriffs P ausmachen (*Schema 6*). Unter der Voraussetzung, dass SiM (einige S sind M), ziehen wir den Schluss der Form SiP. Gilt, dass alle M S sind (MaS) oder dass einige M S sind (MiS), dann ist der Schluss auch SiP (einige S sind P). Haben wir dagegen als kleinere Prämisse eine verneinende Aussage der Gestalt SeM, SoM, MeS oder MoS, können wir keinen Schluss aus den gegebenen Prämissen ziehen. Wenn z. B. kein S M ist, kann S ein zu M koordinierter Begriff sein, und somit eine Art von P; oder ein Begriff, der mit M unvereinbar ist, aber sich mit P schneidet; oder aber ein Begriff, der auch mit P unvereinbar ist (*Schema 6*).

Man unterteilt, je nachdem welche Stelle der mittlere Terminus in den Prämissen einnimmt, alle Modi des Syllogismus in vier Figuren.

1. Figur	2. Figur	3. Figur	4. Figur
$M - P$	$P - M$	$M - P$	$P - M$
$S - M$	$S - M$	$M - S$	$M - S$
$S - P$	$S - P$	$S - P$	$S - P$

2.3.4 Allgemeine Charakteristika der Figuren des Syllogismus

Erste Figur. Ein Beispiel eines Modus dieser Figur ist der Modus *Barbara*: *Jeder Mensch ist ein Lebewesen – Jeder Grieche ist ein Mensch – Jeder Grieche ist ein Lebewesen.* Die Besonderheiten dieser Figur sind folgende:

– Die größere Prämisse ist immer eine allgemeine Aussage.

– Die kleinere Prämisse ist immer eine bejahende Aussage.

– Das ist die einzige Figur, bei der man als Schluss jede der vier Arten der Aussagen A, E, I und O gewinnen kann.

– Das ist die einzige Figur, in der eine allgemein bejahende Aussage als Schluss auftritt. Aus diesem Grund hält Aristoteles diese Figur für die beste Figur des Syllogismus und betrachtet sie als Vorschrift, nach der eine Beweisführung in der Wissenschaft erfolgen kann.

– Die erste Figur verwendet man, um die Frage nach der Unterordnung zwischen Begriffen zu beantworten. Der Schluss nach der ersten Figur besteht in dem Fortschreiten von der Behauptung über eine Gruppe von Gegenständen zu der Behauptung über einzelne Gegenstände der Gruppe. Was allen Gegenständen einer Art zukommt, kommt auch jedem dieser Gegenstände zu, und was bei allen Gegenständen einer Klasse negiert wird, wird auch bei jedem dieser Gegenstände negiert. Diese Erkenntnis (auch „Axiom des Syllogismus“ oder „dictum de omni et de nullo“ genannt) bildet den Grund für Schlüsse nach dieser Figur.

Zweite Figur. Ein Beispiel ist der Modus *Baroco*: *Jeder Athener ist ein Grieche – Ein Logiker ist nicht Grieche – Ein Logiker ist nicht Athener*. Die Besonderheiten sind folgende.

– Die größere Prämisse ist immer eine allgemeine Aussage.
– Eine der Prämissen ist verneinend.
– Der Schlusssatz ist auch verneinend.
– Die Figur verwendet man, um falsche Subsumtionen zu widerlegen.
– In der zweiten Figur basiert der Schluss auf der Gegenüberstellung der Prädikate, die man auch als Definitionen der Subjekte betrachten kann. Durch eine solche Gegenüberstellung kommt man zum Schluss, dass, wenn Definitionen eines Objekts einander widersprechen, auch die Gegenstände dieser Definitionen nicht identisch sein können. Durch Feststellung der Unvereinbarkeit der Prädikate kommt man zu der Behauptung, dass das Subjekt eines der Prädikate nicht (oder nicht immer) das Subjekt des anderen sein kann.

Dritte Figur. Ein Beispiel des Schlusses nach dieser Figur ist der Modus *Bocardo*: *Ein Athener ist nicht Logiker – Jeder Athener ist Grieche – Ein Grieche ist nicht Logiker*. Die Besonderheiten dieser Figur:

– Die kleinere Prämisse ist immer eine bejahende Aussage.
– Der Schlusssatz ist immer eine partikuläre Aussage.
– Die Schlüsse nach der dritten Figur sind im Zusammenhang mit dem Erkennen des Partikulären wichtig. Im Unterschied zu den Schlüssen nach der zweiten Figur werden in diesen Schlüssen Subjekte miteinander verglichen. Im Unterschied zu den Schlüs-

sen nach der ersten Figur wird hier nicht das Prädikat einer Klasse auf Elemente dieser Klasse übertragen. Es wird behauptet, dass eins der Prädikate ein mögliches Charakteristikum der Klasse ist, die durch das andere Prädikat definiert wird, da dieses Charakteristikum auf einen Teil der Klasse zutrifft. Dass der Schluss partikulär ist, zeigt, dass die Möglichkeit, das Prädikat dieser Klasse zuzusprechen, auf einen weiter nicht definierten Teil der Klasse beschränkt ist.

– Die Bedeutung dieser Figur besteht in der Möglichkeit, den Schlusssatz, den man beim Schließen gewinnt, für die Widerlegung einer allgemeinen Aussage durch einen Ausnahmefall zu verwenden. Erhält man als Schluss eine wahre partikuläre Aussage, kann man daraus die Falschheit der allgemeinen Aussage derselben Materie folgern.

Vierte Figur. Einer der Modi dieser Figur ist *Dimaris*: *Einige Logiker sind Engländer – Alle Engländer sind Europäer – Einige Europäer sind Logiker*. Die Entdeckung dieser Figur als einer besonderen Figur des Syllogismus wurde vermeintlich, wie Bocheński zeigt ([Boch70], 24.30–24.34) Galen zugeschrieben. Ihre Regeln und Modi wurden ausführlich im 13. Jahrhundert vom Albalag formuliert ([Boch70], 32.25–32.32). Die Besonderheiten dieser Figur sind folgende.

– Wenn die größere Prämisse eine bejahende Aussage ist, dann ist die kleinere Prämisse allgemein.

– Wenn eine der Prämissen verneinend ist, dann ist die größere Prämisse allgemein.

2.3.5 Allgemeine Regeln des Syllogismus

Diese Regeln gelten für alle Figuren des Syllogismus. Ein Verstoß gegen eine dieser Regeln macht den Schluss fehlerhaft. Sie bilden einen Bestandteil eines metalogischen Systems, das durch die Beschreibung von Syllogismen schon bei Aristoteles zustande kommt ([Boch70], 92). Verschiedene Autoren geben eine unterschiedliche Anzahl dieser Regeln an. Wir gehen von 10 allgemeinen Regeln des Syllogismus aus.

Die ersten zwei Regeln betreffen die Anzahl der Termini und der Aussagen in einem Syllogismus.

1. *Der Syllogismus enthält genau drei Termini – nicht mehr und nicht weniger.*

Hat ein Syllogismus weniger als drei Termini, ist das erstens ein Verstoß gegen die Definition des mittelbaren Schlusses. Sollte ein solcher Schluss drei Aussagen enthalten, könnte das auch einen Verstoß gegen die Forderung implizieren, dass der Schlusssatz eine neue Aussage im Vergleich zu den Prämissen sein muss. Wenn ein Syllogismus mehr als drei Termini enthält, dann ist entweder überhaupt kein Schluss möglich (wenn das Subjekt und das Prädikat des Schlusses in den Prämissen in eine Beziehung zu verschiedenen Termini gebracht werden), oder es wurden einige Prämissen ausgelassen, und was als einfacher Syllogismus erscheint, ist ein verkürzter *Polysyllogismus*. Ein Beispiel eines solchen: *Alle Menschen sind sterblich – Alle Athener sind Griechen – Alle Athener sind sterblich.* Ausgelassen ist hier die Prämisse *Alle Griechen sind Menschen* und der Schluss aus dieser und der ersten Prämisse *Alle Griechen sind sterblich*, der als größere Prämisse für den gegebenen Schluss dient.

2. *Der Syllogismus enthält genau drei Aussagen.*

Diese Regel folgt aus der Definition des Syllogismus und aus der ersten Regel. Da ein Syllogismus genau drei Termini enthält, von denen in jeder Prämisse und im Schluss zwei verschiedene vorkommen, würde eine kleinere Anzahl von Aussagen bedeuten, dass entweder eine Prämisse oder der Schluss fehlt. Eine größere Anzahl von Aussagen könnte bedeuten (wenn man den trivialen Fall des mehrmaligen Vorkommens einer Prämisse und den schon besprochenen Fall eines verkürzten Polysyllogismus ausschließt), dass im Syllogismus Aussagen mit derselben Materie aber verschiedener Qualität, Quantität oder Reihenfolge der Termini vorkommen, was implizieren könnte, dass der eindeutige Schluss nicht möglich ist.

Zwei weitere Regeln betreffen die Distribuiertheit der Termini in Prämissen und im Schlusssatz des Syllogismus. Ein Syllogismus muss ein gültiger Schluss für alle Aussagen sein, die seine Prämissen und Schlusssatz bilden können. Deswegen betrachtet man das Prädikat einer allgemein bejahenden und einer partikulär bejahenden Aussage in der Theorie eines einfachen kategorischen Syllogismus als nicht distribuiert.

3. *Der mittlere Terminus muss zumindest in einer der Prämissen distribuiert sein.*

Die Beziehung zwischen dem Subjekt des Schlusses und seinem Prädikat wird in dem Syllogismus auf Grund der Beziehungen des Subjekts und des Prädikats zu dem mittleren Terminus festgestellt. Nehmen wir an, dass dieser in beiden Prämissen nicht distribuiert ist. Dann ist die Beziehung der äußeren Termini nur zu einem Teil des Umfangs vom mittleren Terminus bekannt (definiert). Da in diesem Fall die Situation möglich ist, dass S und P Relationen zu verschiedenen sich nicht schneidenden Teilen des Umfangs von M haben, kann man nicht auf ihre Beziehung zueinander mit Sicherheit schließen.

4. *Wenn der größere oder der kleinere Terminus in den Prämissen nicht distribuiert ist, kann er auch im Schluss nicht distribuiert sein.*

Wenn ein äußerer Terminus in der entsprechenden Prämisse nicht distribuiert ist, bedeutet das, dass die Beziehung nur eines Teils seines Umfangs zu dem mittleren Terminus bekannt ist. Da in dem Syllogismus die Beziehung zwischen den äußeren Termini ausschließlich durch deren Beziehungen zu dem mittleren Terminus festgestellt wird, kann im Schluss der andere äußere Terminus nur in eine Beziehung zu dem besagten Teil des Umfangs des nicht-distribuierten Terminus gebracht werden. Die Gültigkeit dieser Regel soll uns folgendes Beispiel verdeutlichen. Nehmen wir den gegen diese Regel verstoßenden Syllogismus: *Alle Logiker untersuchen die Gesetze des logischen Schließens – Alle Logiker sind Menschen – Jeder Mensch untersucht die Gesetze des logischen Schließens.* Der gegebene Schluss ist nicht begründet, weil der Terminus *Menschen* in der kleineren Prämisse als Prädikat einer bejahenden Aussage nicht distribuiert ist. Der Umfang des Terminus *Logiker* schöpft den Umfang des Terminus *Menschen* nicht aus. Im Schluss bringen wir aber den ganzen Umfang des Terminus *Menschen*, von dem uns als Ganzem nichts bekannt ist, in eine Beziehung zu dem größeren Terminus.

Die anderen Regeln bestimmen die Verbindung zwischen Qualität und Quantität der Prämissen und des Schlusssatzes.

5. *Wenn beide Prämissen verneinend sind, kann man aus ihnen keinen Schluss ziehen.*

Sind beide Prämissen verneinend, dann werden der Umfang des Subjekts des Schlusses und des mittleren Terminus, sowie des Prädikats und des mittleren Terminus (oder Teile ihrer Umfänge) auseinander gebracht. In diesem Fall ist kein eindeutiger Schluss möglich, da sich S und P schneiden, ausschließen oder sogar subordinieren können.

6. *Wenn ein Schluss aus den Prämissen möglich ist, und eine Prämisse verneinend ist, dann ist der Schlusssatz auch verneinend.*

Ist eine Prämisse verneinend, dann ist der Umfang des äußeren Terminus, mit dem er in der Prämisse und im Schluss (*Regel 4*) vorkommt, aus dem Umfang des mittleren Terminus (oder seinem Teil) ausgeschlossen. Selbst dann, wenn der mittlere Terminus in der verneinenden Prämisse nicht distribuiert ist, lässt sich keine Behauptung über die Beziehung zwischen dem fraglichen äußeren Terminus und dem restlichen Umfang des mittleren Terminus aufstellen. Der Grund dafür liegt in den logischen Beziehungen zwischen Aussagen der gleichen Materie und der Annahme, dass die Prämissen eines Syllogismus wahre Aussagen sind. Von der Wahrheit einer partikulär verneinenden Aussage können wir weder auf die Wahrheit der allgemein verneinenden noch auf die Wahrheit der partikulär bejahenden Aussage schließen. Wenn aber ein Schluss möglich ist, ist die andere Prämisse des Syllogismus bejahend (*Regel 5*). Unabhängig davon, ob diese Prämisse allgemein oder partikulär ist, schneiden sich die Umfänge des mittleren Terminus und des in der bejahenden Prämisse vorkommenden äußeren Terminus. Ist nun der mittlere Terminus in der verneinenden oder in beiden Prämissen distribuiert, muss man gerade den Teil des Umfangs des in der bejahenden Prämisse vorkommenden äußeren Terminus, der mit dem Umfang des mittleren Terminus zusammenfällt, aus dem Umfang des anderen äußeren Terminus ausschließen. Ist der mittlere Terminus in der bejahenden Prämisse distribuiert und in der verneinenden nicht distribuiert, kann aus den oben angegebenen Gründen nichts über die

Beziehung des in der verneinenden Prämisse vorkommenden Terminus zu dem ganzen Umfang des mittleren Terminus behauptet werden, und folglich muss der Umfang dieses äußeren Terminus aus dem Teil des Umfangs des anderen äußeren Terminus ausgeschlossen werden. Also muss der Schluss in beiden Fällen verneinend sein.

7. *Aus zwei bejahenden Prämissen kann man nie einen verneinenden Schluss gewinnen.*

Nehmen wir an, dass der Schluss verneinend ist und die beiden Prämissen bejahend. Dann ist das Prädikat des Schlusses das Prädikat einer allgemein verneinenden oder partikulär verneinenden Aussage und aus dem ganzen Umfang des Subjekts oder aus einem Teil dieses Umfangs ausgeschlossen. Das Prädikat einer verneinenden Aussage ist außerdem distribuiert. In der größeren Prämisse ist das Prädikat dementsprechend auch distribuiert (*Regel 4*). Das ist in folgenden Fällen möglich. Erstens, wenn das Prädikat des Schlusses das Prädikat der größeren Prämisse ist und diese eine partikulär verneinende oder allgemein verneinende Aussage ist. In diesem Fall ist eine der Prämissen offenbar eine verneinende Aussage, was der Annahme widerspricht und die Regel bestätigt. Im zweiten Fall ist das Prädikat des Schlusses in der größeren Prämisse das Subjekt einer allgemein bejahenden Aussage. Das bedeutet, dass der mittlere Terminus in dieser Prämisse nicht distribuiert ist, und er muss daher (nach der *Regel 3*) in der kleineren Prämisse distribuiert sein. Ist die kleinere Prämisse bejahend, impliziert das, dass das Subjekt den mittleren Terminus und folglich das Prädikat subordiniert. Das Subjekt soll außerdem im Schluss nicht distribuiert sein. Um aber einen Schluss zu bekommen, in dem das Prädikat von einem Teil des Umfangs des Subjekts ausgeschlossen wird, muss man etwas von diesem Teil des Umfangs des Subjekts wissen. Da aber dieser Teil als Teil des Prädikats einer allgemein bejahenden Aussage unbestimmt bleibt, muss der Schluss in diesem Fall bejahend sein, was der Annahme widerspricht.

8. *Aus zwei partikulären Prämissen kann man keinen richtigen Schluss bekommen.*

Angenommen die beiden Prämissen sind partikulär und ein Schluss aus ihnen wäre möglich, dann müsste eine der Prämissen verneinend sein, damit der mittlere Terminus distribuiert wäre. In diesem Fall müsste aber auch der Schluss verneinend sein (*Regel 6*), und somit das Prädikat des Schlusses distribuiert. Distribuiertheit des Prädikats im Schluss bedeutet aber, dass es auch in der größeren Prämisse distribuiert sein muss (*Regel 4*). Wenn die Prämissen dabei partikulär sind, dann kann die größere Prämisse nur eine partikulär verneinende Aussage sein, deren Prädikat der größere Terminus ist. Als das Subjekt einer partikulären Aussage ist der mittlerer Terminus in der größeren Prämisse nicht distribuiert. Da das Prädikat des Schlusses sich von dem mittleren Terminus unterscheidet (der *Regel 1* entsprechend), muss der mittlere Terminus das Prädikat der kleineren Prämisse sein. Diese ist ihrerseits, wie schon gezeigt wurde, auch eine partikulär verneinende Aussage, denn nur diese Qualität garantiert die Distribuiertheit des Prädikats der Aussage. Somit sind beide Prämissen verneinend, was nach der *Regel 5* die Möglichkeit eines Schlusses ausschließt.

9. *Wenn ein Schluss möglich ist, und eine der Prämissen partikulär ist, dann kann der Schluss nur partikulär sein.*

Nehmen wir an, dass ein allgemeiner Schluss aus den gegebenen Prämissen möglich ist. Der Schluss kann eine allgemein bejahende oder eine allgemein verneinende Aussage sein. Wenn der Schluss eine allgemein bejahende Aussage ist, muss das Subjekt des Schlusses in der kleineren Prämisse distribuiert sein und keine Prämisse darf verneinend sein. Somit wäre die kleinere Prämisse allgemein (SaM), und der mittlere Terminus wäre nicht distribuiert. Er müsste dann in der größeren Prämisse distribuiert sein, also hätte dann die größere Prämisse die Form MaP, und beide Prämissen wären dann allgemein. Wenn der Schluss eine allgemein verneinende Aussage ist, sind sein Subjekt und Prädikat beide im Schluss und folglich in beiden Prämissen distribuiert. Außerdem muss eine der Prämissen verneinend sein. Wenn einer der äußeren Termini des Syllogismus das Subjekt einer allgemein bejahenden Aussage ist, ist der mittlere Terminus in dieser Aussage nicht distribuiert. Also muss dieser Terminus das Prädikat einer partikulär verneinenden Aussage sein, was Nicht-Distribuiertheit des Subjekts dieser Prämisse nach sich zieht. Das Subjekt der verneinenden Prämisse ist aber ein äußerer Terminus und muss folglich distribuiert sein. Also muss diese Prämisse eine allgemein verneinende Aussage sein. Somit führt die Annahme, dass unter den gegebenen Bedingungen der Schluss nicht partikulär ist, zu einem Widerspruch.

10. *Wenn die größere Prämisse partikulär ist, und die kleinere Prämisse verneinend, ist ein Schluss unmöglich.*

Sei die größere Prämisse partikulär, und die kleinere Prämisse verneinend. Daraus folgt, dass die größere Prämisse bejahend ist (*Regel 5*), und der Schlusssatz – verneinend (*Regel 6*). In einer verneinenden Aussage ist das Prädikat immer distribuiert, aber in einer partikulär bejahenden – nicht distribuiert. Das Prädikat des Schlusssatzes ist dementsprechend in der größeren Prämisse nicht distribuiert. Dann ist dieser Terminus auch im Schlusssatz (*Regel 4*) nicht distribuiert. Also ist ein Schluss unmöglich.

2.3.6 Die erste Figur des Syllogismus. Reduktion auf die erste Figur

Die Syllogistik ist das erste axiomatische logische System. Als Axiome dieses Systems können die Syllogismen einer der Figuren dienen. Hauptsächlich betrachtet man als Axiome die Syllogismen der ersten Figur. Alle anderen Syllogismen kann man dann aus diesen Axiomen ableiten. Die Idee der Ableitbarkeit eines Syllogismus aus einem anderen findet ihren Ausdruck in dem Begriff *Reduktion auf (eine der Figuren, insbesondere auf) die erste Figur*. Das Wesen der Reduktion besteht darin, dass man die Gültigkeit des Schlusses nach einem Syllogismus durch Umwandlung des Syllogismus in einen der Syllogismen beweisen kann, die als Axiome angenommen werden. Da die erste Figur des Syllogismus für die vollkommenste Figur des Syllogismus gilt, bevorzugt man diese Syllogismen als Axiome.

Die erste Figur des Syllogismus unterliegt außer den allgemeinen noch folgenden besonderen Regeln.

1. *Die kleinere Prämisse ist eine bejahende Aussage.* Wäre die kleinere Prämisse verneinend (*... S sind nicht M*), müsste der Schluss auch verneinend sein (*Regel 6*), also die Form *... S sind nicht P* haben. Also müsste dann auch das Prädikat in der größeren Prämisse distribuiert sein, was nur dann möglich ist, wenn diese Prämisse verneinend ist (*... M sind nicht P*). Aber wenn die größere Prämisse auch verneinend ist, ist der Schluss unmöglich (*Regel 5*). Also ist die Annahme falsch.

2. *Die größere Prämisse ist eine allgemeine Aussage.* Wäre die größere Prämisse partikulär, dann wäre der mittlere Terminus in dieser Prämisse nicht distribuiert (als Subjekt einer partikulären Aussage). Aber dann wäre der mittlere Terminus auch in der kleineren Prämisse nicht distribuiert (als Prädikat einer bejahenden Aussage). Dann wäre der mittlere Terminus in beiden Prämissen nicht distribuiert, und der Schluss wäre unmöglich (*Regel 3*). Also muss die größere Prämisse allgemein sein.

Man kann 64 Modi der ersten Figur (wie bei jeder anderen Figur) konstruieren, je nachdem welche Aussagen man als Prämissen und als Schlusssatz nimmt:

AAA	AEA	AIA	AOA	EAA	EEA	EIA	EOA
AAE	AEE	AIE	AOE	EAE	EEE	EIE	EOE
AAI	AEI	AII	AOI	EAI	EEI	EII	EOI
AAO	AEO	AIO	AOO	EAO	EEO	EIO	EOO

IAA	IEA	IIA	IOA	OAA	OEA	OIA	OOA
IAE	IEE	IIE	IOE	OAE	OEE	OIE	OOE
IAI	IEI	III	IOI	OAI	OEI	OII	OOI
IAO	IEO	IIO	IOO	OAO	OEO	OIO	OOO

Von diesen fallen alle Modi mit den Prämissen EE, EO, OO, OE nach der *Regel 5* weg; alle Modi mit den Prämissen II, IO, OI – nach der *Regel 8*; alle Modi mit den Prämissen IE – nach der *Regel 10*; alle Modi mit den Prämissen IA, OA – nach der zweiten Regel der 1. Figur; von den übrigen – alle Modi mit den Prämissen AE, AO – nach der ersten Regel der 1. Figur. Die Modi AAE, AAO, AIE, AIO verstoßen gegen die *Regel 7*, die Modi EAA, EAI, EIA, EII – gegen die *Regel 6*, die Modi AIA und EIE – gegen die *Regel 9*.

Es bleiben also folgende richtige Modi:

- AAA – Alle M sind P, alle S sind M, also: alle S sind P (*Barbara*),
- AAI – Alle M sind P, alle S sind M, also: einige S sind P (*Barbari*),
- EAE – Alle M sind nicht P, alle S sind M, also: alle S sind nicht P (*Celarent*),
- EAO – Alle M sind nicht P, alle S sind M, also: einige S sind nicht P (*Celaront*),
- AII – Alle M sind P, einige S sind M, also: einige S sind P (*Darii*),
- EIO – Alle M sind nicht P, einige S sind M, also: einige S sind nicht P (*Ferio*).

Der Beweis eines Syllogismus oder die Reduktion des Syllogismus auf die erste Figur kann mittels drei Operationen durchgeführt werden – durch Umkehrung der Aussage, Auswechseln der Prämissen oder Zurückführung auf das Unmögliche.

Als Beispiel eines Beweises durch Umkehrung betrachten wir die Reduktion eines Syllogismus der dritten Figur.

Darapti	Alle Athener sind Griechen.	MaP
	Jeder Athener ist ein Mensch.	MaS
	Einige Menschen sind Griechen.	SiP

Durch Umkehrung mit Einschränkung der kleineren Prämisse bekommt man:

Alle Athener sind Griechen.	MaP
Einige Menschen sind Athener.	SiM
Einige Menschen sind Griechen.	SiP ,

also *Darii*.

Die Modi *Baroco* (2. Figur) und *Bocardo* (3. Figur) reduziert man auf die 1. Figur durch Zurückführung auf das Unmögliche.

Baroco Jeder Athener ist Grieche.
Einige Logiker sind nicht Griechen.

Einige Logiker sind nicht Athener.

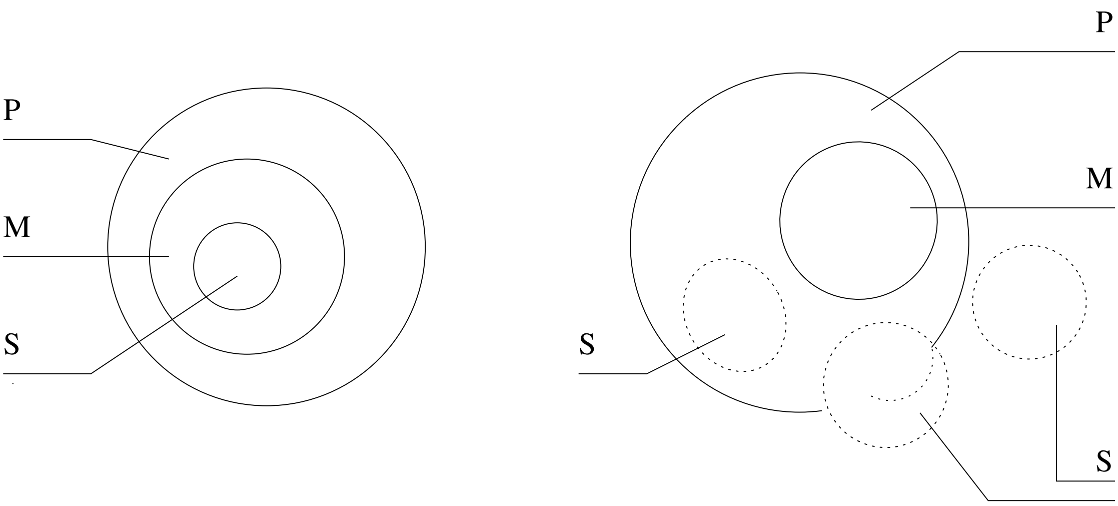
Wenn man annimmt, dass der Schluss falsch ist, dann wird die dem Schluss widersprechende Aussage behauptet: *Alle Logiker sind Athener*. Die größere Prämisse des Schlusses besagt: *Jeder Athener ist Grieche*. Nun hat man zwei allgemein bejahenden Aussagen, die man als Prämissen eines Syllogismus betrachten kann. Offenbar ist der mittlere Terminus, der in beiden Prämissen vorkommt, der Terminus *Athener*. Diese Prämissen, aus denen man einen Schluss über die Beziehung zwischen den Termini *Logiker* und *Griechen* ziehen kann, sind schematisch in der Reihenfolge $S - M$, $M - P$ darstellbar. Durch Einführung der passenden Reihenfolge der Prämissen bekommt man den Modus *Barbara* der 1. Figur:

Alle Athener sind Griechen.
Alle Logiker sind Athener.

Alle Logiker sind Griechen.

Die Behauptung, die man als Schluss aus den gegebenen Prämissen bekommt, steht im Widerspruch zu der kleineren Prämisse von *Baroco*. Also muss eine der Prämissen des gewonnenen Syllogismus verworfen werden. Die größere Prämisse war von Anfang an als wahr angenommen, also wird der Widerspruch zum Schlusssatz von *Baroco* verworfen. Folglich gilt der Schluss nach *Baroco*.

Zu bemerken ist, dass Aristoteles einen syllogistischen Schluss als eine Aussage betrachtete, die man in der Sprache der modernen Aussagenlogik als eine Implikation formulieren kann. Diese Auffassung lässt die Möglichkeit zu, einen wahren Schluss auch aus falschen Prämissen, also zufällig zu ziehen. Deswegen wird von den Prämissen des Syllogismus oft verlangt, dass diese wahr sein müssen. Diese Forderung steht auch im Einklang mit der späteren Auffassung eines Syllogismus, die diesen als eine Regel darstellt. Auf diese Darstellungsform des Syllogismus deutet auch eine der hier gebrauchten Schreibweisen, welche die Prämissen des Syllogismus von seinem Schluss durch einen Strich trennt.



$MaP - SaM - SaP$ $\qquad$ $MaP - SeM - ?$

Schema 6

Übungsaufgaben

13. Bestimmen Sie, Modi welcher Figur die folgenden Syllogismen sind.

    a) Wenn A keinem B zukommt, B aber einigem C, dann muss A einigem C nicht zukommen.

    b) Wenn M jedem N zukommt und einem X nicht zukommt, muss N einem X nicht zukommen.

    c) Es komme A jedem B und B einigem C zu, so muss A einigem C zukommen.

    d) Wenn R jedem S, P aber einem (zukommt), dann muss P einem R zukommen.

    e) Wenn M jedem N, aber keinem X zukommt, wird auch X keinem N zukommen.

    f) Wenn R jedem S zukommt, P aber einem nicht zukommt, dann muss P einem R nicht zukommen.

14. Beweisen Sie folgende Modi des Syllogismus durch Reduktion auf die erste Figur.

Fresison:
$$\begin{array}{l} \text{Kein Rabe ist weiß} \\ \text{Einiges Weiße ist Lebewesen} \\ \hline \text{Einige Lebewesen sind nicht Raben} \end{array}$$

Camestres:
$$\begin{array}{l} \text{Alle } P \text{ sind } M \\ \text{Alle } S \text{ sind nicht } M \\ \hline \text{Alle } S \text{ sind nicht } P \end{array}$$

Felapton:
$$\begin{array}{l} \text{Alle } M \text{ sind nicht } P \\ \text{Alle } M \text{ sind } S \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind nicht } P \end{array}$$

Disamis:
$$\begin{array}{l} \text{Einige } M \text{ sind } P \\ \text{Alle } M \text{ sind } S \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind } P \end{array}$$

Beachten Sie dabei Folgendes. Der Name, der links vor dem

Syllogismus steht, ist in Wirklichkeit ein „Rezept“ der Reduktion. Der erste Buchstabe bezeichnet den Modus der 1. Figur, dessen Name mit demselben Buchstaben anfängt, und auf den der gegebene Modus reduziert wird. Die Vokale charakterisieren die Qualität und Quantität von Prämissen und Schluss, ihre Reihenfolge entspricht der Reihenfolge, in der die Aussagen im Syllogismus vorkommen. Der erste der Vokale steht für die größere Prämisse, der zweite – für die kleinere, und der dritte – für den Schluss. Die Buchstaben „s“, „p“ und „m“ weisen darauf hin, dass auf den Aussagen, deren Bezeichnungen links vor diesen Buchstaben stehen, folgende logische Operationen durchgeführt werden sollen. Für einfache Umkehrung steht „s“, „p“ – für Umkehrung mit Einschränkung und „m“ für das Auswechseln der Prämissen.

15. Beweisen Sie den folgenden Modus durch Zurückführung auf das Unmögliche.

Bocardo:

Einige Athener sind nicht Logiker
Alle Athener sind Griechen
―――――――――――――――――
Einige Griechen sind nicht Logiker

3 Von einfachen kategorischen Aussagen zu konstruktiven Objekten

3.1 Was ist ein logischer Kalkül?

In der Syllogistik werden Subjekt und Prädikat einer Aussage als Elemente (Terme) einer Relation betrachtet. Obwohl diese Relation im allgemeinen nicht definiert wird, gelten die Terme dieser Relation oft als „gleichberechtigt“. Sie gehören demselben logischen Typ an, zumindest in dem Sinn, dass sie beide Begriffe sind. Fraglich ist dies in Bezug auf einzelne Begriffe oder Individuen, die nicht im Inhalt anderer Begriffe vorkommen können. Aber dass das Subjekt und Prädikat einer Aussage in einem allgemeinen Fall denselben logischen Typ haben, realisiert sich insbesondere in der Gültigkeit einer solchen logischen Operation wie Umkehrung.

Diese „Gleichberechtigung“ des Subjekts und Prädikats einer Aussage wird allerdings durch die Unterscheidung von Extension und Intension eines Begriffs in Frage gestellt. Extension und Intension als Charakteristika eines Begriffs wurden 1662 zum ersten Mal im Werk von Nicole und Arnauld, das später unter dem Namen „Logik von Port-Royal“ bekannt wurde, definiert. Begriffe wurden darin als Vorstellungen oder Ideen aufgefasst. In allgemeinen Begriffen gibt es zweierlei: den Inhalt und die Ausdehnung. Der Inhalt besteht aus Attributen, welche der Begriff in sich schließt, und welche man ihm nicht nehmen kann, ohne ihn zu vernichten. Die Ausdehnung (Umfang) eines Begriffs bilden die Subjekte, welchen dieser Begriff zukommt, und die man auch die Untergeordneten eines allgemeinen Terminus nennt, welcher in Hinblick auf sie als übergeordnet bezeichnet wird. Bocheński behauptet, dass man ähnliche Unterscheidungen schon vor Nicole und Arnauld bei Porphyr und in der Scholastik (z. B. bei Petrus Hispanus) finden kann. Porphyr unterscheidet zwischen dem *was* und dem *wie* des Prädizierens. Sagt man über Sokrates, dass er ein Mensch ist, geht es darum, *was* Sokrates ist. Ein Begriff wird einem anderen untergeordnet, und man kann über die Beziehungen zwischen Begriffsumfängen sprechen. Sagt man über einen Menschen, dass er ein vernünftiges Lebewesen ist, dann handelt es sich hier darum, *wie* der Mensch ist, also um den Inhalt dieses Begriffs. In der Scholastik unterscheidet man zwischen einfacher und personaler Supposition (wenn das Begriffswort mehrere Subjekte (gleicher Art) oder ein einzelnes Subjekt bezeichnet). Im ersten Fall geht es um Begriffswörter, die Prädikate vertreten, im zweiten Fall handelt es sich um Begriffswörter für Subjekte. Diesen Unterschied kann man laut Bocheński als Unterscheidung zwischen der Extension und ihren Trägern (Subjekten) einerseits und der Intension und ihren Trägern (Prädikaten) andererseits betrachten ([Boch70], 24.06, 27.17, 36.10).

Die Begriffe der Extension und Intension bieten die Möglichkeit, die Wahrheitsbedingungen zu definieren, indem man die Begriffsrelation, die in der einfachen kategorischen Aussage gegeben ist, mit Hilfe dieser zwei Begriffe interpretiert. Man kann behaupten, dass eine allgemein bejahende kategorische Aussage dann wahr ist, wenn der Umfang des Subjekts in den Umfang des Prädikats fällt, und der Inhalt des Prädikats völlig in den Inhalt des Subjekts eingeht. Ist eine allgemein-bejahende kategorische Aussage wahr, dann fällt ein Teil des Inhalts des Subjekts mit dem Inhalt des Prädikats der Aussage zusammen. Die Möglichkeit einer solchen Auffassung verleitet zu der Idee, die Relation zwischen Subjekt und Prädikat einer Aussage als Relation der Identität aufzufassen.

Diese Auffassung birgt mehrere Gefahren in sich. Eine dieser Gefahren, auf die Cohn 1908 hinweist, ist die Möglichkeit, jede Aussage als Aussage über Identität zu betrachten, und somit ihres Erkenntniswertes zu berauben. Man kann den Erkenntniswert einer Aussage mit dem Gedanken (oder dem Sinn), den der der Aussage entsprechende Satz ausdrückt, verbinden und verlangen, dass ein Gedanke dann einen Erkenntniswert besitzt, wenn die Gedankenteile (die auch in anderen Gedanken als deren Bestandteile vorkommen können) sich voneinander unterscheiden. Werden zwei verschiedene Gedankenteile in eine Relation zueinander gebracht, kann man daraus auf die Relation eines dieser Gedankenteile zu den Begriffen schließen, die ihrerseits bestimmte Beziehungen zu dem anderen Gedankenteil aufweisen. Handelt es sich bei den Gedankenteilen um ein und denselben Begriff, kann man aus ihrer Gleichsetzung keine neuen Erkenntnisse gewinnen. Das könnte erklären, warum Cohn die Idee der Identität von Subjekt und Prädikat einer Aussage als Gleichsetzung der Bedeutung eines Satzes mit dem Fehlen jeglicher Bedeutung interpretiert. Cohn erläutert dies am Beispiel des Satzes „Caesar überschritt den Rubikon“. Spricht dieser Satz die Identität des Subjekts und des Prädikats aus, dann entspricht dem wahren logischen Sinn des gegebenen Satzes „Der den Rubikon überschreitende Caesar ist der den Rubikon überschreitende Caesar“. „Man setzt das vollzogene Urteil in den Gegenstand des Subjekts hinein, macht dieses so zur Voraussetzung eines inhaltlosen Scheinurteils und glaubt, das Problem der Erkenntnis aus der Welt geschafft zu haben, weil man es nicht mehr sieht“ ([Cohn08], 87).

Die andere Gefahr dieser Auffassung liegt in dem Versuch, eine Relation mit Hilfe des Begriffs des Prädikats zu erklären. Wenn man Relationen für sekundär in Bezug auf Prädikate hält, leitet man eine Relation letztendlich aus der Identität von Subjekt und Prädikat ab. Bei einer solchen Ableitung wird insbesondere jede Relation zwischen zwei Gegenständen auf die Relation der Identität zwischen ihren Prädikaten zurückgeführt. Russell analysierte das Wesen solcher Versuche 1898, 1899 und 1903. Seiner Meinung nach realisieren sich diese Versuche auf zweifache Weise. Einerseits – als die so genannte „*monadistische*“ Theorie, deren Repräsentanten nach Russells Meinung Leibniz und Lotze sind, andererseits – als die so genannte „*monistische*“ Theorie, die von Spinoza und Bradley vertreten wird ([Rus03], § 212). Nach der „monadistischen“ Theorie betrachtet man eine Relation zwischen zwei Objekten als Summe von Eigenschaften dieser Objekte. Stehen die Objekte a und b in einer Relation R zueinander, dann kommt einem der Objekte die Eigenschaft r_1, und dem anderen die Eigenschaft r_2 zu (es gilt ar_1 und br_2), die zusammen die Relation R ergeben. Laut der „monistischen“ Theorie ist die fragliche Relation eine Eigenschaft des Ganzen, das aus a und b besteht (wir können aRb als $(ab)r$ darstellen, wobei r für eine Eigenschaft des Ganzen steht). Die wichtigsten Argumente Russells gegen diese Theorien, deren Grund er in der Gleichsetzung von Subjekt und Prädikat einer Aussage sieht, sind folgende.

Wären Subjekt und Prädikat einer Aussage identisch, dann könnte man jede Aussage in zwei Aussagen zerlegen, von denen eine dem Subjekt und die andere dem Prädikat ein gemeinsames Prädikat zusprächen. Solche Aussagen hätten aber einen anderen Inhalt im Vergleich zu der ursprünglichen Aussage (sie wären beide von ihr verschieden). Andererseits würde jeder Versuch, eine Relation zwischen zwei Subjekten auf ihre Prädikate zurückzuführen, eine Relation zwischen diesen Prädikaten voraussetzen, was ins Unendliche führen kann. Das wäre der Fall, wenn z. B. die Behauptung, dass ein Objekt a größer als ein anderes Objekt b ist, zu einer Behauptung über die Größen von a und b führte. Sogar wenn man zustimmt, dass das Subjekt einer Aussage ihr Prädikat enthält, und damit die Identität zwischen dem Prädikat und einem Teil des Inhalts des Subjekts anerkennt, ist eine solche Anerkennung zugleich das Zugeständnis, dass in dieser Aussage in der Tat eine Relation (zwischen dem Ganzen und einem seiner Teile) behauptet wird. Schließlich besteht die Möglichkeit, eine kategorische Aussage so umzuformulieren, dass ihr Prädikat selbst als Subjekt einer anderen Aussage auftritt. Eine solche Aussage kann man ihrer Bedeutung nach mit der ursprünglichen Aussage gleichsetzen, was zeigt, dass das Prädikat einer Aussage auch als ein selbständiges Objekt auftreten kann, das in eine Beziehung zu anderen Objekten tritt. Ein Beispiel, das diese letzte Idee bestätigen sollte, ist die Möglichkeit, den Satz „Dieser Stuhl ist rot“ in die Form „Röte ist diesem Stuhl prädizierbar“ zu überführen ([Rus1899], 141).

Was diese Kritik zeigt, ist die Notwendigkeit einer neuen Auffassung der Struktur der Aussage. Diese neue Auffassung realisiert sich in der Idee, dass die Beschreibung der Struktur einer Aussage mit Hilfe der Begriffe *Subjekt* und *Prädikat* nicht universal ist. Die Notwendigkeit der weiteren Verwirklichung dieser Idee wird auch durch die Entdeckung bestätigt, dass die formalen Mittel, die uns die traditionelle formale Logik bietet, nicht für jede Aufgabe ausreichen. Insbesondere kann man ausschließlich auf der Basis des vorhandenen logischen Wissens nicht allen Arten von mathematischen Aussagen eine passende logische Struktur zuordnen. Schwierigkeiten entstehen u. a. bei der Analyse der Aussagen über Anzahl und über Ordnungsrelationen.

Frege gibt eine neue Auffassung der logischen Struktur einer Aussage. Bekanntlich teilt Frege jede Aussage in eine Funktion und ihre Argumente auf. Da nun sowohl eine einfache als auch eine zusammengesetzte Aussage eine solche Struktur aufweist, bedarf man in erster Linie einer neuen Auffassung von Extension und Intension, die auch dem Unterschied zwischen Einfachem und Zusammengesetztem Rechnung trägt. Begriffe und Beziehungen sind für Frege wahrheitswertige Funktionen, deren Werte man mit besonderen Namen bezeichnet, die ihrerseits als zusammengesetzte Ausdrücke (Beschreibungen) aufgefasst werden können. Der Name eines Wahrheitswertes (der Satz), den man als einen Komplex betrachtet, beschreibt die Bedingungen, unter denen der besagte Wahrheitswert das Wahre oder das Falsche ist, und gibt damit das Gesetz der Zuordnung wieder, nach dem bestimmten Argumenten ein bestimmter Wahrheitswert zugeordnet wird. Dass die Begriffe und Beziehungen sowie andere logische Funktionen wahrheitswertige Funktionen sind, zeigt, dass die Begriffe der Extension und Intension erweitert werden können. Es besteht die Möglichkeit, nicht nur über Extension und Intension der Begriffe (Komponenten der Struktur von elementaren Aussagen) zu sprechen, sondern auch über die Extension und Intension anderer wahrheitswertiger Funktionen (Komponenten der Struktur von komplexen Aussagen) oder ihrer Werte.

Das logische Prädikat einer Aussage, das Frege als eine wahrheitswertige Funktion betrachtet, hält er nicht für einen selbständigen Gegenstand. Der Grund dafür liegt aber nicht darin, dass sich das Prädikat als ein Teil des Inhalts des Subjekts auffassen lässt. Die logischen Beziehungen zwischen dem Subjekt und dem Prädikat einer Aussage sind bei Frege immer durch eine bestimmte Relation zwischen diesen beschreibbar.

Die erste Erkenntnis, von der Frege ausgeht, ist die Ersetzbarkeit des Subjekts einer Aussage durch andere Subjekte (sowie des Prädikats durch andere Prädikate). In dem Satz „Sokrates ist ein Mensch" kann man den Namen „Sokrates" durch einen anderen Namen, z. B. „Platon" ersetzen, oder sogar durch eine Variable, wodurch man den Ausdruck einer Funktion „x ist ein Mensch" bekommt. Im Unterschied zu einem Satz hat ein Funktionsausdruck keine bestimmte Bedeutung, und die Werte, die eine gegebene Funktion durchläuft, hängen mit den Werten des Funktionsarguments zusammen.

Frege behauptete die Objektivität von Aussagen (in seiner Terminologie Gedanken). In *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) betrachtet Frege Begriffe und Gegenstände als „objektive Vorstellungen", die unabhängig von Empfindungen, Anschauungen und Vorstellungen sind. Sie sind aber nicht unabhängig von der Vernunft, in der Frege anscheinend den Träger der Form des Urteilens sieht. Objektive Vorstellungen sind unsinnlich und für alle Menschen dieselben. Sobald man den objektiven Charakter von Gegenständen (von Werten der Argumente) und Werten einer wahrheitswertigen Funktion anerkennt, wird man mit der Frage konfrontiert, wodurch die „objektiven Vorstellungen“ (Gegenstände und Begriffe) zusammengesetzt werden. Wird die Zusammensetzung von Bestandteilen eines Gedankens zu einer Einheit von einem Subjekt vollzogen, kann die Objektivität des Gedankens, d. h. seine Zugänglichkeit für andere erkennende Subjekte, verloren gehen. Deshalb legt Frege den Grund für die Einheitlichkeit eines Gedankens in das Zusammenzusetzende selbst. Die Quelle der besagten Einheitlichkeit erhält den Namen „Ungesättigtsein“ eines Begriffs, und diese Auffassung der Einheitlichkeit führt dazu, dass der Begriff als eine Funktion betrachtet wird.

Der formallogischen Tradition entsprechend unterscheidet Frege in dem genannten früheren Werk zwischen Inhalt und Umfang eines Begriffs. Nach Frege besteht ein Begriff aus Merkmalen, die ihrerseits Eigenschaften von Gegenständen sind. Den Umfang des Begriffs definiert er nicht. Es wird davon ausgegangen, dass es klar sei, was der Begriffsumfang ist. An Stelle des Wortes „Begriffsumfang“ benutzt Frege auch das Wort „Begriff“. Frege vergleicht Begriffe miteinander, indem er fragt, welcher der zwei zu vergleichenden Begriffe umfassender ist, als der andere, wobei umfassender zu sein nicht dasselbe ist, wie (der Anzahl nach) größer zu sein. Da die meisten Begriffe als Prädikate auftreten können, spricht Frege über die Anwendbarkeit der den Prädikaten entsprechenden „Eigenschaftswörter“ für die Beschreibung und Definition der Gegenstände, denen man das jeweilige Prädikat prädizieren kann. Schon hier findet man also die Idee eines „linguistischen Shifts“ vor. Diese Idee führt schließlich dazu, dass Umfang und Inhalt als Eigenschaften eines Zeichens (also als seine semiotischen Charakteristika) angesehen werden und nicht als Eigenschaften des Korrelats eines Zeichens. Daher rührt auch die Tradition, die insbesondere mit Carnap in Verbindung gebracht wird, nicht nur die Bedingungen für die Extensions- und Intensionsgleichheit zu formulieren und dadurch Extension und Intension zu definieren, sondern auch festzulegen, was Extension und Intension eines Zeichens ist. Ein Eigenschaftswort (Begriffswort) bezeichnet einen Begriff, den man mit dem Umfang des Begriffs gleichsetzen kann. Geht man außerdem von Freges Idee aus, zwischen den Merkmalen eines Begriffs (Eigenschaften der Gegenstände, die unter den Begriff fallen) und seinen Eigenschaften (Beziehungen zu anderen Begriffen) zu unterscheiden, dann kann man auch die traditionellen Termini „Umfang“

und „Inhalt“ interpretieren. Den Inhalt eines Begriffswortes kann man mit Merkmalen des Begriffs gleichsetzen, während Eigenschaften eines Begriffs (seine Beziehungen zu anderen Begriffen, die dem Begriff „eine Zahl beilegen“), als Umfang des Begriffs beschrieben werden. Dadurch, dass Frege zumindest seit 1891 zwischen dem Sinn und der Bedeutung eines Zeichens unterscheidet, vollendet er den Übergang zur neuen Auffassung der Extension und Intension. Indem man Argumente einer wahrheitswertigen Funktion sowie ihre Werte als Gegenstände beschreibt, gewinnt man die Möglichkeit, die Extension eines Funktionszeichens mit solchen Argumenten und Werten zu identifizieren. Die Intension eines Funktionszeichens kann man dann in den besonderen Bedingungen sehen, unter denen einem bestimmten Argument der Funktion ein Wahrheitswert zugeordnet wird. Obwohl Frege diese Idee nicht äußert, widerspricht sie nicht seinen Thesen. Betrachtet man wie Frege die Beziehung zwischen dem Gegenstand und dem Begriff, unter den der Gegenstand fällt als die grundlegende logische Beziehung, wird es klar, dass man die Beziehungen zwischen Begriffen, die den Umfang eines Begriffs charakterisieren, auf Beziehungen zwischen Bedingungen, unter denen Argumente einer wahrheitswertigen Funktion eine andere Funktion erfüllen und somit als ihre Argumente auftreten, zurückführen kann. Man kann behaupten, dass Argumente und Werte einer wahrheitswertigen Funktion ihren Umfang vollständig charakterisieren. Die Wahrheitsbedingungen, die für eine Funktion gelten, beschreiben, wann ein als Argument der Funktion auftretender Gegenstand die Funktion erfüllt. Das ist dann der Fall, wenn der Gegenstand die Eigenschaften hat, die in die Definition der Funktion eingehen.

Russell vertritt eine sich von Freges Auffassung unterscheidende Ansicht über die Struktur der Aussage. Für ihn sind Prädikate ihrem logischen Status nach selbständige Objekte, die selbst als logische Subjekte von Aussagen auftreten können, und die, wenn sie einem Subjekt zugesprochen werden, in eine Beziehung zu diesem gebracht werden, die man auch als eine Relation, nämlich die Relation der Prädikation, definieren kann.

Die Einheitlichkeit einer Aussage (Proposition) liegt nach Russell in der Beziehung zwischen ihren Bestandteilen. Jeden Versuch, eine Aussage in ein Argument und eine Behauptung über dieses zu zerlegen (was Russell Frege zuschreibt), hält Russell für gescheitert, weil die Behauptung über den Gegenstand keine Einheitlichkeit besitzt und in weitere Bestandteile zerfällt, sobald man diese Behauptung ihres Gegenstands beraubt ([Rus03], § 482). Identifiziert man die Behauptung mit einer Funktion, bedeutet das, dass die Funktion ohne ihren Definitionsbereich (ohne ihre Argumente) als Funktion gar nicht auftreten kann. Sieht man diesen Definitionsbereich als die Klasse der Gegenstände an, die die Funktion erfüllen, dann ist die Funktion durch diese Klasse bestimmt (definiert). Das heißt auch, dass man jeder Klasse von Gegenständen eine Funktion (ein Prädikat) zuordnen kann. Die Möglichkeit einer solchen Zuordnung ist aber zweifelhaft, was insbesondere die berühmte Antinomie Russells (1902) zeigt. Obwohl Russells Feststellung bezüglich des Zusammenhangs zwischen der Funktion und ihrem Definitionsbereich als eine Anerkennung von Freges Idee des Ungesättigtseins angesehen werden kann, die sich insbesondere in Freges Forderung äußert, dass man den Ausdruck einer Funktion nicht ohne einen Platzhalter für ihr Argument gebrauchen darf, wird sie bei Russell der Ausgangspunkt für eine andere Auffassung.

Die einzige Möglichkeit, die logische Struktur einer Aussage so zu erfassen, dass sie auch für die Entwicklung eines Formalismus Grund bietet, sieht Russell in dem Begriff einer propositionalen Funktion (auch Aussagenfunktion oder Satzfunktion genannt). Russells propositionale Funktionen sind Freges Begriffen ähnlich, unterscheiden sich aber von diesen in erster Linie ihrem Wert nach. Während der Wert eines Begriffs für ein bestimmtes Argument ein Wahrheitswert ist, ist der Wert einer propositionalen Funktion für ein bestimmtes Argument eine Aussage (Proposition), die die Eigenschaft besitzt, wahr oder falsch zu sein. Wenn sich die propositionale Funktion durch eine Form ausdrücken lässt, z. B. „x ist ein Mensch“, werden die Werte der propositionalen Funktion durch Sätze (konstante Sprachausdrücke also) ausgedrückt. Die Bezeichnung für einen der Werte der gegebenen propositionalen Funktion ist der Satz „Sokrates ist ein Mensch“. Der Satz lässt sich als wahr oder falsch einschätzen, während die propositionale Funktion alle möglichen Sätze der Gestalt „… ist ein Mensch“ durchläuft, die sowohl wahr als auch falsch sein können. Die propositionale Funktion kann man daher als ein Instrument betrachten, mit dessen Hilfe man den Gegenstandsbereich in den Definitionsbereich dieser Funktion und sein Komplement teilt. Wenn man den Definitionsbereich einer propositionalen Funktion als eine Klasse betrachtet, dann kann man diese Klasse als alle diejenigen Gegenstände definieren, welche die fragliche propositionale Funktion erfüllen, was wiederum heißt: als alle diejenigen Gegenstände, für die der Wert der propositionalen Funktion eine wahre Aussage ist ([Rus03], § 84). Es fragt sich allerdings, in welcher Beziehung nun propositionale Funktionen und Begriffe zueinander stehen.

Russell unterschied vor 1903 die extensionale und intensionale Seiten eines Begriffs. Die Extension eines Begriffs betrachtet er als eine Klasse – als Gesamtheit von Gegenständen, die man entweder durch Aufzählung oder durch ein sie definierendes Prädikat vorgeben kann. Begriffe (Prädikate) sind für Russell Bedeutungen („*meanings*“), die eine wesentlich prädikative Natur haben und keine Gegenstände sind, die man zählen kann. Obwohl Prädikate (Bedeutungen) sich voneinander unterscheiden, kann man einem Prädikat keine Zahl zuordnen. Elemente einer Klasse sind nach Russell Objekte, die dieselbe Bedeutung (oder Inhalt) haben, d. h. mögliche Subjekte ein und desselben Prädikats sind ([Rus1898], 175). Man kann sowohl etwas über die Beziehungen zwischen zwei Bedeutungen als auch über die Beziehungen zwischen Klassen (oder zwischen Elementen von Klassen und Klassen) aussagen. Dabei ist die Aussage über eine Beziehung zwischen Prädikaten ein Grund für die Aussage über Beziehungen zwischen Objekten. Wenn wir sagen „Rot impliziert Farbe“, bedeutet der Satz, dass rote Gegenstände farbig sind. Man kann eine solche Aussage über Implikation als eine Aussage betrachten, die die Intension der relevanten Begriffe betrifft, und die Aussage über Zugehörigkeit zu einer Klasse – als Aussage, die die Extension der Begriffe betrifft.

Beide Aussagearten kann man aus Aussagen mit traditioneller Subjekt-Prädikat-Struktur gewinnen, oder aber auf Aussagen mit dieser Struktur zurückführen. Dabei sind die auf solche Weise erhaltenen Aussagen äquivalent, d. h. sie haben ein und denselben Wahrheitswert. Von dem intensionalen Standpunkt aus gesehen, kommt die Relation der Implikation zwischen Prädikaten dadurch zustande, dass die Definition eines Begriffs (also sein Inhalt) ein Teil der Definition des anderen Begriffs ist. Die extensionale Interpretation der Beziehung zwischen zwei Begriffen realisiert sich in der Behauptung über die Denotate dieser Begriffe, d. h. über die Gegenstände, die die Begriffe in den Aussagen vertreten ([Rus03], § 73). Der Begriff einer propositionalen Funktion ermöglicht eine

Definition der Extension und Intension, die die Besonderheiten der beiden Interpretationen berücksichtigt. Wird ein Subsumtionssatz (z. B. „Alle Griechen sind Menschen“) als Bezeichnung für eine propositionale Funktion betrachtet, die man in der Satzform („Wenn x ein Grieche ist, dann ist x ein Mensch“) ausdrücken kann, dann überführt eine solche Satzform die Relation zwischen zwei Begriffsinhalten, die sich auch im Satz „Griechesein impliziert Menschsein“ formulieren lässt, in eine Relation zwischen zwei Aussageformen (oder aber in eine Aussageform), die sich in diesem Fall als formale Implikation erweist. Eine propositionale Funktion, wie *x ist ein Grieche*, definiert außerdem eine Klasse, nämlich die Klasse solcher Objekte, welche die propositionale Funktion erfüllen. Die logischen Beziehungen zwischen Begriffen (zwischen ihren Inhalten und ihren Umfängen) werden dank der Einführung von propositionalen Funktionen durch logische Funktoren repräsentiert, was auch die Idee Russells bestätigt, dass man diese Beziehungen durch die Beziehungen der Wahrheitswerte der Werte von propositionalen Funktionen charakterisieren kann. Die Möglichkeit einer solchen Charakterisierung führt dazu, dass die Extension und Intension zu Charakteristika von wahrheitswertigen Funktionen werden. Die Anerkennung des Seins der Begriffe wird nicht durch die Einführung des Instrumentariums von propositionalen Funktionen aufgehoben, weil die für Russell zu dieser Zeit typische intensionale Auffassung von Aussagen durch eine solche Aufhebung in Frage gestellt würde. Aber dieses Instrumentarium erweist sich auf dem Gebiet des Formalismus als fruchtbares Mittel, um ohne eine Annahme der Existenz solcher Entitäten wie Begriffe auszukommen. Man kann von nun an jedes Prädikat und jede Relation in ihren prädikativen und beziehenden Funktionen mit Hilfe einer propositionalen Funktion darstellen. Die Möglichkeit, die Relationen zwischen Begriffen mit Hilfe von propositionalen Funktionen aufzufassen, zeigt, was Bernays konstatiert, wenn er behauptet, dass die mathematische Logik keine Logik von Extensionen („Umfangs-Logik“) sein soll, weil Begriffsumfänge durch die Relationen zwischen Funktionen (insbesondere propositionalen Funktionen) definiert werden können ([Ber27], 13).

Die Erkenntnis, dass die Struktur einer Aussage mit Hilfe des Begriffs einer Funktion dargestellt werden kann, ist aber nicht das Einzige, was die Gestalt der modernen logischen Theorien bestimmt.

Die zweite Idee, die wir schon ansprachen, ist die Idee des Aufbaus einer besonderen formalisierten Sprache, der die Auffassung von der funktionalen Struktur der Aussage zugrunde liegt.

Der Aufbau eines Kalküls, insbesondere eines logischen, beruht darauf, dass man die logischen Gegenstände in der Form, die auch bestimmte Operationen auf diesen Objekten erlaubt (z. B. in der Form von Formeln), als konstruktive Objekte betrachtet. Wenn die logische Untersuchung sich mit solchen konstruktiven Objekten (bzw. mit ihrer Konstruktion) beschäftigt und auf der Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit beruht, ohne die Abstraktion der aktuellen (also schon realisierten und als ein Ganzes gedachten) Unendlichkeit anzunehmen, spricht man von der Anwendung konstruktiver Methoden in der Logik.

Einer derjenigen Autoren, die die konstruktiven Methoden anwenden, ist Hilbert. Auf dem 3. Internationalen Mathematiker-Kongress 1904 berichtete er über sein Vorhaben bezüglich der Begründung der Arithmetik ([Hil05]). Die Ideen, die Hilbert hier äußerte, werden später (1958) von Fraenkel und Bar-Hillel als radikales, ihrem Sinn nach intuitionistisches, Programm angesehen. Dabei muss man merken, dass sich der Intuitionismus (insbesondere Neo-Intuitionismus) erst später, mit der Dissertation Brouwers (1907), als eine Richtung in der Begründung der Mathematik ankündigte ([FBL84], 217). Von den Problemen von Freges Theorie ausgehend, die Hilbert für eine Studie hält, die tiefer in das Wesen der ganzen Zahl eindringt als viele andere, möchte er von vornherein die Untersuchung der Grundlagen der Arithmetik so ausrichten, dass eins ihrer Hauptziele die Vermeidung derartiger Widersprüche wie Russells Antinomie ist. Der Weg, den Hilbert zur Realisierung dieses Ziels wählt, ist die Methode, die er selbst als axiomatisch bezeichnet. Da er es für kaum möglich hält, die logischen Grundbegriffe, die man für die Begründung der Arithmetik benutzt (solche wie den Begriff der Menge), ohne jegliche Erwähnung einiger arithmetischer Begriffe (wie des Begriffs der Zahl) zu verwenden, glaubt er, ein Erfolg auf diesem Gebiet dadurch zu erzielen, dass man die Gesetze der Logik und Arithmetik gleichzeitig entwickelt. Einen Gegenstand unseres Denkens bezeichnet Hilbert als ein Gedankending, das man auch durch ein Zeichen benennt. Der Aufbau der Theorie fängt für Hilbert mit der Betrachtung der so genannten *einfachen* Gedankendinge an. Er betrachtet zunächst zwei Gedankendinge als einfach, das Gedankending *eins*, durch das Zeichen „1“ bezeichnet, und das Gedankending *gleich*, das durch „=“ bezeichnet wird. Obwohl die Rede von den Gedankendingen ist und nicht von Zeichen, die für diese stehen, erfüllen die Zeichen in dieser Theorie die Rolle von Objekten, so dass wir von nun an über diese Objekte (über Zeichen) sprechen können, ohne uns um die Korrelate dieser Objekte (um die Gedankendinge) kümmern zu müssen. Nun kann man jedes der zwei einfachen Objekte sowohl mit sich selbst als auch mit dem jeweils anderen kombinieren. Diese Möglichkeit spricht nochmals dafür, dass die Objekte der Theorie Zeichen sind, die man beliebig oft reproduzieren kann. Zwei Kombinationen kann man hinsichtlich ihrer Gestalt vergleichen. Bei dem Vergleichen untersucht man, welches einfache Zeichen, wie oft und in welcher Reihenfolge in den zu vergleichenden Kombinationen vorkommt. Alle Kombinationen unterteilt man in zwei Klassen – Seiende und Nichtseiende. Jede Kombination gehört zu einer dieser Klassen, und eine Kombination, die ein Element einer Klasse ist, kann nicht zu der anderen gehören. Diese Unterteilung von Kombinationen kann man verschieden auffassen (z. B. als eine Unterteilung von Ausdrücken in die, die aus den Elementen des Alphabets einer Sprache wohlgebildete Ausdrücke dieser Sprache bilden, und in Zeichenfolgen, die der Sprache nicht angehören). Hilbert dient diese Unterteilung zunächst als Grund für die semantische Interpretation von Aussagen.

Parallel dazu werden von Hilbert Aussagen als weitere Objekte eingeführt, nämlich als logische Objekte. Als eine einfache Aussage a wird die Aussage über die Zugehörigkeit eines der oben erwähnten Objekte (eines der einfachen Objekte oder einer ihrer Kombinationen) zu einer der Klassen von Seienden oder Nichtseienden genommen. Aus einfachen Aussagen kann man mit Hilfe solcher logischen Operatoren wie Negation, Implikation und Disjunktion, sowie durch Quantifizierung, weitere Aussagen konstruieren. Sobald man sowohl einfache Objekte als auch ihre Kombinationen in eine gemeinsame Kategorie von Objekten einreiht, kann man für diese Objekte eine Relation (einen Begriff) definieren. In Hilberts Theorie ist das der Begriff *gleich*, und seine Definition wird durch zwei Axiome gegeben, deren Interpretation auf der Interpretation von Aussagen basiert. Axiome enthalten Variablen und Formen, welche jeweils für Objekte und für Aussagen über Objekte stehen. Für Hilbert sind Axiome auch Aussagen. Ein Axiom kann nämlich als

Prämisse einer „Folgerung aus dem Axiom“ auftreten, die aus dem Axiom durch Ersetzen der Variablen, die in dem Axiom vorkommen, durch einfache Objekte oder ihre Kombinationen gewonnen wird. Wir sehen also, dass Hilbert als eine Schlussregel seiner Theorie die Substitutionsregel benutzt. Die zweite Regel ist ein Analogon des Kettenschlusses. Diese Regel kann man, Hilberts Terminologie folgend, so formulieren: Ist eine Reihe der Folgerungen gegeben, so dass die Voraussetzungen der letzen Folgerung der Reihe mit den Behauptungen der voranstehenden Folgerungen zusammenfallen, dann ist die Aussage, deren Voraussetzung die Voraussetzungen der besagten voranstehenden Folgerungen, und die Behauptung – die Behauptung der letzten Folgerung ist, auch eine Folgerung (aus den Axiomen der Theorie). Das Wort „Folgerung“ wird von Hilbert dabei auf zweifache Weise gebraucht – einerseits für die Bezeichnung einer Implikation, – andererseits für die Bezeichnung eines Schlusses oder eher eines Theorems, das aus den Axiomen nach einer der genannten Regeln abgeleitet wird. Axiome selbst werden von Hilbert als Folgerungen, die keine Voraussetzungen haben, gedeutet und in der Klasse der Seienden zusammengefasst.

Zu den schon eingeführten Objekten fügt Hilbert noch drei weitere Objekte hinzu. Das sind die unendliche Menge (u), das Folgende (oder der Nachfolger) (f) und die begleitende Operation (f'). Die Relationen zwischen diesen Objekten und den Objekten, die wir schon betrachteten, werden durch drei weitere Axiome definiert. Alle diese drei Objekte können wir als Zeichen für bestimmte Operationen auf den schon eingeführten Objekten und ihren Kombinationen betrachten. Durch Hinzufügen des Objekts u links vor einem Objekt x bekommt man ein weiteres Objekt ux, das man als „ein Element der unendlichen Menge“ bezeichnet, durch Hinzufügen des Objekts f links vor einem Objekt bekommt man ein weiteres Objekt, das man als „Nachfolger dieses Objekts“ bezeichnet. Während der Operator f auf ein Element der unendlichen Menge ux angewandt wird, um das Gedankending zu beschreiben, das auf das fragliche Element der unendlichen Menge folgt, wird der Operator f' auf diejenigen Objekte angewandt, auf die man anschließend den Operator u anwendet. Eines der neu eingeführten Axiome legt insbesondere fest, dass die unendliche Menge u ein in Bezug auf die Operation f erstes Element enthält und dass dieses Element 1 ist.

Die nächste Frage, die Hilbert in Bezug auf Objekte seiner Theorie stellt, ist, ob irgendwelche Folgerungen aus den Axiomen der Theorie zu einem Widerspruch führen können. Wie diese Frage beantwortet wird, zeigt Hilbert am Beispiel eines der Axiome, nämlich des hier schon erwähnten Axioms, das besagt, dass es in der unendlichen Menge u kein Element gibt, dem das Element dieser Menge 1 folgt. Die Aufgabe besteht darin, dass man prüft, ob ein Objekt, das den restlichen Axiomen der Theorie entsprechend als eine Kombination der fünf der Theorie zugrundegelegten einfachen Objekte konstruiert ist, die Verneinung des fraglichen Axioms erfüllen kann. Hilbert nimmt an, dass dies möglich wäre. In einem solchen Fall entspräche aber das Objekt, welches die Verneinung des fraglichen Axioms erfüllt, nicht den restlichen Axiomen. Jedes Objekt, das diese erfüllt, ist so konstruiert, dass die Gleichungen, in denen es vorkommt, homogen sind. Das bedeutet, dass die beiden Objekte, die links und rechts von dem Gleichheitszeichen in einer Gleichung vorkommen, Kombinationen von gleicher Anzahl der einfachen Objekte sind. Auf das Objekt, das den Widerspruch zu dem fraglichen Axiom erfüllt, trifft das nicht zu. Das Axiomensystem, das Hilbert hier aufstellt, führt also zu keinem Widerspruch, und alle Objekte, die man aus diesen Axiomen gewinnt (auch die Aussagen), können in die Klasse der Seienden eingereiht werden. Die Klasse der Nichtseienden ist die Klasse solcher Objekte, welche die Axiome nicht erfüllen. Axiome der Theorie kann man also als Vorschriften betrachten, nach denen man Objekte in diese zwei Klassen einteilt. In Bezug auf diese Einteilung wird die „Richtigkeit" von Aussagen geprüft, die in der Theorie formuliert werden. Ist die Aussage richtig, dann kann man diese als ein Axiom einfügen, ohne dadurch einen Widerspruch zu erhalten. Hilbert skizziert auch den Beweis der Widerspruchsfreiheit des Mengenbegriffs. Diese Widerspruchsfreiheit wird insbesondere dadurch erreicht, dass der Begriff des Elements einer Menge als ein „Erzeugnis des Mengenbegriffs selbst erscheint" ([Hil05], 182). Wir werden sehen, dass Hilbert hier Ideen äußert, die im wesentlichen die konstruktiven Prinzipien des Aufbaus eines Kalküls (sowie seiner Interpretation) in der Logik charakterisieren.

Konstruktiv heißen Objekte, die entweder unmittelbar gegeben und repräsentiert sind, oder durch ein effektives Verfahren aus zuvor gebildeten Objekten aufgebaut sind. Die konstruktiven Objekte erster Art heißen atomare konstruktive Objekte. Sie werden durch die Liste ihrer Repräsentanten vorgegeben. Diese Liste heißt Alphabet. Das Alphabet gehört zu den Konventionen, die man mit der Sprache verbindet. Das Alphabet ist eine Sammlung von Objekten (Buchstaben oder Symbolen), die man in unbegrenzter Anzahl reproduzieren kann. Die andere Art von Sprachkonventionen bilden die Regeln, die zeigen, wie man aus den Elementen eines Alphabets bestimmte Kombinationen aufbauen kann, die auch Ausdrücke heißen. In der Logik benutzt man am häufigsten die Begriffe *Term* und *Formel*. Sie identifiziert man mit den konstruktiven Objekten, die man aus den Elementen des Alphabets bildet. Die Natur von konstruktiven Objekten spielt für den Aufbau des Kalküls eher eine geringe Rolle. Es wird von solchen Objekten verlangt, dass sie diskret und fest sind, so dass man ein jedes als Ganzes betrachten, es von den anderen Objekten unterscheiden oder mit diesen identifizieren kann. Wir sahen, dass schon Hilbert (indem er einfache Gedankendinge sowie ihre Kombinationen einführt) die Existenz von zwei Arten konstruktiver Objekte anerkennt.

Die Objekte, die man aus den Elementen eines Alphabets baut, werden mittels einer fundamentalen induktiven Definition eingeführt. Eine solche Definition enthält direkte und indirekte Punkte. Mittels direkter Punkte stellt man fest, was der zu konstruierende Gegenstand ist. Indirekte Punkte enthalten die Behauptung, dass nur diejenigen Gegenstände, die laut den direkten Punkten konstruiert werden, unter diese Definition fallen. Für gewöhnlich enthält eine solche Definition nur einen indirekten Punkt. Direkte Punkte der Definition kann man ihrerseits in Basispunkte und induktive Punkte unterteilen. Basispunkte zählen die Ausgangsobjekte auf. Die induktiven geben die Konstruktionsweise an, durch die man neue Objekte aus den schon konstruierten bildet.

Ein typisches Beispiel der induktiven Definition eines konstruktiven Objekts ist die folgende Definition. Wir gehen davon aus, dass das uns vorgegebene Alphabet A eines (formalen) Systems aus einem Element besteht, $A = \{1\}$. Nun wollen wir eine Ziffer definieren.

i. 1 ist eine Ziffer.

ii. Ist a eine Ziffer, dann ist $a1$ auch eine Ziffer.

iii. Ein Ausdruck dieses Systems ist dann und nur dann eine Ziffer, wenn er den Punkten i–ii entsprechend konstruiert ist.

Punkte i bis ii dieser Definition sind direkt, wobei i der Basispunkt ist, und ii – ein induktiver Punkt. Dieser Punkt gibt eine Operation an, mittels der man aus einer Ziffer eine andere Ziffer konstruieren kann. Jede Ziffer können wir als Vertreter einer natürlichen Zahl interpretieren.

Haben wir eine Menge von konstruktiven Objekten durch eine fundamentale induktive Definition eingeführt, können wir auf dieser Menge Prädikate und Funktionen definieren, die insbesondere in der Konstruktionsweise des Objekts ihre Rechtfertigung finden. Solche Objekte werden durch nicht-fundamentale induktive Definitionen eingeführt. Die fundamentale und die nicht-fundamentale Definition stimmen in der Struktur überein, der Unterschied ist rein funktional. Fundamentale Definitionen führen die Gegenstände der Betrachtung ein, nicht-fundamentale – Prädikate auf den schon konstruierten Objekten. Ist das System, das wir auf solche Weise aufbauen, axiomatisch, dann werden einige Prädikate der Objekte, die wir betrachten, durch Axiome angegeben.

Sowohl fundamentale als auch nicht-fundamentale induktive Definitionen rechtfertigen die Diskussionsweise, die auf der Methode der mathematischen Induktion basiert, und die für die logischen Kalküle üblich ist. Die Methode der mathematischen Induktion ist ein Schluss, der auf folgendem Axiom (oder Prinzip) basiert. Dieses Axiom drückt die Haupteigenschaft der Reihe der natürlichen Zahlen aus: jede nicht leere Menge von natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl. Das Axiom besagt Folgendes. Ist ein Satz S für eine natürliche Zahl m wahr (oft setzt man $m = 0$ oder $m = 1$), und folgt aus der Annahme, dass S für eine Zahl k wahr ist, wobei $k > m$, dass S auch für $n = k + 1$ wahr ist, dann ist S wahr für eine beliebige natürliche Zahl. Die Bedeutung dieses Prinzips für konstruktive Theorien in der Logik liegt insbesondere darin, dass die mathematische Induktion das Urbild aller Konstruktionen liefert, die auf einer endlichen Anzahl von Prozeduren basieren. Mittels solcher Prozeduren bekommt man Sätze oder Formen, deren Wahrheitswert (oder Menge der Wahrheitswerte) man durch eine endliche Anzahl von Tests feststellen kann.

Unter einem *Kalkül* auf dem System von konstruktiven Objekten versteht man ein System von Regeln, das erlaubt, auf diesen Objekten irgendwelche streng bestimmte Operationen durchzuführen.

Jeder Kalkül ist also ein syntaktisches System, das Ausdrücke einer gewissen, durch Definitionen vorgegebenen Art enthält. Diese sind keine beliebigen aus einer natürlichen Sprache entnommenen Wörter oder Sätze, obwohl ohne diese die Formulierung eines Kalküls und seine Interpretation kaum möglich ist. Die Ausdrücke des Kalküls sind konstruktive Objekte, was bedeutet, dass sie eine standardisierte Form haben, und entweder nach gewissen Regeln aufgebaut sind, oder als Ausgangsobjekte eingeführt wurden. Bei der Aufstellung eines Kalküls gibt man also erst ein Alphabet an, das Ausgangssymbole enthält. Mittels einer Regel gibt man eine oder mehrere konstruktive Operationen vor. Man kann eine solche Operation in Hinblick auf die Beschaffenheit ihres Ergebnisses auch als Operation der Konkatenation charakterisieren, die einen Ausdruck (darunter Satz oder Form) an einen anderen (rechts oder auch links davon) anknüpft. Die Regeln eines Kalküls kann man in zwei Arten unterteilen. Die erste Art bilden die konstruktiven Regeln. Sie legen fest, was ein Ausdruck ist, der aus den Elementen des Alphabets aufgebaut wird. Die zweite Art besteht aus den Regeln, welche die Beziehungen zwischen Ausdrücken bestimmen, u. a. wie man aus einem Ausdruck einen anderen ableiten kann. Alle Ausdrücke, die nach diesen Regeln aus den Ausgangsausdrücken des Kalküls ableitbar sind, heißen *beweisbar* in dem Kalkül. In Bezug auf eine Regel des Kalküls wird oft die Frage gestellt, ob diese ein *effektives Verfahren* zum Gewinnen eines Ausdrucks aus dem gegebenen Ausdruck des Kalküls bestimmt. Das kann man über eine Regel des Kalküls dann behaupten, wenn die Regel eine solche Reihenfolge der Schritte zum Gewinnen eines Ausdrucks des Kalküls aus einem schon vorgegebenen Ausdruck definiert, dass die Anzahl dieser Schritte endlich ist.

Einen auf beschriebene Weise aufgebauten Kalkül definiert man auch als Sprache. Eine solche Sprache ist eine Menge oder ein System wohlgebildeter Ausdrücke, das auch die Regeln der genannten beiden Arten enthält. Ein solches System nennt man auch „formales System“, „Kalkül“, „Formalismus“, „formaler Kalkül“, „nichtinterpretierter Kalkül“, „syntaktisches System“ oder „formale Sprache“. Ein solches System ist „zweistufig“ – es enthält einerseits die primitiven Elemente, aus denen man alle anderen Ausdrücke des Kalküls bildet, und andererseits zusammengesetzte aus den primitiven Elementen konstruierte Ausdrücke. Der Aufbau einer logischen

Theorie auf der Basis eines Kalküls besteht in der Beschreibung des Kalküls und seiner Interpretation. Das Verfahren der logischen Deduktion ist in einer solchen Theorie in der Form von ausdrücklich formulierten Regeln der oben beschriebenen zweiten Art (im Gegensatz zu konstruktiven Regeln auch Regeln der Rekonstruktion genannt) vorgegeben. In diesem Zusammenhang entsteht die Frage nach der Willkürlichkeit der semantischen Interpretation eines Kalküls, und anschließend die Frage, inwiefern Logik konventionell ist. Carnap widmete sich 1939 im Buch *Foundations of Logic and Mathematics* (*Grundlagen der Logik und Mathematik*) dieser Thematik, indem er danach fragte, ob die Regeln logischer Deduktion willkürlich gewählt werden können und ob es tatsächlich eine Unterscheidung zwischen objektiv richtigen und objektiv falschen logischen Systemen gibt ([Car73], 40–42). Carnap betrachtet eine formale logische Sprache (einen Kalkül also) und stellt fest, dass es prinzipiell zwei Methoden gibt, eine solche Sprache aufzubauen. Man kann einerseits beliebige Regeln wählen und dann ein semantisches System hinzufügen, welches das System solcher Regeln interpretiert. In diesem Fall ist man bei der Auswahl der Regeln frei. Ist dann das System solcher Regeln widerspruchsfrei, dann ist eine wahre Interpretation des Kalküls möglich. Man kann aber einen logischen Kalkül auch so konstruieren, dass man die Prinzipien der logischen Deduktion (die Regeln des Kalküls) von einem gegebenen semantischen System ausgehend wählt. In diesem Fall ist man bei der Auswahl der Deduktionsregeln weniger frei, weil man schon von einer Bedeutung ausgeht, die man einerseits den Variablen und Konstanten und andererseits den logischen Funktoren (z. B. Implikation und Negation) zuordnet. In einem solchen Fall versteht man unter der logischen Sprache eine Menge wohlgebildeter interpretierter Ausdrücke, oder eine solche Menge zusammen mit bestimmten Verfahren logischer Deduktion. Eine derartige Sprache nennt man in der Logik „formalisierte Sprache“. Eine solche Sprache ist nach Carnap jedoch auch nicht frei von jeglichen Konventionen. „Die Logik oder die Ableitungsregeln (in unserer Terminologie die syntaktischen Übergangsregeln) können willkürlich gewählt werden und sind daher konventionell, wenn man sie zur Grundlage des Aufbaus des Sprachsystems macht, und die Interpretation des Systems später hinzufügt. Andererseits ist ein Logiksystem nichts Willkürliches, sondern entweder wahr oder falsch, wenn für die logischen

Zeichen schon von vornherein eine Interpretation gegeben ist. Aber sogar hier sind Konventionen von grundlegender Wichtigkeit; denn die Basis, auf der man die Logik aufbaut, nämlich die Interpretation der logischen Zeichen (z. B. durch Bestimmung der Wahrheitsbedingungen) kann frei gewählt werden". Die konventionellen Komponenten im Aufbau eines logischen Systems sollte man nach Carnaps Meinung beachten, um vorurteilsfrei verschiedene neuere logische Systeme zu untersuchen.

3.2 Aussagenkalkül P_1

Als Beispiel eines aussagenlogischen Kalküls betrachten wir den Aussagenkalkül P_1, der von A. Church (1956) dargestellt wurde ([Chu56]). Churchs Formulierung basiert auf den Ideen von Quine (1938) und Wajsberg (1939) und setzt die Anwendung von Kalmars Methode (1935) für Beweise einiger Metatheoreme des Kalküls voraus. Wir werden eine eigene Numerierung der Axiome, Regeln und Theoreme angeben, die von der Churchs abweicht. Unsere Darlegung des Kalküls wird außerdem in einigen Teilen nicht so detailliert sein. Dafür betrachten wir einige Themen, die für Churchs Darstellung von sekundärer Bedeutung waren, die aber für diejenigen wichtig sind, die sich zum ersten Mal mit einem aussagenlogischen Kalkül auseinandersetzen.

3.2.1 Basis des Kalküls P_1

Das Alphabet des Kalküls P_1 (im weiteren auch „der Kalkül“ genannt) besteht aus folgenden primitiven Symbolen.

Erstens enthält es drei uneigentliche Symbole – linke und rechte Klammer und Implikationszeichen:

$$(\quad) \quad \supset$$

Zweitens enthält das Alphabet des P_1 eine primitive Konstante f.

Der dritte Teil des Alphabets des P_1 ist eine unendliche Liste von Variablen

$$p \; q \; r \; s \; p_1 \; q_1 \; r_1 \; s_1 \; p_2 \; q_2 \; \ldots$$

Die Reihenfolge der Variablen in der Liste heißt die alphabetische Reihenfolge von Variablen.

Die primitive Konstante f und die Variablen sind im Gegensatz zu den uneigentlichen eigentliche Symbole des Kalküls.

Die konstruktive Regel des Kalküls P_1, nach der man seine Ausdrücke (Formeln) aus Elementen des Alphabets aufbaut, ist durch die folgende Vorschrift gegeben.

Definition einer *Formel des Kalküls* P_1

i. Die allein stehende primitive Konstante f ist eine Formel des Kalküls P_1.

ii. Jede allein stehende Variable ist eine Formel des Kalküls P_1.

iii. Sind Γ und Δ Formeln des Kalküls P_1, dann ist $(\Gamma \supset \Delta)$ eine Formel des Kalküls P_1.

iv. Eine Formel ist dann und nur dann eine Formel des Kalküls P_1, wenn sie den Punkten i–iii dieser Definition entsprechend konstruiert ist.

Diese Definition, die die Konstruktionsweise der Objekte von P_1 angibt, ermöglicht es, für eine endliche Zeichenfolge beliebiger Länge festzustellen, ob diese eine Formel des Kalküls ist. Klar ist, dass eine Formel des Kalküls, die mehr als ein Zeichen enthält, mit einer linken Klammer beginnt, und mit einer rechten Klammer endet. Als Beispiel nehmen wir die Zeichenfolge

$$(((p \supset (q \supset s)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset s))) \supset (p \supset p))$$

Nun durchlaufen wir die Klammern. Wir ordnen jeder linken Klammer die Zahl $+1$ und jeder rechten die Zahl -1 zu und addieren die Zahlen. Sobald die Summe 1 erreicht, hören wir mit dem Addieren auf. Ist die Klammer, an der wir aufhörten, zu addieren, eine linke Klammer, der ein eigentliches Symbol folgt, oder eine rechte Klammer, die vor einem Implikationszeichen steht, dann ist das Implikationszeichen, das dem eigentlichen Symbol rechts von der linken Klammer oder der rechten Klammer folgt, das *Hauptimplikationszeichen* der Formel, wenn die gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls ist. Der Teil der Formel links von dem Hauptimplikationszeichen heißt das *Antezedens* (auch Implikans, Vorderglied der Implikation), und der Teil der Formel rechts von ihm das *Konsequens* (Implikat oder Hinterglied der Implikation). Die gegebene Zeichenfolge ist dann und nur dann eine Formel des Kalküls, wenn beide durch die Bestimmung des Hauptimplikationszeichens festgestellten Teile Formeln des Kalküls sind. Die Feststellung, ob die gegebene Folge eine Formel unseres Kalküls ist, ist somit auf das Problem reduziert, ob die Teile der Folge, die wir durch Auffinden des jeweiligen Hauptimplikationszeichens bestimmen, Formeln des

Kalküls sind. Das Verfahren wird wiederholt, bis man in einer endlichen Anzahl der Schritte eine Antwort erreicht. Offenbar gilt, dass, wenn zumindest einer der besagten Teile der gegebenen Zeichenfolge keine Formel des Kalküls ist, auch die ganze Zeichenfolge keine Formel des Kalküls ist. In unserem Beispiel ist die 13-te Klammer diejenige, die vor dem Hauptimplikationszeichen vorkommt, da hier die Summe 1 durch Addition von +1 und −1 erreicht wird. Hat man 1 erreicht, lässt man die äußeren Klammern (die erste linke und die letzte rechte) sowie das Hauptimplikationszeichen aus. Jetzt können wir also zwei Teilfolgen von Zeichen analysieren:

$$((p \supset (q \supset s)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset s))) \text{ und } (p \supset p)$$

In der letzten dieser Zeichenfolgen gewinnen wir 1 schon während wir der ersten linken Klammer die Zahl +1 zuordnen. Diese Klammer wird von einem eigentlichen Symbol gefolgt, nämlich von einer Variablen. Das Implikationszeichen, vor dem diese Variable steht, ist das Hauptimplikationszeichen der gegebenen Zeichenfolge. Da das Antezedens sowie das Konsequens dieser Implikation nach der Definition (Punkt i) Formeln des Kalküls sind, ist die ganze Zeichenfolge $(p \supset p)$ auch eine Formel des Kalküls. Die zweite Formel zerlegen wir zunächst in zwei Teile:

$$(p \supset (q \supset s)) \text{ und } ((p \supset q) \supset (p \supset s))$$

Jede von diesen Formeln zerlegen wir weiter und gewinnen anschließend folgende Ausdrücke, die alle Formeln des Kalküls sind:

$$p,\ (q \supset s),\ (p \supset q) \text{ und } (p \supset s).$$

Ist die Anzahl der Symbole in einer Zeichenfolge 0, dann handelt es sich nicht um eine Formel des Kalküls. Eine Formel aus nur einem Symbol ist genau dann eine Formel des Kalküls, wenn sie aus einem eigentlichen Symbol besteht.

Es besteht die Möglichkeit, dass eine vorgegebene Zeichenfolge irgendwelche Symbole enthält, die im Alphabet von P_1 gar nicht vorkommen (solche wie (x) oder $(\exists x)$), aber diese Möglichkeit wird von unserer Vorgehensweise berücksichtigt, so dass es unnötig ist, die Zeichenfolge von vornherein nach „unerlaubten“ Symbolen zu untersuchen.

Um Schlussregeln des Kalküls zu definieren, führen wir noch eine Bezeichnung ein, die allerdings nicht zu der Sprache (der Syntax von P_1), die wir konstruieren, gehört, sondern ein Element der Metasprache ist, das wir als eine syntaktische Konvention einführen. Wir führen die Bezeichnung „$S\,|$“ für die Operation der Substitution ein. Durch „$S^b_B A|$“ bezeichnet man die Formel, die man aus der Formel A erhält, wenn man für jedes Vorkommen der Variablen b in A die Formel B substituiert.

In P_1 gibt es zwei primitive Schlussregeln.

R1. Aus $(A \supset B)$ und A folgt B.

R2. Ist b eine Variable in A, und B eine Formel des Kalküls, dann folgt aus A $S^b_B A|$.

Die erste dieser Regeln ist bekannt als *modus ponens*. Die Formel $(A \supset B)$ nennt man die größere Prämisse, A – die kleinere Prämisse. Das Antezedens der größeren Prämisse muss mit der kleineren Prämisse identisch sein. Nur unter dieser Bedingung kann die Regel angewandt werden.

Die Axiome von P_1 sind:

A1. $(p \supset (q \supset p))$

A2. $((s \supset (p \supset q)) \supset ((s \supset p) \supset (s \supset q)))$

A3. $(((p \supset f) \supset f) \supset p)$

Das erste Axiom nennt man auch das Gesetz der Behauptung des Konsequens. Russell bezeichnet es als das Prinzip der Simplifikation. Dieses Axiom kann man als die Behauptung lesen „eine wahre Aussage wird von einer beliebigen Aussage impliziert“. Das zweite Axiom ist das Selbstdistributivgesetz der (materialen) Implikation. Da jedes Vorkommen einer Variablen in einer Formel des Kalküls frei ist, kann man im Weiteren von dem Gebrauch des Wortes „materiale“ in Bezug auf Implikation absehen, denn in unserem Kalkül handelt es sich gar nicht um die formale Implikation. Das dritte Axiom ist das Gesetz der doppelten Negation.

Ein *Beweis* in P_1 ist eine endliche Folge, die aus einer oder mehreren Formeln des Kalküls besteht, wobei jede dieser Formeln eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Sie ist eins der drei Axiome des Kalküls.
2. Sie folgt aus zwei in der Folge schon vorkommenden Formeln nach der Regel *modus ponens* (R1).
3. Sie folgt aus einer in der Folge schon vorkommenden Formel des Kalküls durch Substitution (nach R2).

Der Beweis ist ein Beweis der letzten Formel dieser Folge. Eine Formel des Kalküls heißt ein *Theorem*, wenn sie einen Beweis hat.

Als Beispiel betrachten wir den Beweis des Theorems

T1. $(p \supset p)$

Das ist das Identitätsgesetz oder das Gesetz der Reflexivität der Implikation. Der Beweis wird als eine Folge von Zeilen präsentiert. Dabei wird jede Zeile numeriert. In jeder Zeile steht eine Formel des Kalküls. Rechts von jeder dieser Formeln wird ein Hinweis darauf angegeben, wie man die jeweilige Formel gewinnt. Falls man die Forlmel durch die Anwendung einer der Regeln des Kalküls erhält, enthält eine solche Angabe neben der Bezeichnung für die Regel die Nummer (oder die Nummern) einer (oder mehrerer) Zeile(n). Jede Nummer repräsentiert die Formel, die in der entsprechenden Zeile steht und die als (eine der) Prämisse(n) der fraglichen Regel auftritt. Der Beweis des T1 besteht aus 9 Formeln (Zeilen), von denen die letzte das Theorem selbst ist.

1.	$((s \supset (p \supset q)) \supset ((s \supset p) \supset (s \supset q)))$	A2
2.	$((s \supset (r \supset q)) \supset ((s \supset r) \supset (s \supset q)))$	$S^{p}_{r}(1)\vert$
3.	$((s \supset (r \supset p)) \supset ((s \supset r) \supset (s \supset p)))$	$S^{q}_{p}(2)\vert$
4.	$((p \supset (r \supset p)) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset p)))$	$S^{s}_{p}(3)\vert$
5.	$((p \supset (q \supset p)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset p)))$	$S^{r}_{q}(4)\vert$
6.	$(p \supset (q \supset p))$	A1
7.	$((p \supset q) \supset (p \supset p))$	R1 ((5),(6))
8.	$((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$	$S^{q}_{(q \supset p)}(7)\vert$
9.	$(p \supset p)$	R1 ((8),(6))

Jedes Axiom des Kalküls ist ein Theorem. Der Beweis eines solchen Theorems besteht nämlich aus einer einzigen Zeile, in der das

Axiom selbst aufgeschrieben wird. Ein derartiger Beweis entspricht der Definition des Beweises in P_1.

3.2.2 Semantische Interpretation des Kalküls

Bei der semantischen Interpretation des Kalküls P_1 geht man davon aus, dass sich alle Formeln des Kalküls der oben angesprochenen Unterteilung der syntaktischen Kategorien entsprechend in drei Gruppen einteilen lassen – Konstanten, Variablen und Formen. Den Ausdrücken jeder dieser Kategorien entspricht eine besondere semantische Beziehung. Die Konstante bezeichnet das ihr zugesprochene Objekt, für den aussagenlogischen Kalkül ist das einer der Wahrheitswerte. Die Variable kann als ihren Wert einen der beiden Wahrheitswerte annehmen, sie bezeichnet also im Unterschied zu der Konstante keinen bestimmten Wahrheitswert. Der Form entspricht ein System der Wahrheitswerte, jeder von denen durch die Werte der Bestandteile der Form definiert ist, die selbst einen bestimmten Wahrheitswert bezeichnen oder einen der Wahrheitswerte annehmen. Dem Kalkül P_1 wird folgende semantische Interpretation gegeben.

1. Die Konstante f bezeichnet den Wahrheitswert *falsch*.
2. Alle Variablen des Kalküls sind Variablen, die einen der Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* als ihre Werte annehmen.
3. Die Form, die aus einer allein stehenden Variablen besteht, hat den Wert *wahr*, falls die Variable den Wahrheitswert *wahr* annimmt, und *falsch*, falls die Variable den Wahrheitswert *falsch* annimmt.
4. Seien A und B Konstanten. Dann bezeichnet $(A \supset B)$ den Wahrheitswert *wahr*, wenn B den Wahrheitswert *wahr* bezeichnet oder A – den Wahrheitswert *falsch*. Sonst bezeichnet $(A \supset B)$ den Wahrheitswert *falsch*.
5. Sei A eine Form und B eine Konstante. Bezeichnet B den Wahrheitswert *wahr*, dann nimmt $(A \supset B)$ für einen beliebigen Wahrheitswert von A den Wert *wahr* an. Bezeichnet B den Wahrheitswert *falsch*, dann nimmt $(A \supset B)$ den Wert *wahr* an, wenn A den Wahrheitswert *falsch* annimmt, sonst nimmt $(A \supset B)$ den Wert *falsch* an.

6. Sei nun A eine Konstante und B eine Form. Bezeichnet A den Wahrheitswert *falsch*, dann nimmt $(A \supset B)$ den Wert *wahr* für einen beliebigen Wert von B an. Bezeichnet A den Wahrheitswert *wahr*, dann hat$(A \supset B)$ denselben Wahrheitswert, den B hat.
7. Sind A und B beide Formen, dann nimmt $(A \supset B)$ den Wert *wahr* an, wenn A den Wahrheitswert *falsch* oder B den Wahrheitswert *wahr* hat, sonst nimmt $(A \supset B)$ den Wert *falsch* an.

3.2.3 Definitionen

Zunächst treffen wir die Vereinbarung, dass wir im Folgenden die äußeren Klammern auslassen werden. Diese Konvention betrifft nicht, wie bei Church, alle übrigen Klammern.

Als Definitionszeichen benutzen wir das Zeichen „$\rightarrow$“, das wir als „steht für“ lesen. Das *definiendum* (das, was definiert wird) steht immer links vom Pfeil, das *definiens* – immer rechts davon. Das Zeichen „$\rightarrow$“ gehört nicht zu der Syntax des Kalküls, sondern ist wie das Zeichen für Substitution eine syntaktische Konvention der Metasprache. Die meisten Definitionen geben wir als Definitionsschemata an, die für eine beliebige Anzahl von Definitionen stehen. Die Symbole, die in folgenden Definitionsschemata vorkommen (A und B) gehören wiederum zu Metasprache und stehen für beliebige Formeln des Kalküls. Die Definitionen und Definitionsschemata sind folgende.

D1. $t \rightarrow f \supset f$

D2. $\sim A \rightarrow A \supset f$

D3. $A \not\subset B \rightarrow \sim(B \supset A)$

D4. $A \vee B \rightarrow (A \supset B) \supset B$

D5. $A \cdot B \rightarrow (A \not\subset B) \not\subset B$

D6. $A \equiv B \rightarrow (A \supset B) \cdot (B \supset A)$

D7. $A \not\equiv B \rightarrow (A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)$

D8. $A \subset B \rightarrow B \supset A$

D9. $A \not\supset B \rightarrow B \not\subset A$

D10. $A \bar{\vee} B \rightarrow \sim A \cdot \sim B$

D11. $A|B \rightarrow {\sim}A \vee {\sim}B$

Offenbar bezeichnet die Konstante t, die durch Definition D1 eingeführt wird, den Wahrheitswert *wahr*. Die übrigen Definitionsschemata stellen die Verbindungen zwischen verschiedenen aussagenlogischen Funktoren fest, und erlauben, für die Form, die einen der Funktoren enthält, einen anderen Ausdruck zu finden, der z. B. kürzer sein könnte. Die Semantik der von der Implikation verschiedenen logischen Funktoren ist durch diese Definitionen gegeben und entspricht den Definitionen, die im Kapitel 1.2 eingeführt wurden.

3.2.4 Einige Theoreme des Kalküls

Als syntaktische Bezeichnung dafür, dass eine Formel ein Theorem ist, benutzen wir das Behauptungszeichen „$\vdash$".

Als ein Metatheorem des Kalküls formulieren wir folgende Behauptung, die auch als abgeleitete Schlussregel benutzt wird.

MT1. Wenn $\vdash A$, dann $\vdash S^{b_1\, b_2\, \ldots\, b_n}_{B_1\, B_2 \ldots B_n} A|$.

Das Metatheorem kann man dadurch beweisen, dass man das Resultat der gleichzeitigen Substitution in A als Ergebnis der sukzessiven Substitution in A betrachtet. Bei einer solchen Substitution werden die Variablen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zunächst durch die von ihnen verschiedenen Variablen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ersetzt, von denen keine in den Formeln $B_1, B_2, \ldots, B_n, A$ vorkommt. Da alle Formeln des Kalküls endlich sind, lässt sich bestimmt in der Liste der Variablen des Kalküls, die in ihrer alphabetischen Reihenfolge gegeben ist, eine solche Teilliste von n verschiedenen Variablen finden. Die Variablen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ werden zunächst sukzessive in ihrer alphabetischen Reihenfolge eingesetzt, und anschließend sukzessive durch die Formeln $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ersetzt.

Weitere Theoreme des Kalküls sind folgende.

T2. $f \supset p$

T3. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$

T3 ist das Gesetz der Verneinung des Antezedens, das man – unter der Berücksichtigung der Definition D2 – auch in der Form ${\sim}p \supset (p \supset q)$ schreiben kann.

T4. $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

Zusammen mit dem Theorem T5 ist diese Behauptung auch als Prinzip des Syllogismus bekannt. Wir beweisen nun dieses Theorem. Der Beweis, den wir jetzt geben, ist in erster Linie als ein Beispiel wichtig. Wir werden später diesen Beweis mit einer anderen Variante des Beweises dieses Theorems vergleichen, und das wird uns u. a. die Bedeutung des Deduktionstheorems zeigen.

1. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ $\qquad S^{s}_{p}\,{}^{p}_{q}\,{}^{q}_{r}$ A2|

2. $((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$
$\supset ((q \supset r) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))))$
$\qquad S^{p}_{(p\supset(q\supset r))\supset((p\supset q)\supset(p\supset r))}\,{}^{q}_{q\supset r}$ A1|

3. $(q \supset r) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$ $\qquad$ R1 ((2),(1))

4. $((q \supset r) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))))$
$\supset (((q \supset r) \supset (p \supset (q \supset r)))$
$\supset ((q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))))$
$\qquad S^{s}_{q\supset r}\,{}^{p}_{p\supset(q\supset r)}\,{}^{q}_{(p\supset q)\supset(p\supset r)}$ A2|

5. $((q \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))) \supset ((q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$
R1 ((4),(3))

6. $(q \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$ $\qquad S^{p}_{q\supset r}\,{}^{q}_{p}$ A1|

7. $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ $\qquad$ R1 ((5),(6))

Die hier angegebene Folge von Formeln enthält nicht alle Zeilen des Beweises. Vor der ersten Zeile sollte beispielsweise das Axiom A2 aufgeschrieben werden. Da aber in der fraglichen Zeile durch den Hinweis darauf, wie die Formel gewonnen wird, das Axiom als die Prämisse der Regel R2 schon angedeutet ist, verzichten wir auf die vollständige Darlegung des Beweises.

T5. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ Das Gesetz der Transitivität der Implikation.

Dieses Theorem kann man von Theorem T4 ausgehend beweisen, indem man das Selbstdistributivgesetz der Implikation auf dieses anwendet.

1. $((q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$
$\supset (((q \supset r) \supset (p \supset q)) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)))$
$S^{s}_{q \supset r}\ {}^{p}_{p \supset q}\ {}^{q}_{p \supset r}$ A2|

2. $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ T4

3. $((q \supset r) \supset (p \supset q)) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ R1 ((1),(2))

4. $(((q \supset r) \supset (p \supset q)) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)))$
$\supset (((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset q)))$
$\supset ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))))$
$S^{q}_{(q \supset r) \supset (p \supset q)}\ {}^{p}_{p \supset q}\ {}^{r}_{(q \supset r) \supset (p \supset r)}$ T4|

5. $((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset q)))$
$\supset ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)))$ R1 ((4),(3))

6. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset q))$ $S^{p}_{p \supset q}\ {}^{q}_{q \supset r}$ A1|

7. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ R1 ((5),(6))

T6. $((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)$

T7. $((p \supset q) \supset p) \supset p$ Peirces Gesetz

T8. $p \supset ((q \supset f) \supset ((p \supset q) \supset f))$

T9. $((p \supset f) \supset r) \supset ((p \supset r) \supset r)$

T10. $p \supset ((p \supset q) \supset q)$ Das Gesetz der Behauptung

T11. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset r)$

T12. $((p \supset q) \supset r) \supset ((p \supset r) \supset r)$

T13. $((p \supset r) \supset r) \supset ((p \supset f) \supset r)$

T14. $((p \supset q) \supset (r_1 \supset s)) \supset ((p \supset (r_2 \supset s)) \supset (r_1 \supset (r_2 \supset s)))$

3.2.5 Deduktionstheorem

Versucht man, die angegebenen Theoreme selbst an Hand der zu Verfügung stehenden Mittel zu beweisen, sieht man, dass die Suche nach einem Beweis keine triviale Angelegenheit ist und durchaus ohne Erfolg verlaufen kann. Darum versucht man, den Beweis eines Theorems der natürlichen Argumentationsweise näher zu bringen, indem man auch das Aufstellen von Hypothesen zulässt. Dies führt uns zur Erweiterung des Beweisbegriffs, die auch das so genannte Deduktionstheorem einschließt. Die Idee des Theorems wurde von Herbrand 1928 formuliert und 1930 bewiesen. Kleene weist in diesem Zusammenhang auf die Behauptung Tarskis hin, dass das Theorem von Tarski schon 1921 benutzt wurde ([Kle67], §10).

Zunächst führen wir einige zusätzliche Definitionen ein.

Eine *Variante einer Formel* A des Kalküls P_1 ist eine Formel, die aus A durch eine solche Ersetzung von Variablen gewonnen wird, bei der zwei verschiedene Vorkommen ein und derselben Variablen in A nach der Ersetzung Vorkommen derselben Variablen bleiben, und Vorkommen von zwei verschiedenen Variablen auch nach der Ersetzung Vorkommen von verschiedenen Variablen sind.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verschiedene Variablen, die in A vorkommen. Seien ferner $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verschiedene Variablen, so dass ihre Liste keine Variable enthält, die in A (oder in der Liste der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$) vorkommt. Dann ist die Formel

$$S^{a_1\, a_2 \ldots a_n}_{b_1\, b_2 \ldots b_n} A|$$

eine Variante der Formel A.

Ist A eine Variante der Formel B, dann ist B eine Variante der Formel A. Jede Variante einer Variante von A ist selbst eine Variante von A. Jede Formel des Kalküls P_1 ist auch eine Variante von sich selbst. Jede Variante eines Theorems ist auch ein Theorem.

Eine endliche Folge von Formeln des Kalküls P_1 heißt ein *varianter Beweis*, wenn jede Formel dieser Folge eine Variante eines Axioms ist, oder unmittelbar aus in der Folge schon vorkommenden Formeln (oder einer in der Folge schon vorkommenden Formel) des Kalküls nach einer der Schlussregeln folgt. Der variante Beweis ist der Beweis seiner letzten Formel, und die letzte Formel des varianten Beweises ist ein Theorem. Der Grund dafür besteht darin, dass jede Variante eines Axioms auch ein Theorem ist.

Eine endliche Folge von Formeln $B_1, B_2, \ldots, B_m$ des Kalküls heißt *Beweis aus den Hypothesen* $H_1, H_2, \ldots, H_n$, wenn für jedes k, wobei $k = 1, \ldots, m$, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

1. B_k ist eine der Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_n$.
2. B_k ist eine Variante eines Axioms.
3. B_k ist nach der Regel R1 aus der größeren Prämisse B_j und der kleineren Prämisse B_i gewonnen, wobei $i, j < k$.
4. B_k ist durch Substitution in die Prämisse B_j gewonnen, wobei $j < k$ und die zu ersetzende Variable in den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nicht vorkommt.

Eine solche endliche Folge von Formeln, in der die Formel B_m als letzte vorkommt, heißt ein Beweis der Formel B_m aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Einen solchen Beweis bezeichnen wir folgendermaßen:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B_m$$

Diese Behauptung lesen wir: „Es gibt einen Beweis der Formel B_m aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$“. Klar ist, dass ein varianter Beweis einer Formel ein Spezialfall des Beweises aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ist, nämlich ein solcher Fall, wenn n 0 ist, oder mit anderen Worten wenn die Liste von Hypothesen leer ist. Das Deduktionstheorem, das wir nun formulieren, ist ein Metatheorem des Kalküls.

MT2. Wenn $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$, dann $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash H_n \supset B$.

Der Beweis des Deduktionstheorems besteht in der Begründung der Umformung des Beweises

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B,$$

den man auch als *Hilfsbeweis* definieren kann, in den Beweis

$$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash H_n \supset B,$$

den wir als *resultierenden Beweis* bezeichnen.

Der Hilfsbeweis unterscheidet sich vom resultierenden Beweis dadurch, dass im Hilfsbeweis eine Formel mit der Begründung H_n vorkommen darf, was bedeutet, dass H_n in diesem Beweis als eine Hypothese fungieren kann. Außerdem sind die letzten Formeln der beiden Beweise verschieden.

Sei nun ein Beweis der Formel B aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ eine endliche Folge der Formeln $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Klar ist, dass die Formel B in diesem Fall die Formel B_m dieser Folge ist. Nach der Definition des Beweises aus Hypothesen gilt für eine beliebige Formel B_k, wobei $k = 1, 2, \ldots, m$, Folgendes.

Fall 1. B_k ist H_n.

Fall 2. B_k ist eine der Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$, wir bezeichnen sie im Weiteren als H_r.

Fall 3. B_k ist eine Variante eines Axioms.

Fall 4. B_k folgt nach R1 aus der größeren Prämisse B_j und der kleineren Prämisse B_i, wobei $i, j < k$. B_j hat also die Form $B_i \supset B_k$.

Fall 5. B_k folgt aus B_j durch Substitution in B_j, wobei $j < k$ und die zu ersetzende Variable in den Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nicht vorkommt.

Nun konstruieren wir eine endliche Folge von Formeln $H_n \supset B_1$, $H_n \supset B_2$, …, $H_n \supset B_m$, indem wir „$H_n \supset$“ vor jeder Formel des Hilfsbeweises schreiben. Diese Folge ist immer noch kein resultierender Beweis, aber wir zeigen, dass es möglich ist, in diese Folge eine endliche Anzahl zusätzlicher Formeln einzufügen, so dass wir anschließend den resultierenden Beweis bekommen. Der Beweis wird durch Induktion (über k) geführt.

Nehmen wir an, dass für ein $k, 1 < k < m$, vor den Formeln, die in der besagten Folge vor der Formel $H_n \supset B_k$ geschrieben sind, schon alle zusätzlichen Formeln eingefügt wurden. Wir betrachten jetzt alle angegebenen 5 Fälle hintereinander, um festzustellen, welche Formeln wir vor $H_n \supset B_k$ einfügen sollen, um diese Formel als die letzte Formel der Folge zu bekommen.

Fall 1. $H_n \supset B_k$ ist in diesem Fall die Formel $H_n \supset H_n$. Man fügt einen varianten Beweis des Theorems T1 ein, der aus 9

Zeilen besteht, und mit Hilfe der Substitutionsregel erhält man das gewünschte Ergebnis.

Fall 2. In diesem Fall gilt, dass $H_r \supset (H_n \supset B_k)$ mit der Formel $H_r \supset (H_n \supset H_r)$ zusammenfällt. Aus einer Variante des Axioms A1 bekommt man durch Substitution (maximal in zwei Schritten) die Formel $H_r \supset (H_n \supset H_r)$. Nun ist H_r eine Hypothese, die man auf jedem Schritt (in jeder Zeile) des Beweises schreiben kann. Aus den Formeln $H_r \supset (H_n \supset H_r)$ und H_r bekommt man anschließend nach der Regel R1 (*modus ponens*) den gewünschten Schluss $H_n \supset H_r$, dessen Beweis also höchstens 5 Zeilen beträgt.

Fall 3. Wie im Fall 2 fügt man vor der Formel $H_n \supset B_k$ einen (varianten) Beweis der Formel $B_k \supset (H_n \supset B_k)$ ein, aus der und der Formel B_k man nach *modus ponens* anschließend $H_n \supset B_k$ folgert.

Fall 4. Nach der Induktionsannahme des Beweises sind die Formeln $H_n \supset B_j$ und $H_n \supset B_i$ schon früher bewiesene Formeln des Kalküls. $H_n \supset B_j$ ist aber nichts anderes als die Formel $H_n \supset (B_i \supset B_k)$. Auf diese Formel wenden wir das Selbstdistributivgesetz an, indem wir die Substitutionsregel auf eine Variante des Axioms A2 anwenden, und somit (höchstens in 4 Schritten) den Beweis der Formel

$$(H_n \supset (B_i \supset B_k)) \supset ((H_n \supset B_i) \supset (H_n \supset B_k))$$

erhalten. Aus dieser Formel und der Formel $H_n \supset B_j$ bekommen wir nach *modus ponens* die Formel

$$(H_n \supset B_i) \supset (H_n \supset B_k),$$

auf die und auf die Formel $H_n \supset B_i$ (die nach der Annahme schon bewiesen ist) wir wiederum *modus ponens* anwenden können. Dadurch bekommen wir schließlich den Beweis der Formel $H_n \supset B_k$, nach dem wir suchten.

Fall 5. Wenn die zu ersetzende Variable nicht in $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vorkommt, bekommt man die Formel $H_n \supset B_k$ durch Substitution der entsprechenden Variablen in die Formel

$H_n \supset B_j$, es werden also keine zusätzlichen Formeln eingefügt.

Warum im letzten Fall die besagte Bedingung wichtig ist, zeigt ein Beispiel. Sei H_n die Formel $(q \supset f) \supset f$. Substituiert man für q die Formel $q \supset f$, gewinnt man somit die Behauptung $((q \supset f) \supset f) \supset f$, die Formel also, die H_n verneint. Es gilt also nicht, dass

$$(q \supset f) \supset f \vdash ((q \supset f) \supset f) \supset f.$$

Behaupten wir nämlich (im Hinblick auf das Deduktionstheorem), dass man die Implikation

$$((q \supset f) \supset f) \supset (((q \supset f) \supset f) \supset f)$$

beweisen kann, dann kann man eine falsche Behauptung beweisen, wenn man von der Annahme ausgeht, dass das Antezedens dieser Implikation wahr ist. Warum eine solche Möglichkeit mit der semantischen Interpretation des Kalküls unvereinbar ist, wird aus dem nächsten Abschnitt dieses Kapitels ersichtlich.

Für den Fall, dass die Anzahl der Hypothesen 1 ist, gilt folgendes.

Korollar: Wenn $A \vdash B$, dann $\vdash (A \supset B)$

Einige weitere Metatheoreme sind:

MT3. Wenn $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$, dann $C_1, C_2, \ldots, C_r, H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$.

MT4. Wenn $\vdash B$, dann $C_1, C_2, \ldots, C_r \vdash B$.

MT5. Wenn jede Formel des Kalküls, die zumindest einmal in der Liste der Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vorkommt, mindestens einmal auch in der Liste der Formeln $C_1, C_2, \ldots, C_r$ vorkommt, und $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$, dann $C_1, C_2, \ldots, C_r \vdash B$.

Die Bedeutung des Deduktionstheorems für den Kalkül besteht in erster Linie darin, dass man es als abgeleitete Schlussregel benutzen kann. Durch Einführung von Hypothesen wird der Beweis eines Theorems erleichtert, und die Suche nach einem solchen vereinfacht. Als Beispiel betrachten wir den Beweis des Theorems T4.

1. $q \supset r$ H1 (Hypothese 1)
2. $p \supset q$ H2
3. p H3
4. $p \supset q, p \vdash q$ R1 ((2),(3))
5. $q \supset r, p \supset q, p \vdash r$ R1 ((1),(4))
6. $q \supset r, p \supset q \vdash p \supset r$ MT2 (5)
7. $q \supset r \vdash (p \supset q) \supset (p \supset r)$ MT2 (6)
8. $\vdash (q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ MT2 (7)

Dieser Beweis ist, wie man sieht, wesentlich leichter zu konstruieren.

Das Deduktionstheorem, das auch für andere Kalküle (nicht unbedingt nur Aussagenkalküle) gilt, hat auch eine Bedeutung für die Metatheorie. Das Theorem zeigt den Zusammenhang zwischen Beweisen und Beweisen aus Hypothesen (Annahmen) (die oft auch als Ableitungen charakterisiert werden) ([Wes84], 127). Die Unterschiede zwischen diesen und jenen sind klar, wie auch ihre Ähnlichkeit. Sowohl in einem Beweis als auch in einem Beweis aus Annahmen kann man eine bestimmte Art von Formeln benutzen, die aus keinen Formeln der jeweiligen Folge von Formeln folgen. Für den Beweis aus Annahmen sind das in erster Linie Hypothesen, denen kein ausgezeichneter Wahrheitswert zugeschrieben wird. Für den Beweis (eines Theorems) sind das Axiome, die einen solchen Wert in der ganzen Theorie behalten ([Kle67], §9). Das Theorem, das als letzte Formel eines Beweises auftritt, ist eine beweisbare Formel des Kalküls, und ihre Beweisbarkeit lässt sich nach Kleene auch als formale Beweisbarkeit definieren, was bedeutet, dass sie ausschließlich an Hand syntaktischer Konventionen und Regeln des Kalküls gewonnen werden kann. Obwohl die Definition des Beweises aus Hypothesen nicht direkt auf etwas in diesem Sinne „nicht-formales“ deutet, ist schon die Darlegung eines solchen Beweises oder die Darstellung der Behauptung über seine Existenz ohne Heranziehen einiger Elemente der Metasprache gar nicht möglich. Das Deduktionstheorem zeigt folgendes. Von der Formel, die aus einer Liste von Hypothesen abgeleitet werden kann, wird behauptet, dass sie aus den angegebenen Annahmen folgt. Das Theorem erlaubt, jeden Beweis einer Formel des Kalküls aus n Annahmen (Hypothesen) in eine n-fache Implikation zu verwandeln, deren Antezedenzien die Annahmen sind, und deren Konsequens mit der ableitbaren Formel übereinstimmt. Für die n-fache Implikation gilt dann, dass sie eine beweisbare Formel des Kalküls ist. Somit zeigt das Deduktionstheorem, wie erfolgreich der Kalkül die Aufgabe erfüllt, solche logische Begriffe wie Ableiten und Folgen zu formalisieren und die Struktur der logischen Schlüsse darzustellen.

3.2.6 Tautologien und Entscheidungsproblem

Wir beweisen ein weiteres Metatheorem, das für die Frage nach der Entscheidbarkeit des Kalküls von Bedeutung ist.

MT6. Ist eine gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls P_1, und besteht sie aus mehr als einem Symbol, dann ist ihre Form $(A \supset B)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus der Definition einer Formel des Kalküls geht hervor, dass eine Formel aus mehr als einem Symbol die Form $(A \supset B)$ auf mindestens eine Weise annimmt. Die Aufgabe ist also zu zeigen, dass die Formel nicht mehr als auf eine Weise eine solche Form annehmen kann.

Wenn wir die Klammern addieren, die in einer Formel des Kalküls vorkommen, indem wir jeder linken Klammer die Zahl $+1$ und jeder rechten -1 zuordnen, fangen wir mit einer linken Klammer an. Die Zahl, die wir auf jedem Schritt des Addierens bekommen und die wir somit jedem Vorkommen einer Klammer in der Formel zuordnen, bezeichnen wir als Index des Vorkommens der jeweiligen Klammer in der Formel.

Aus der Definition der Formel folgt, dass die Formel, die ein Implikationszeichen enthält, mit einem Vorkommen der linken Klammer anfangen und mit einem Vorkommen der rechten Klammer enden soll. Diese Klammern heißen entsprechend die *Anfangsklammer* und die *Endklammer* der Formel. Durch mathematische Induktion über die Gesamtanzahl der Vorkommen des Implikationszeichens in der Formel lässt sich das folgende Lemma zeigen.

Lemma. Der Index, der dem Vorkommen einer Klammer in die Formel entspricht, ist eine positive Zahl, mit Ausnahme der Endklammer, der 0 entspricht.

Um nun das Theorem MT6 zu beweisen, nehmen wir an, dass $(A \supset B)$ und $(C \supset D)$ ein und dieselbe Formel des Kalküls ist. Wir betrachten folgende Fälle.

Fall 1. Die Teilformel A enthält kein Implikationszeichen. Das bedeutet, dass A aus einem einzigen Symbol besteht, sei es eine Variable oder die Konstante f. Das erste Vorkommen eines Implikationszeichens in der Formel $(A \supset B)$ ist deswegen das Vorkommen des Hauptimplikationszeichens in dieser Formel, das der Formel A folgt. Die Formel C fängt mit demselben Symbol wie A an. Deswegen hat C auch keine Anfangsklammer, und kann folglich auch kein Implikationszeichen enthalten. Also sind A und C identisch.

Fall 2. Die Teilformel C enthält kein Implikationszeichen. Nach demselben Argument wie im Fall 1 folgt daraus, dass A und C identisch sein müssen.

Fall 3. A und C enthalten beide ein Implikationszeichen. Dann ist die Endklammer in A das erste Vorkommen einer Klammer in A, dem der Index 0 zugeordnet wird. Folglich ist ihr Vorkommen das zweite Vorkommen einer Klammer in $(A \supset B)$, dessen Index 1 ist. Die Endklammer in C hat das Vorkommen mit dem Index 0 in C und mit dem Index 1 in der Formel $(C \supset D)$. Deswegen fallen die Endklammern von A und C zusammen, und A und C sind deswegen identisch. Weil in allen drei Fällen A und C identisch sind, müssen auch B und D zusammenfallen.

Sei nun B eine Formel des Kalküls. B enthalte die Variablen $a_1, a_2, \dots, a_n$, die alle verschieden sind. Seien es ferner alle Variablen, die in B vorkommen. Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Wahrheitswerte (*wahr* oder *falsch*), welche von den Variablen $a_1, a_2, \dots, a_n$ angenommen werden. Sei C eine Teilformel der Formel B. Dann lässt sich der Wahrheitswert von B durch aufeinanderfolgende Zuschreibung der Wahrheitswerte den Teilformeln der Formel B durch folgende Vorschrift definieren.

- Ist C die Konstante f, dann ist der Wahrheitswert von C *falsch*.
- Ist C eine Variable a_i, dann ist der Wahrheitswert von C α_i.

– Ist C die Formel $(C_1 \supset C_2)$, dann hat C den Wahrheitswert *falsch*, wenn C_1 den Wahrheitswert *wahr* und C_2 den Wahrheitswert *falsch* hat, sonst hat C den Wahrheitswert *wahr*.

Durch Anwendung dieses Verfahrens sukzessive auf alle Teilformeln der Formel B wird einer der Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* auch der Formel B zugeordnet. Dieser Wert heißt der Wert der Formel B für die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Die Eindeutigkeit dieses Wahrheitswertes für eine gegebene Kombination der Wahrheitswerte der Variablen folgt aus dem Theorem MT6.

Eine Formel des Kalküls heißt eine *Tautologie*, wenn sie für jede Kombination der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Variablen den Wahrheitswert *wahr* annimmt, und eine *Kontradiktion*, wenn sie für jede Kombination der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Variablen den Wahrheitswert *falsch* annimmt. Ist eine Formel des Kalküls weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion, heißt sie *neutrale* Formel. Jede Formel des Kalküls P_1 gehört zu einer dieser drei Arten von Formeln. Die Aufgabe, die darin besteht, dass man ein effektives Verfahren findet, durch das man feststellen kann, zu welcher dieser drei Klassen eine gegebene Formel gehört, nennt man *semantisches Entscheidungsproblem* für die Formeln des Kalküls.

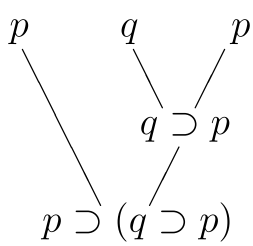
Das effektive Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes (oder des Systems der Wahrheitswerte) einer Formel und zu Beantwortung der Frage, ob diese Formel eine Tautologie, Kontradiktion oder eine neutrale Formel ist, ist das Berechnen der Wahrheitswerte der Formel mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen. Eine Wahrheitswertetabelle kann man für jede Formel des Kalküls P_1 konstruieren. In einer solchen Tabelle wird festgehalten, welche Wahrheitswerte die gegebene Formel für verschiedene Anordnungen der Wahrheitswerte ihrer Variablen annimmt.

Eine Wahrheitswertetabelle wird auf folgende Weise konstruiert. Man schreibt zunächst alle Variablen auf, die in der Formel vorkommen. Keine dieser Variablen darf mehr als einmal in der Liste vorkommen. Für jede dieser Variablen schreiben wir in eine Spalte die Wahrheitswerte *wahr* und *falsch* (wir bezeichnen diese mit den Buchstaben „w“ und „f“) auf, so dass in jeder Zeile der Tabelle eine von den anderen verschiedene Kombination der

Wahrheitswerte steht. Diese Spalten heißen auch die Eingangsspalten der Tabelle. Die Anzahl der Eingangsspalten stimmt also mit der Anzahl der von einander verschiedenen Variablen der Formel überein. Bezeichnen wir diese Anzahl durch n, dann ist die Anzahl der Zeilen der Tabelle 2^n (das ist die Anzahl der möglichen Anordnungen der Wahrheitswerte von n Variablen). Für jede Teilformel der gegebenen Formel reservieren wir eine Spalte, in der wir den Wahrheitswert dieser Teilformel für jedes System der Wahrheitswerte der in dieser Teilformel vorkommenden Variablen notieren. Die Reihenfolge dieser Spalten entspricht in umgekehrter Weise der Reihenfolge, in der wir eine Formel in ihre Teilformeln zerlegen, so dass die Spalte, in der die ganze Formel steht und somit das Hauptzeichen der Formel vorkommt, die letzte Spalte der Tabelle ist. Die Formel, die den Eingangsspalten als Erste folgt, ist eine der Teilformeln der fraglichen Formel, die als ihre Teilformeln nur eigentliche Zeichen des Alphabets des Kalküls enthalten. Die letzte Spalte der Tabelle nennt man Ausgangsspalte. Wenn wir für jede Formel einen „Baum" angeben würden, der die Konstruktionsweise der Formel wiedergibt, dann kann man auch sagen, dass die Spalten der Tabelle, die nach den Eingangsspalten vorkommen, ihrer Reihenfolge nach die Reihenfolge der Konstruktion der Formel wiedergeben. Die Wahrheitswertetabelle für die Formel $p \supset (q \supset p)$ hat die Gestalt

p	q	$q \supset p$	$p \supset (q \supset p)$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w

Dabei sieht der der Formel entsprechende Baum so aus:



Man kann das Verfahren zur Konstruktion einer Wahrheitswertetabelle vereinfachen, indem man die Wahrheitswerte jeder Teilformel der gegebenen Formel unter diesen Teilformeln oder ihren Hauptzeichen schreibt. Wie das geht, zeigt folgendes Beispiel:

p	$\supset$	$((q$	$\supset$	$f)$	$\supset$	$((p$	$\supset$	$q)$	$\supset$	$f))$
w	w	w	f	f	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	f
f	w	w	f	f	w	f	w	w	f	f
f	w	f	w	f	f	f	w	f	f	f

Es gilt das Metatheorem

MT7. Jedes Theorem des Kalküls P_1 ist eine Tautologie.

Der Beweis dieses Theorems besteht darin, dass man die Axiome des Kalküls verifiziert und prüft, ob die Regeln des Kalküls eine Tautologie erhalten. Wir zeigen, dass die zweite Behauptung gilt. Dazu benutzen wir das folgende Lemma, das man durch mathematische Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Implikationszeichens beweist.

Lemma. Seien A und B Formeln des Kalküls. Seien ferner $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ paarweise verschiedene Variablen, die in A und B enthalten sind, so dass keine weiteren Variablen in diesen Formeln vorkommen. Nimmt die Formel B für die Wahrheitswerte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ den Wahrheitswert β an und die Formel $S^b_B A|$ den Wahrheitswert γ, dann ist der Wert der Formel A für die Wahrheitswerte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ auch γ.

Um dieses Lemma zu beweisen, betrachtet man erstens den Fall, dass die Formel A aus einem einzigen Symbol des Alphabets des Kalküls besteht. In diesem Fall gilt offenbar die Behauptung des Lemmas. Der zweite Fall, den man zu betrachten hat, ist, wenn die Formel A die Gestalt $(A_1 \supset A_2)$ hat. Dann hat die Formel $S^b_B A|$ die Gestalt $(S^b_B A_1| \supset S^b_B A_2|)$. Man nimmt an, dass die Behauptung des Lemmas für die Formeln A_1 und A_2 gilt. Sei nun der Wahrheitswert der Formel $S^b_B A_1|$ für die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ der Wert γ_1, und der Formel $S^b_B A_2|$ γ_2. Die Werte γ_1

und γ_2 bestimmen den Wahrheitswert γ der Formel $S^b_B A|$, so dass γ dann und nur dann *falsch* ist, wenn γ_1 der Wahrheitswert *wahr* ist und γ_2 der Wahrheitswert *falsch*. Nach der Induktionsannahme gilt nun, dass der Wahrheitswert der Formel A_1 für die gegebenen Werte ihrer Variablen γ_1 und der Formel A_2 γ_2 ist. Folglich nimmt die Formel A den Wahrheitswert *falsch* nur in dem Fall an, dass γ_1 der Wahrheitswert *wahr* und γ_2 der Wahrheitswert *falsch* ist. Also ist der Wahrheitswert der Formel A γ, womit das Lemma bewiesen ist.

Infolge dieses Lemmas gilt für die Substitutionsregel Folgendes. Wenn die Formel $S^b_B A|$, die man aus der Formel A des Kalküls nach der Regel R2 erhält, den Wahrheitswert *falsch* für eine Anordnung der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Variablen hat, hat auch die Prämisse A dieser Regel den Wahrheitswert *falsch* für eine Anordnung der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Variablen. Ist A aber eine Tautologie (sie erhält für keine Anordnung der in ihr vorkommenden Variablen den Wahrheitswert *falsch*), dann ist der Schluss nach der Regel R2 (die Formel $S^b_B A|$) auch eine Tautologie.

Für die Regel *modus ponens* gilt Folgendes. Ist die kleinere Prämisse der Regel R1 A eine Tautologie, und hat der Schluss B den Wahrheitswert *falsch* für ein System der Wahrheitswerte der in ihm und in der Formel A vorkommenden Variablen, dann ist der Wahrheitswert der größeren Prämisse für ein System der Wahrheitswerte derselben Variablen auch *falsch*. Wenn also beide Prämissen der Regel R1 Tautologien sind, dann muss auch der Schluss eine Tautologie sein.

Beide Schlussregeln des Kalküls erhalten also Tautologien in dem Sinn, dass, wenn die Prämisse(n) einer dieser Regeln Tautologie(n) ist (sind), dann ist es auch ihr Schluss. Verifiziert man, dass die Axiome des Kalküls Tautologien sind, ist das Theorem bewiesen.

Es gilt auch das zu MT7 inverse Metatheorem.

MT8. Ist die Formel B des Kalküls P_1 eine Tautologie, dann $\vdash B$.

Um dieses Metatheorem zu beweisen, zeigt man zunächst mit Hilfe mathematischer Induktion, dass die folgende Behauptung gilt.

Sei B eine Formel des Kalküls und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle paarweise verschiedenen Variablen, die in B vorkommen. Sei ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine beliebige Kombination der Werte der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Für ein beliebiges $i = 1, 2, \ldots, n$ sei H_i eine Formel der Gestalt a_i, wenn α_i der Wahrheitswert *wahr* ist, und der Gestalt $(a_i \supset f)$, wenn α_i der Wahrheitswert *falsch* ist. B' sei B, wenn die Formel B für die gegebene Kombination der Wahrheitswerte den Wert *wahr* hat, und $(B \supset f)$, wenn die Formel B für die gegebene Kombination der Wahrheitswerte ihrer Variablen den Wert *falsch* hat. Dann gilt

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B'.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, führt man eine mathematische Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Implikationszeichens in der Formel B durch. Man muss folgende Fälle unterscheiden.

Fall 1. B enthält kein Implikationszeichen. In diesem Fall ist B entweder f oder a_i. Ist B die Konstante f, dann hat die Formel B' die Gestalt $(f \supset f)$, und die Behauptung folgt durch Substitution aus dem Theorem T1. Ist B a_i, dann fällt die Formel B' mit der Formel H_i zusammen, und der Beweis der Formel B' aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ist trivial (besteht aus einer einzigen Formel H_i oder B').

Betrachten wir nun die Fälle, wo B ein Implikationszeichen enthält. In allen diesen Fällen hat die Formel B die Gestalt $(B_1 \supset B_2)$. Man geht von der Induktionsannahme aus, dass für B_1 und B_2 die Behauptung erfüllt ist, und es gilt:

(1) $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B_1'$

(2) $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B_2'$

Fall 2a. B_1' ist B_1 und B_2' ist B_2. Da die beiden Formeln B_1 und B_2 somit den Wert *wahr* haben, hat die Formel $(B_1 \supset B_2)$ auch den Wahrheitswert *wahr*, und die Formel B' fällt mit der Formel $(B_1 \supset B_2)$ zusammen. Durch Substitution in A1 erhält man die Formel $B_2 \supset (B_1 \supset B_2)$, die zusammen mit (2) durch die Anwendung des *modus ponens* die Behauptung liefert.

Fall 2b. B'_1 ist B_1 und B'_2 ist $(B_2 \supset f)$. In diesem Fall hat die Formel $(B_1 \supset B_2)$ den Wahrheitswert *falsch*, und B' hat dementsprechend die Gestalt $(B_1 \supset B_2) \supset f$. Durch Substitution in T8 erhält man die Formel $B_1 \supset ((B_2 \supset f) \supset ((B_1 \supset B_2) \supset f))$. Aus dieser und (1) und (2) gewinnt man die Behauptung durch die zweifache Anwendung des *modus ponens*.

Fall 2c. B'_1 ist $(B_1 \supset f)$ und B'_2 ist B_2. In diesem Fall hat B' wiederum die Gestalt $(B_1 \supset B_2)$. Durch Substitution in T3 bekommt man die Formel $(B_1 \supset f) \supset (B_1 \supset B_2)$, die zusammen mit (1) durch die Anwendung des *modus ponens* die Behauptung liefert.

Fall 2d. B'_1 ist $(B_1 \supset f)$ und B'_2 ist $(B_2 \supset f)$. In diesem Fall wie im Fall 2c hat B' offenbar wiederum die Gestalt $(B_1 \supset B_2)$. Die Behauptung bekommt man analog. Eigentlich ist es hinreichend, bei dem Beweis nur drei Fälle zu unterscheiden, wenn das Antezedens von B' die Gestalt $(B_1 \supset f)$ hat, wenn das Konsequens von B die Gestalt B_2 hat, und wenn das Antezedens die Gestalt B_1 und das Konsequens die Gestalt $(B_2 \supset f)$ hat.

Nun können wir die Behauptung des Metatheorems MT8 beweisen. Wir gehen davon aus, dass die Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_n$ den Voraussetzungen der obigen Behauptung entsprechen. Da B eine Tautologie ist, fällt B', das wie oben definiert ist, mit B zusammen. Da B für beliebige Kombination der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Variablen den Wert *wahr* hat, gilt folgendes:

$$H_1, H_2, \ldots, a_n \vdash B$$

und

$$H_1, H_2, \ldots, a_n \supset f \vdash B$$

Nach dem Deduktionstheorem folgt daraus:

(3) $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash a_n \supset B$

und

(4) $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash (a_n \supset f) \supset B$

Durch Substitution in T9 bekommt man die Formel

$$((a_n \supset f) \supset B) \supset ((a_n \supset B) \supset B)$$

Mit dieser Formel, (4) und (3) bekommt man durch die zweifache Anwendung des *modus ponens* die Behauptung:

$$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash B$$

Man kann also eine Hypothese aus dem Beweis von B eliminieren. Durch Eliminierung aller Hypothesen nacheinander bekommt man:

$$\vdash B,$$

womit das Theorem bewiesen ist.

Außer dem semantischem Entscheidungsproblem stellt sich für einen Kalkül auch das *Entscheidungsproblem* (oder das *Entscheidungsproblem für Beweisbarkeit*), das darin besteht, ein effektives Verfahren zu finden, mit dessen Hilfe man für eine beliebige Formel des Kalküls entscheiden kann, ob sie ein Theorem ist oder nicht. Die Lösung dieses Problems liefern für P_1 das Verfahren zur Lösung des semantischen Entscheidungsproblems (die Konstruktion der Wahrheitswertetabellen) und die Metatheoreme MT7 und MT8. Das bedeutet u. a., dass man von nun an nicht unbedingt einen Beweis einer Formel konstruieren muss, um zu zeigen, dass sie ein Theorem des Kalküls ist. Es reicht, zu prüfen, ob diese Formel eine Tautologie ist. Das semantische Entscheidungsproblem wird für P_1 durch die Konstruktion von Wahrheitswertetabellen, die semantischen Regeln und die Definitionen des Kapitels 1.2 gelöst.

Mit Hilfe der letzten Metatheoreme lässt sich noch ein weiteres wichtiges Metatheorem beweisen.

MT9. Ist B die Formel, die man aus der Formel A des Kalküls durch Substitution der Formel N für die Teilformel M der Formel A gewinnt, wobei die Substitution nicht unbedingt an jeder Stelle erfolgt, wo M in A vorkommt, und gilt es, dass $\vdash M \equiv N$, dann $\vdash A \equiv B$.

Um dieses Metatheorem zu beweisen, geht man davon aus, dass $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die komplette Liste aller Variablen ist, die in den Formeln A und B vorkommen. Da $M \equiv N$ ein Theorem ist, ist das nach dem Metatheorem MT7 eine Tautologie. Laut der Wahrheitswertetabelle für „$\equiv$" haben die Formeln M und N denselben Wahrheitswert für jedes System der Wahrheitswerte der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Da die Formel B aus der Formel A durch Substitution von N für die Teilformel M an bestimmten (ausgezeichneten) Stellen der Formel A gewonnen wird, haben A und B denselben Wahrheitswert für ein beliebiges System der Wahrheitswerte der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Das beweist man mit Hilfe mathematischer Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Implikationszeichens in der Formel A. Laut der Wahrheitswertetabelle für „$\equiv$" ist dann $A \equiv B$ eine Tautologie. Folglich ist nach dem Metatheorem MT8 $A \equiv B$ ein Theorem, d. h. $\vdash A \equiv B$.

Aus diesem Metatheorem folgt noch ein weiteres, das als Regel der Substituierbarkeit für Äquivalenz bekannt ist.

MT10. Gewinnt man die Formel B aus A durch die Substitution der Formel N für die Teilformel M der Formel A an einer oder mehreren Stellen, wo diese in A vorkommt, und gilt $\vdash M \equiv N$ und $\vdash A$, dann $\vdash B$.

Es gibt noch eine Möglichkeit, das Entscheidungsproblem für einen Aussagenkalkül zu lösen, ohne dabei auf die semantischen Korrelate von Formeln des Kalküls und ihren Teilformeln zurückzugreifen. Man kann also allein an der Gestalt einer Formel des Kalküls erkennen, ob sie eine Tautologie ist oder nicht. Dass dieses Problem somit eine syntaktische Lösung hat, bedeutet allerdings nicht, dass die Begründung des einer solchen Lösung entsprechenden Verfahrens ohne Heranziehen der semantischen Regeln des jeweiligen Kalküls möglich ist. Wie die Metatheoreme MT9, MT10 zeigen, darf man eine Teilformel einer Formel (oder sogar die ganze Formel) des Kalküls durch eine äquivalente Formel (welche dieselben Wahrheitswerte für die gleichen Kombinationen der Wahrheitswerte ihrer Variablen hat) ersetzen, so dass der Wahrheitswert der ganzen Formel dabei unverändert bleibt. Durch eine endliche Reihe solcher Ersetzungen kann man eine beliebige Formel des Kalküls auf eine bestimmte Form bringen, so dass die Formel nur gewisse Funktoren enthält. Diese Möglichkeit liegt u. a. dem ebenso angesprochenen Verfahren zugrunde, das darin besteht, dass man eine Formel des Kalküls auf die so genannte konjunktive Normalform bringt. Unter einer *konjunktiven Normalform* versteht man eine Formel, die aus einer oder mehreren durch Konjunktion verbundenen einfachen oder elementaren Disjunktionen besteht. Eine *einfache* oder *elementare Disjunktion* ist eine Disjunktion, wo jedes Glied eine Variable oder die Verneinung einer Variablen ist.

Ein Beispiel einer elementaren Disjunktion ist die Formel

$$(p \vee \sim q \vee r),$$

und einer konjunktiven Normalform die Formel

$$p \cdot (p \vee \sim q \vee r)$$

(das letzte Beispiel sowie die Definition stammen von Bernays [Ber26], 307). Auf die Klammern innerhalb der äußeren Klammern von elementaren Disjunktionen wird hier wegen der Assoziativität der Disjunktion verzichtet.

Man kann folgende Behauptung beweisen. Eine elementare Disjunktion ist eine Tautologie dann und nur dann, wenn sie mindestens zwei Glieder enthält, eins von denen eine Variable und das andere ihre Verneinung ist.

Die elementare Disjunktion, die ein solches Paar enthält, hat die Gestalt

$$V \vee \sim V \vee D,$$

wobei V für eine Variable, und D für eine elementare Disjunktion steht. Da nun jede Formel der Gestalt $V \vee \sim V$ eine Tautologie ist, ist somit der Wahrheitswertetabelle für Disjunktion entsprechend auch die Formel $V \vee \sim V \vee D$ eine Tautologie, unabhängig von dem Wahrheitswert des restlichen Teils D der ganzen Formel.

Aus der Definition der Konjunktion folgt, dass die konjunktive Normalform einer Formel nur dann eine Tautologie ist, wenn alle Glieder dieser Konjunktion (also alle elementaren Disjunktionen) Tautologien sind.

Um eine Formel auf die konjunktive Normalform zu bringen, benutzt man verschiedene Äquivalenzen, Assoziativität und Distributivität der Konjunktion und Disjunktion, die für den Kalkül P_1 in der Form der Theoreme des Kalküls angegeben sind (siehe unten), sowie Definitionen. Besonders häufig wird die Äquivalenz $(p \supset q) \equiv ({\sim}p \vee q)$ benutzt, die insbesondere in dem Aussagenkalkül von *Principia Mathematica* der Definition der Implikation zugrunde liegt (wir bezeichnen sie hier deswegen durch ID). Man kann außerdem, von der Assoziativität der Konjunktion und Disjunktion ausgehend, die Klammern auslassen, die zwischen den Gliedern einer Disjunktion oder Konjunktion vorkommen. Beispielsweise kann man die Formel $((p \vee q) \vee r)$ in der Form $(p \vee q \vee r)$ schreiben. Zu bemerken ist Folgendes. Obwohl die Theoreme des Kalküls P_1 keine Theoremenschemata sind, benutzen wir sie in diesem Abschnitt des Kapitels als solche. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit, aus jedem Theorem eine Variante von diesem oder ein anderes Theorem durch eine entsprechende Substitution zu folgern, und somit einen Beweis für das neue Theorem zu erbringen.

Betrachten wir ein Beispiel, um zu sehen, wie man eine Formel auf ihre konjunktive Normalform bringt. Aus der Formel

$$({\sim}p \cdot q) \supset (p \equiv {\sim}r)$$

bekommen wir der Reihe nach durch Ersetzen durch äquivalente Formeln (die Begründung ist rechts von der jeweiligen Formel angegeben) folgende Formeln

$${\sim}({\sim}p \cdot q) \vee (p \equiv {\sim}r) \qquad \text{ID}$$

$$({\sim}{\sim}p \vee {\sim}q) \vee ((p \supset {\sim}r) \cdot ({\sim}r \supset p)) \qquad \text{De Morgansches Gesetz (s. unten), D6}$$

$$(p \vee {\sim}q) \vee (({\sim}p \vee {\sim}r) \cdot ({\sim}{\sim}r \vee p)) \qquad \text{Das Gesetz der doppelten Negation (s. unten), ID}$$

$$(p \vee {\sim}q) \vee (({\sim}p \vee {\sim}r) \cdot (r \vee p)) \qquad \text{Das Gesetz der doppelten Negation}$$

$$((p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee \sim r)) \cdot ((p \vee \sim q) \vee (r \vee p))$$

Distributivität der Disjunktion

Die Formel

$$(p \vee \sim q \vee \sim p \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r \vee p)$$

ist somit eine konjunktive Normalform für die gegebene Formel. Die erste elementare Disjunktion enthält die Variable p und ihre Verneinung, wodurch diese Disjunktion zu einer Tautologie wird. Für die zweite Disjunktion gilt das aber nicht. Somit ist die gegebene Formel keine Tautologie.

Hier erwähnen wir noch folgende Theoreme des Kalküls P_1.

T15. $(t \supset p) \equiv p$

T16. $\sim\sim p \equiv p$ Das vollständige Gesetz der doppelten Negation

T17. $(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$ Das Gesetz der Kommutativität der (materialen) Äquivalenz

T18. $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ Vollständiges Gesetz der Kommutativität der Äquivalenz

T19. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$

T20. $(p \equiv q) \supset ((q \equiv r) \supset (p \equiv r))$ Das Gesetz der Transitivität der (materialen) Äquivalenz

T21. $((p \cdot q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$ Exportationsgesetz

T22. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \supset r)$ Importationsgesetz

T23. $((p \supset q) \cdot (p \supset r)) \supset (p \supset (q \cdot r))$ Kompositionsgesetz

T24. $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ Das Gesetz der (implikativen) Kontraposition

T25. $\sim(p \cdot \sim p)$ Das Widerspruchsgesetz

T26. $p \vee \sim p$ Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten

T27. $(p \cdot p) \equiv p$ Idempotenz der Konjunktion

T28. $(p \vee p) \equiv p$ Idempotenz der Disjunktion

T29. $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$ Symmetrie der Konjunktion

T30. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ Symmetrie der Disjunktion

T31. $(p \cdot (q \cdot r)) \equiv ((p \cdot q) \cdot r)$ Assoziativität der Konjunktion

T32. $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ Assoziativität der Disjunktion

T33. $(p \cdot (q \vee r)) \equiv ((p \cdot q) \vee (p \cdot r))$ Distributivität der Konjunktion

T34. $(p \vee (q \cdot r)) \equiv ((p \vee q) \cdot (p \vee r))$ Distributivität der Disjunktion

T35. $(p \vee (p \cdot q)) \equiv p$ Das Absorptionsgesetz der Disjunktion

T36. $(p \cdot (p \vee q)) \equiv p$ Das Absorptionsgesetz der Konjunktion

T37. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$

T38. $\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

Die beiden letzten Theoreme sind als die Gesetze von de Morgan bekannt.

T39. $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$
Einfaches konstruktives Dilemma

T40. $(p \supset r) \supset ((q \supset s) \supset ((p \vee q) \supset (r \vee s)))$
Komplexes konstruktives Dilemma

T41. $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset ((\sim q \vee \sim r) \supset \sim p))$
Einfaches destruktives Dilemma

T42. $(p \supset r) \supset ((q \supset s) \supset ((\sim r \vee \sim s) \supset (\sim p \vee \sim q)))$
Komplexes destruktives Dilemma

T43. $(p \not\equiv p) \equiv f$

3.2.7 Dualität

Ist uns eine Formel des Kalküls gegeben, dann heißt die Formel, die man aus der gegebenen durch gegenseitige Ersetzung der Konstanten t und f sowie der Zeichen $\supset$ und $\not\subset$, $\vee$ und $\cdot$, $\equiv$ und $\not\equiv$, $\subset$ und $\not\supset$, $\bar{\vee}$ und $|$ gewinnt, eine (zu der gegebenen) *duale* Formel.

Das Verfahren einer solchen Ersetzung, dem eine Formel des Kalküls unterworfen wird, heißt *Dualisierung*.

Das Symbol $\sim$ bleibt bei der Dualisierung unverändert und heißt deshalb *selbst-dual*. Konstanten t und f, sowie die oben erwähnten Zeichen (paarweise genommen) heißen *dual zueinander*.

Dual zu der Formel

$$((p \vee t) \supset (q \cdot r)) \equiv (r \vee {\sim}p)$$

ist beispielsweise die Formel

$$((p \cdot f) \not\subset (q \vee r)) \not\equiv (r \cdot {\sim}p)$$

Entsprechend der von uns eingeführten Definitionen D1–D11 kann eine Formel mehrere duale Formeln haben. Dual zu der Formel

$${\sim}p \supset {\sim}{\sim}q$$

sind z. B. folgende Formeln:

1) ${\sim}p \not\subset {\sim}{\sim}q$

2) ${\sim}p \not\subset {\sim}(q \not\subset t)$

3) $(p \not\subset t) \not\subset ((q \not\subset t) \not\subset t)$

4) $(p \not\subset t) \not\subset (q \cdot t)$

5) ${\sim}{\sim}q \not\supset {\sim}p$

Die Liste der Formeln, die dual zu der gegebenen sind, kann fortgesetzt werden. Man kann auch zu den Formeln 2)–5) folgende duale Formeln angeben:

2d) ${\sim}p \supset {\sim}(q \supset f)$

3d) $(p \supset f) \supset ((q \supset f) \supset f)$

4d) $(p \supset f) \supset (q \vee f)$

5d) ${\sim}{\sim}q \subset {\sim}p$

Unter den Formeln, die dual zu den zu ${\sim}p \supset {\sim}{\sim}q$ dualen Formeln sind, sind auch ${\sim}p \supset (q \vee f)$, $(p \supset (t \not\subset t)) \supset (q \vee (t \not\subset t))$, $(q \cdot t) \subset (t \not\supset p)$.

Ist eine Formel A des Kalküls gegeben, dann ist eine Formel, die dual zu der zu A dualen Formel ist, nur dann mit der gegebenen identisch, wenn die Formel A ein einziges Vorkommen einer Variablen enthält (mit anderen Worten die Gestalt V hat). Ist eine Formel A des Kalküls gegeben, und ist B eine zu A duale Formel, dann ist A unter den Formeln des Kalküls, die zu B dual sind, enthalten.

Es gilt das folgende Metatheorem.

MT11. Sind A, B und C Formeln des Kalküls, und sind B und C dual zu A, dann $\vdash B \equiv C$.

Dieses Metatheorem basiert in erster Linie auf folgender Beobachtung. Selbst wenn man die Definitionen so formuliert, dass die Anzahl der möglichen dualen Formeln für eine gegebene Formel des Kalküls minimal ist (dieses Zweck erfüllen letztendlich auch die von Church angegebenen Definitionen D1–D11), kann man nicht die Mannigfaltigkeit von dualen Formeln vermeiden, die durch die ersten drei Definitionen zustande kommt. Zwei beliebige Formeln, die beide zu einer gegebenen Formel des Kalküls dual sind, kann man durch eine endliche Anzahl von Schritten folgender Formen aufeinander zurückführen: durch das Ersetzen der Teilformel $t \supset N$, die selbst eine Formel des Kalküls ist, durch N und der Teilformel N, die selbst eine Formel des Kalküls ist, durch $t \supset N$, durch das Ersetzen der Teilformel $\sim\sim N$, die selbst eine Formel des Kalküls ist, durch N, sowie N durch $\sim\sim N$. Mit Hilfe der Theoreme T15, T16, T17 und T20, sowie des Metatheorems MT9 lässt sich die Behauptung beweisen.

Die Quelle der Dualität ist aus den Wahrheitswertetabellen ersichtlich. Wir betrachten als Beispiel die Wahrheitswertetabelle für Konjunktion und Disjunktion.

p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$[\sim p]$	$[\sim q]$	$[\sim(p \cdot q)]$	$[\sim(p \vee q)]$
w	w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w	w	w

Links konstruieren wir eine Tabelle für Konjunktion und Disjunktion wie gewöhnlich. Dieser Tabelle entsprechen die ersten 4 Spalten. Nun ersetzen wir alle Wahrheitswerte in allen Zeilen durch entgegengesetzte (*wahr* durch *falsch* und *falsch* durch *wahr*), und füllen mit diesen die nächsten 4 Spalten auf. Klar ist, dass in den Spalten, die wir auf solche Weise erhalten, die Wahrheitswerte der Verneinung der jeweiligen Formel stehen. Man sieht, dass die Spalte mit den Wahrheitswerten für die Formel $\sim(p \cdot q)$ der Wahrheitswertetabelle der Disjunktion der Verneinungen der Formeln p und q entspricht, und die Spalte mit den Wahrheitswerten für die Formel $\sim(p \vee q)$ – der Wahrheitswertetabelle der Konjunktion der Verneinungen von p und q. Bei der besagten Ersetzung der Wahrheitswerte geht also die Tabelle für die Konjunktion in die Tabelle für die Disjunktion über und umgekehrt. Analog kann man mit anderen Paaren der dualen Zeichen verfahren. Konstruieren wir eine Tabelle für Negation, und ersetzen wir jeden Wahrheitswert, der in der Tabelle vorkommt, durch einen entgegengesetzten, dann bekommen wir wiederum die Tabelle für Negation. Dieser kurzen Betrachtung kann man auch entnehmen, dass die Formel, die zu einer Tautologie dual ist, eine Kontradiktion ist.

Es gilt das folgende Metatheorem, das auch unter dem Namen „das Dualitätsprinzip“ bekannt ist.

MT12. Ist A eine Formel des Kalküls, so dass $\vdash A$, und ist ferner A_1 eine beliebige Formel, die zu A dual ist, dann $\vdash \sim A_1$.

Es gelten folgende zwei Theoreme.

T44. $\sim(p \not\subset q) \supset (q \supset p)$

T45. $\sim(p \not\equiv q) \supset (p \equiv q)$

Mit Hilfe dieser Tautologien bekommt man folgende Korollare aus dem Metatheorem MT12.

Korollar 1 (Dualitätsprinzip für Implikation). Gilt $\vdash A \supset B$, und sind A_1 dual zu A und B_1 dual zu B, dann $\vdash B_1 \supset A_1$.

Korollar 2 (Dualitätsprinzip für Äquivalenz). Gilt $\vdash A \equiv B$, und sind A_1 dual zu A und B_1 dual zu B, dann $\vdash A_1 \equiv B_1$.

3.2.8 Widerspruchsfreiheit

Die Idee der Widerspruchsfreiheit eines Kalküls ist im Grunde durch eine semantische Motivation bedingt, da sie aus der Forderung erwächst, dass nichts, was der Bedeutung nach widersprüchlich ist, ein Theorem sein darf, oder, mit anderen Worten, dass zwei Theoreme einander nicht widersprechen dürfen. Bei einem Kalkül sucht man nach einer syntaktischen Modifikation dieser Forderung, die sich auf verschiedene Weise vollziehen lässt.

Die erste Möglichkeit besteht darin, dass man die relative Widerspruchsfreiheit des Kalküls in Bezug auf eine Transformation einer Formel des Kalküls definiert, wobei diese Transformation eine Formel A des Kalküls in eine andere Formel A_1 überführt. Eine solche syntaktische Definition soll der semantischen Interpretation von Formeln des Kalküls entsprechen, die einander verneinen. Man sagt, dass ein Kalkül *widerspruchsfrei in Bezug auf eine gegebene Transformation* ist, welche eine Formel des Kalküls A in die Formel A_1 überführt, wenn es keine Formel A gibt, so dass zugleich $\vdash A$ und $\vdash A_1$.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, dass man die absolute Widerspruchsfreiheit definiert. Man fordert, dass nicht jede Formel des Kalküls ein Theorem sein kann. Wäre das der Fall, dann könnte man aus zwei Theoremen, die einander widersprechen (die einander verneinen), jede beliebige Formel ableiten. In unserem Kalkül könnte man das durch Substitution in T3 mit Hilfe des *modus ponens* erreichen. Man kann auch der Idee Hilberts folgend eine konkrete Formel des Kalküls (für P_1 ist das die Konstante f) wählen, und den Kalkül als widerspruchsfrei definieren, wenn diese konkrete Formel kein Theorem ist. Ein Kalkül heißt *absolut widerspruchsfrei*, wenn nicht alle seine Formeln Theoreme sind.

Enthält ein Kalkül Aussagenvariablen (wie der Kalkül P_1), kann man den Kalkül als widerspruchsfrei im Sinne von Post definieren, wenn keine Formel des Kalküls, die aus einer allein stehenden Aussagenvariablen besteht, ein Theorem des Kalküls ist. Man sagt, dass ein Kalkül *widerspruchsfrei im Sinne von Post (in Bezug auf eine bestimmte Kategorie von primitiven Symbolen, die Aussagenvaria-*

blen heißen) ist, wenn keine Formel des Kalküls, die aus einer allein stehenden Aussagenvariablen besteht, ein Theorem des Kalküls ist.

Für den Kalkül P_1 gelten folgende Metatheoreme.

MT13. P_1 ist widerspruchsfrei in Bezug auf die Transformation einer Formel des Kalküls A in die Formel $A \supset f$.

Beweis: Nach der Definition einer Tautologie und laut Wahrheitswertetabelle für Implikation können die Formeln A und $A \supset f$ nicht beide zugleich Tautologien sein. Ist A eine Tautologie, dann ist $A \supset f$ eine Kontradiktion, und umgekehrt. Aus dem Theorem MT7 folgt dann, dass in jedem Fall nicht beide Formeln zugleich Theoreme des Kalküls sein können, da sie nicht beide zugleich Tautologien sind.

MT14. P_1 ist absolut widerspruchsfrei.

Beweis: Die Formel des Kalküls f ist keine Tautologie, folglich nach MT7 ist sie auch kein Theorem des Kalküls. Daraus folgt auch:

MT15. P_1 ist widerspruchsfrei in dem speziellen Sinn, dass f kein Theorem des P_1 ist.

MT16. P_1 ist widerspruchsfrei im Sinne von Post.

Beweis: Eine Formel des Kalküls P_1, die aus einer allein stehenden Variablen besteht, ist keine Tautologie, denn ihr Wahrheitswert ist *falsch* für den Wert *falsch* der Variablen. Also ist sie nach dem Metatheorem MT7 auch kein Theorem des Kalküls.

3.2.9 Vollständigkeit

Wie bei der Widerspruchsfreiheit ist die Einführung des Begriffs der Vollständigkeit semantisch motiviert. Diese Motivation besteht in der Forderung, dass der zu konstruierende Kalkül alle möglichen Theoreme enthalten soll, die der semantischen Interpretation des Kalküls nicht widersprechen. Vollständigkeit kann man, von den schon gegebenen Definitionen der Widerspruchsfreiheit ausgehend, folgendermaßen definieren.

Ein Kalkül heißt *vollständig in Bezug auf eine gegebene Transformation*, die eine beliebige Formel A des Kalküls in eine Formel A_1 umwandelt, wenn für jede Formel B des Kalküls entweder $\vdash B$

gilt, oder der Kalkül durch Hinzunehmen der Formel B als eines zusätzlichen Axioms des Kalküls nicht widerspruchsfrei in Bezug auf diese Transformation wird.

Ein Kalkül ist *absolut vollständig*, falls für jede Formel B des Kalküls entweder $\vdash B$ gilt, oder durch Einführung der Formel B als eines zusätzlichen Axioms des Kalküls dieser nicht absolut widerspruchsfrei wird.

Ein Kalkül ist *vollständig im Sinne von Post*, wenn für jede Formel B des Kalküls entweder $\vdash B$ gilt, oder durch die Einführung der Formel B als eines zusätzlichen Axioms des Kalküls dieser nicht widerspruchsfrei im Sinne von Post wird.

Man fragt sich nun, wie es sich mit der Vollständigkeit des Kalküls P_1 verhält.

Sei B eine Formel des Kalküls, die kein Theorem ist. Laut dem Metatheorem MT8 ist B in diesem Fall auch keine Tautologie, d. h., es gibt eine Kombination der Wahrheitswerte von Variablen, die in B vorkommen, für die B den Wahrheitswert *falsch* annimmt.

Führt man dann die Formel B als ein Axiom des Kalküls ein, wird es möglich aus B mit Hilfe der Substitutionsregel R2 eine Formel zu bekommen, die nach der Definition des Beweises in P_1 ein Theorem des Kalküls ist. Nun kann man von der Kombination der Wahrheitswerte der in B vorkommenden Variablen ausgehen, für die der Wert der Formel B der Wahrheitswert *falsch* ist. Für jede Variable, die in dieser Kombination den Wahrheitswert *wahr* hat, substituiert man die Formel t, und für jede, die den Wahrheitswert *falsch* hat, substituiert man die Formel f. Durch eine solche Substitution erhält man eine Formel, die wir als E bezeichnen. E enthält (nach Konstruktion) keine Variablen und bezeichnet den Wert *falsch*. Der Definition des Beweises in P_1 entsprechend ist E ein Theorem.

Aus der Definition der Implikation folgt aber, dass die Formel $E \supset f$ eine Tautologie ist. Somit ist sie auch (laut MT8) ein Theorem von P_1.

Nun kann man auf die beiden Theoreme E und $E \supset f$ die Regel R1 (*modus ponens*) anwenden, und dadurch die Formel f als Theorem des Kalküls erhalten. Aus dem Theorem f und dem Theorem T2 kann man nun wiederum durch *modus ponens* eine beliebige Formel des Kalküls P_1 als Theorem gewinnen, da jede Variable des Kalküls somit zu einem Theorem wird. Insbesondere wird es möglich, durch die Anwendung der Substitutionsregel sowohl eine Formel A als auch ihre Verneinung $A \supset f$ zu gewinnen. Durch Einführung der Formel B als eines Axioms des Kalküls wird der Kalkül also nicht widerspruchsfrei in Bezug auf die Transformation einer Formel des Kalküls A in eine Formel $A \supset f$, sowie nicht absolut widerspruchsfrei und nicht widerspruchsfrei im Sinne von Post. Das beweist die Vollständigkeit von P_1.

Es gelten somit die folgenden Metatheoreme.

MT17. P_1 ist vollständig in Bezug auf Transformation einer Formel A des Kalküls in die Formel $A \supset f$.

MT18. P_1 ist absolut vollständig.

MT19. P_1 ist vollständig im Sinne von Post.

3.2.10 Unabhängigkeit

Ein Axiom A eines Kalküls heißt *unabhängig*, wenn in dem Kalkül, den man aus dem gegebenen durch Ausschließen von A aus der Liste der Axiome bekommt, A kein Theorem ist.

Eine (primitive) Schlussregel R eines Kalküls heißt *unabhängig*, wenn in dem Kalkül, den man durch Ausschließen von R aus der Liste aller primitiven Regeln des Kalküls bekommt, R keine abgeleitete Regel ist.

Die Forderung der Unabhängigkeit für die Axiome und Regeln eines Kalküls ist nicht obligatorisch. Diese Forderung ist in erster Linie durch das Bestreben bedingt, die Anzahl der Annahmen, die man als Axiome und primitive Regeln des Kalküls einführt, ohne sie zuvor zu beweisen, zu vermindern. Das ist zum Teil durch die Geschichte der Entwicklung von logischen Kalkülen bestimmt. Russell, der als einer der ersten aussagenlogische Kalküle formulierte, begründete oft die Behauptungen, die er als Axiome dem Kalkül vorausschickte, durch ihre Evidenz. Da aber der Evidenzbegriff selbst einer Erörterung bedarf, bevor man sich auf ihn bezieht, und Russell dies wohlbewusst war, strebte er danach, die Anzahl der evidenten Voraussetzungen eines Formalismus so klein wie möglich zu erhalten. Inwiefern ihm das gelungen ist, besprechen wir noch im nächsten Kapitel.

Wir analysieren nun in Bezug auf ihre Unabhängigkeit die Axiome und Regeln des Kalküls P_1. Um die Unabhängigkeit eines der

Axiome des Kalküls von den anderen zu zeigen, sucht man nach einer solchen semantischen Interpretation von Basiselementen des Kalküls (im Fall des Kalküls P_1 sind das die Variablen und die Konstante f sowie Formen, die das Implikationszeichen enthalten), die dem fraglichen Axiom den Wahrheitswert *falsch* zuordnet, während alle übrigen Axiome wahr sind. Wenn das gelingt, kann man das fragliche Axiom nicht als ein Theorem des Kalküls, von anderen Axiomen des Kalküls ausgehend, beweisen. Zu diesem Zweck führt man eine Liste der Wahrheitswerte ein, die mehr als zwei Wahrheitswerte enthält: $0, 1, \ldots, \nu$. Die ersten Wahrheitswerte dieser Liste $0, 1, \ldots, \mu$ sind ausgezeichnet. Es gilt: $\mu < \nu$, wobei die Liste der Wahrheitswerte mindestens einen ausgezeichneten Wert enthält. Jeder primitiven Konstanten wird einer dieser Werte zugeschrieben, und jedem Funktor eine Wahrheitswertetabelle für diese Werte. Eine Tautologie definiert man als eine Formel des Kalküls, die für jede Kombination der Wahrheitswerte ihrer Variablen einen der ausgezeichneten Wahrheitswerte als ihren Wert hat. Wenn jede Schlussregel dann die Eigenschaft hat, Tautologien zu erhalten (d. h. eine Tautologie als Schluss hat, wenn ihre Prämissen Tautologien sind), und jedes Axiom außer einem auch eine Tautologie ist, dann folgt daraus, dass das Axiom, das keine Tautologie ist, unabhängig ist. Wenn alle Axiome Tautologien sind, alle Schlussregeln außer einer Tautologien erhalten und der Kalkül ein Theorem enthält, das keine Tautologie ist, dann ist die Tautologien nicht erhaltende Regel auch unabhängig.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome des Kalküls. Für den Kalkül P_1 kann man die Unabhängigkeit aller Axiome feststellen, indem man eine Liste aus drei Wahrheitswerten einführt, die wir durch 0, 1, 2 bezeichnen. Unter diesen Wahrheitswerten ist nur 0 ausgezeichnet. Der Konstanten f wird der Wahrheitswert 2 zugeschrieben. Wir zeigen, wie man nun mit der Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome des Kalküls verfährt. Die Implikation definiert man für jedes Axiom durch das Angeben der Werte, die die Implikation für verschiedene Werte ihres Antezedens und Konsequens annimmt. Church gibt eine solche Definition in der Form einer Wahrheitswertetabelle, so dass jede Spalte eine Definition enthält. Die jeweilige Definition bestätigt die Unabhängigkeit des in der Spalte erwähnten Axioms.

p	q	$p \supset q$ (für A1)	$p \supset q$ (für A2)	$p \supset q$ (für A3)
0	0	0	0	0
0	1	2	1	1
0	2	2	2	2
1	0	2	0	0
1	1	2	0	0
1	2	0	1	2
2	0	0	0	0
2	1	0	0	0
2	2	0	0	0

Durch Nachrechnen stellt man fest, dass das Axiom A1 mit der für sie gegebenen Definition die Werte 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0 annimmt, und somit keine Tautologie ist, während die übrigen Axiome Tautologien sind. Die Unabhängigkeit der anderen Axiome lässt sich auf dieselbe Weise zeigen.

Eine andere Schreibweise für derartige Definitionen benutzt Bernays ([Ber26], 317–320). Wenn wir Churchs Definitionen und Bernays' Schreibweise benutzen, definieren wir den Wert der Implikation mit Hilfe von Gleichungen. Für A2 lautet diese Definition:

$$0 \supset 0 = 1 \supset 0 = 1 \supset 1 = 2 \supset 0 = 2 \supset 1 = 2 \supset 2 = 0$$

$$0 \supset 1 = 1 \supset 2 = 1$$

$$0 \supset 2 = 2$$

Dieser Definition entsprechend gilt:

$$(1 \supset (1 \supset 2)) \supset ((1 \supset 1) \supset (1 \supset 2)) = (1 \supset 1) \supset (0 \supset 1) = (0 \supset 1) = 1 \neq 0$$

Also nimmt A2 unter der gegebenen Definition auch einen nicht ausgezeichneten Wert an, während das Gegenteil für die übrigen Axiome gilt. Somit ist A2 unabhängig.

Übungsaufgaben

16. Bestimmen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Formeln des Kalküls P_1 sind.

    a) $((p \supset (f \supset f)) \supset p)$

    b) $p \supset (q \supset f)$

    c) $p \supset f \supset f$

    d) $(p \supset q) \supset ((q \supset r \supset (p \supset r)$

    e) p

    f) f

    g) (pf)

    h) $p \supset ff$

    i) $pp(qq$

    Ergänzen Sie die Ausdrücke, die Ihrer Meinung nach keine Formeln des Kalküls P_1 sind, so dass diese zu Formeln des Kalküls werden. Was ist das Hauptimplikationszeichen jeder dieser Formeln (falls das Implikationszeichen in der Formel vorkommt)?

17. Zu welchen syntaktischen Kategorien der formalisierten Sprache gehören die Formeln des Kalküls P_1?

18. Der polnische Logiker J. Łukasiewicz entwickelte eine logische Sprache ohne Klammern. Das Alphabet dieser Sprache enthält folgende primitive Symbole:

    – Aussagenvariablen p, q, r, s, ...

    – Zeichen N (Negationszeichen), K (Konjunktionszeichen), A (Disjunktionszeichen), C (Implikationszeichen), E (Äquivalenzzeichen), J (Zeichen für das ausschließende *oder*).

    Eine Formel dieser Sprache ist wie folgt definiert:

    i. Jede allein stehende Aussagenvariable ist eine Formel.

    ii. Ist α eine Formel, dann ist $N\alpha$ eine Formel.

iii. Sind α und β Formeln, dann sind $K\alpha\beta$, $A\alpha\beta$, $C\alpha\beta$, $E\alpha\beta$, $J\alpha\beta$ auch Formeln.

iv. Keine andere Zeichenfolge ist eine Formel.

Welche Gestalt haben in dieser Sprache die Formeln:

a) $(((p \supset q) \vee \sim r) \cdot (r \equiv p)) \supset q$

b) $(\sim p \equiv q) \supset (p \vee (r \cdot \sim s))$

c) $((p \supset q) \supset r) \supset s$

d) $p \supset (q \supset (r \supset s))$

e) $((p \not\equiv q) \cdot \sim r) \supset ((r \equiv s) \vee \sim (p \cdot q))$?

Übersetzen Sie die folgenden Formeln in die Sprache des Kalküls P_{erw}:

f) $KpNCNqArs$

g) $ANCKNANpqrsNp$

Gehen Sie dabei davon aus, dass das Alphabet dieses Kalküls als eigentliche Symbole eine unendliche Liste von Aussagenvariablen enthält, als uneigentliche – die Funktoren $\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\not\equiv$ und dass eine Formel von P_{erw} folgendermaßen definiert ist:

i. Jede allein stehende Variable ist eine Formel des Kalküls.

ii. Ist Γ eine Formel des Kalküls, dann ist $\sim\Gamma$ eine Formel des Kalküls.

iii. Sind Γ und Δ Formeln des Kalküls, dann sind $(\Gamma \cdot \Delta)$, $(\Gamma \vee \Delta)$, $(\Gamma \supset \Delta)$, $(\Gamma \equiv \Delta)$, $(\Gamma \not\equiv \Delta)$ auch Formeln des Kalküls.

iv. Keine andere Zeichenfolge ist eine Formel des Kalküls.

19. Ist ein Axiom des Kalküls P_1 ein Theorem?

20. Beweisen Sie das Theorem T1 $(p \supset p)$ mit Hilfe der Regel, die eine gleichzeitige Substitution für mehrere Variablen in eine Formel des Kalküls erlaubt.

21. Beweisen Sie folgende Theoreme des Kalküls P_1

    T2. $f \supset p$

    T3. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$

    Benutzen Sie zum Beweis des letzten Theorems T2 ($f \supset p$) und T4 ($(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$). Warum kann man für einen Beweis ein schon früher bewiesenes Theorem des Kalküls benutzen, obwohl in der Definition des Beweises diese Möglichkeit nicht ausdrücklich erwähnt wird?

22. Beweisen Sie folgende Theoreme des Kalküls P_1.

    T6. $((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)$

    Benutzen Sie zum Beweis T3 und T5 ($(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$).

    T7. $((p \supset q) \supset p) \supset p$

23. Beweisen Sie T2 und T3 mit Hilfe des Deduktionstheorems.

24. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen, dass die Axiome des Kalküls P_1 Tautologien sind.

25. Finden Sie die konjunktive Normalform der folgenden Formeln und stellen Sie fest, ob sie Tautologien sind.

    $$p \supset ((p \supset q) \supset q)$$
    $$(p \supset q) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot r))$$

    Hinweis: Benutzen Sie für die Umformung die Theoremenschemata, die in dem Kalkül P_1 von den Theoremen T16 (das vollständige Gesetz der doppelten Negation), T30 (Symmetrie der Disjunktion), T31 (Assoziativität der Konjunktion), T32 (Assoziativität der Disjunktion), T33 (Distributivität der Konjunktion), T34 (Distributivität der Disjunktion), T37 und T38 (Gesetze von de Morgan) und der Äquivalenz ID ($(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$) repräsentiert sind, sowie das Definitionsschema D6.

26. Zeigen Sie, dass man eine Formel der Sprache P_{erw}, die als ihr Hauptzeichen Implikation, Konjunktion, Disjunktion oder Äquivalenz enthält, mit Hilfe eines einzigen logischen Zeichens „|“ darstellen kann, das mit Hilfe von i) definiert ist. Gehen Sie dabei von der Formeldefinition des Kalküls P_{erw} aus. Sie dürfen eine Teilformel (sowie die ganze Formel) einer Formel durch eine äquivalente Formel ersetzen. Benutzen Sie folgende Äquivalenzenschemata:

a) $\sim\sim A \equiv A$

b) $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \cdot \sim B$

c) $(A \supset B) \equiv (\sim A \vee B)$

d) $(A \cdot B) \equiv \sim(\sim A \vee \sim B)$

e) $(A \vee B) \equiv \sim(\sim A \cdot \sim B)$

f) $(A \equiv B) \equiv ((\sim A \vee B) \cdot (\sim B \vee A))$

g) $(A \equiv B) \equiv ((A \supset B) \cdot (B \supset A))$

h) $(A \equiv B) \equiv ((A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B))$

i) $(A \mid B) \equiv (\sim A \vee \sim B)$

j) $\sim A \equiv (A \mid A)$

3.3 Aussagenkalkül P_R

Church bezeichnet als P_R den Aussagenkalkül, der von Russell und Whitehead in *Principia Mathematica* ausführlich dargelegt wurde. Russell hat schon früher (1906 [Rus06], 1908 [Rus08]) die Grundideen dazu formuliert.

Der Darstellung dieses Kalküls möchten wir ein paar Bemerkungen über Russells Motive für die Formulierung eines aussagenlogischen Kalküls vorausschicken. Russell betrachtet den Aussagenkalkül als fundamentalen Bestandteil der symbolischen Logik. In *Principia* wird der Aussagenkalkül als ein Teil der Deduktionstheorie präsentiert. Dieser Teil ist keine Theorie der Aussagen („*propositions*“), sondern handelt davon, wie man eine Aussage aus einer (oder mehreren) anderen ableiten kann. Da Russell als Grund für die Ableitung die Relation zwischen Aussagen ansieht, die darin besteht, dass eine Aussage als eine Folgerung der anderen auftritt, sieht er seine Aufgabe in der Untersuchung dieser Relation und der Benutzung ihrer Eigenschaften für die Begründung der Gesetze des Schließens. Man bringt die Relation der Folgerung zwischen Aussagen durch die Behauptung zum Ausdruck, dass eine Aussage p eine andere Aussage q impliziert. Eine solche Ausdrucksweise sowie die Definition der Implikation, die nicht wahr sein kann, wenn ihr Antezedens wahr und das Konsequens falsch ist, veranlassten Russell schon 1906 zu der Behauptung, dass die Deduktion von der Relation der Implikation abhängt, und dass deswegen die Eigenschaften der Implikation als Voraussetzungen eines jeden deduktiven Systems auftreten sollen. Diese Behauptung wird fast wortwörtlich 1910 in *Principia* wiederholt. Die Theorie, der Russell und Whitehead die Gestalt eines Aussagenkalküls gaben, hat einen fundamentalen Charakter, der darin besteht, dass alle Behauptungen der Theorien, die irgendwelche andere von den Aussagen verschiedene logische Objekte (z. B. Klassen) untersuchen, die Form von Aussagen haben und insofern gegen Regeln des Aussagenkalküls nicht verstoßen dürfen, wenn sie als Basis für die Ableitung anderer Behauptungen auftreten.

Der Aussagenkalkül von *Principia* basiert auf einigen primitiven Ideen (Begriffen) sowie primitiven Sätzen (Axiomen), die deshalb der Terminologie von Peano folgend als primitive bezeichnet werden, weil sie ohne Beweis und Definition, sondern durch Erklärungen eingeführt werden. Unter den primitiven Ideen, die selbst kein syntaktisches Element des Kalküls sind, die aber dennoch zu den Konventionen über die Syntax der Theorie gehören, sind folgende.

Als erste primitive Idee wird in *Principia* der Begriff einer *elementaren Proposition* eingeführt. Wir betrachten das Wort „Proposition“ als Synonym für „Aussage“ (wie wir das Wort hier benutzen). In Bezug auf Russells Theorie benutzen wir den ersten Terminus. Unter einer elementaren Proposition versteht man einen Satz, der keine Variablen und somit keine Wörter wie „alle“, „einige“, „der“ u. ä. enthält. Eine beliebige Komposition von elementaren Propositionen mit Hilfe eines der logischen Funktoren (wie Negation, Disunktion oder Konjunktion) ist wieder eine elementare Proposition. Elementare Propositionen werden in dem Formalismus von *Principia* durch Variablen, die das Alphabet des Kalküls P_R enthält (z. B. p, q, r, s), bezeichnet.

Als zweite primitive Idee wird der Begriff einer *elementaren propositionalen Funktion* eingeführt. Unter einer elementaren propositionalen Funktion versteht man einen Ausdruck, der eine Variable oder mehrere Variablen enthält. Wenn man dieser (diesen) Variablen eine bestimmte Bedeutung zuordnet, ist der Wert des fraglichen Ausdrucks eine elementare Proposition. Der Ausdruck „nicht-p“ ist ein Beispiel für eine elementare propositionale Funktion. In den metatheoretischen Ausführungen von *Principia* (z. B. bei der Formulierung der Regeln des Kalküls) werden elementare propositionale Funktionen durch Ausdrücke wie φp und ψp dargestellt. In den elementaren propositionalen Funktionen erkennt man die Repräsentanten der syntaktischen Kategorie von Formen, die zusammen mit Variablen, logischen Konstanten und (anderen) uneigentlichen Symbolen die Syntax der formalisierten Sprache von *Principia* ausmachen.

Eine weitere primitive Idee ist der Begriff der *Behauptung*. Dieser Begriff wird von Frege übernommen. Die Autoren von *Principia* unterscheiden zwischen der Behauptung einer Proposition (dem Fall, dass eine Proposition behauptet wird) und der Behauptung über eine Proposition (dem Fall, dass die Proposition nur betrachtet wird). Wenn der Satz „Caesar starb“ gebraucht wird, wird die Proposition *Caesar starb* behauptet. In dem Satz „‚Caesar starb‘ ist eine Proposition“ wird die Proposition *Caesar starb* nur betrachtet (oder erwähnt), mit anderen Worten, sie bleibt unbehauptet. Die

Behauptung wird durch das Zeichen „$\vdash$“ bezeichnet, das nicht zu den Elementen des Alphabets des Kalküls oder seinen Ausdrücken gehört. Die Autoren von *Principia* lassen aber die Möglichkeit zu, dass das Behauptungszeichen in einer Formel des Kalküls auch vor einer Teilformel vorkommen kann. Bezüglich der Implikation bemerken Russell und Whitehead, dass Antezedens und Konsequens einer Implikation für gewöhnlich unbehauptet sind, während die hypothetische Proposition, die sie als ihre Teilpropositionen enthält, behauptet wird, wie im Beispiel „$\vdash : p \,.\, \supset .\, q$ “. Diesen Ausdruck kann man lesen als: „Es ist wahr, dass p q impliziert“. Die Anzahl der Punkte nach dem Behauptungszeichen bezeichnet den Wirkungsbereich dieses Zeichens, d. h. sie zeigt, was behauptet wird. Hier weist diese Anzahl darauf hin, dass die Implikation behauptet wird, aber nicht p. Alles, was diesen Punkten folgt, wird behauptet, bis man die gleiche Anzahl der Punkte oder das Ende der Proposition erreicht. Dass man das Behauptungszeichen als „es ist wahr, dass ... “ lesen kann, entspricht nach Meinung von Russell und Whitehead nicht ganz der philosophischen Bedeutung, die man mit dem Zeichen verbindet, aber in dem Formalismus von *Principia* wird es als Zeichen für ein Theorem benutzt, für das man einen Beweis erbracht hat. Diese Interpretation des Zeichens wird auch durch den Begriff der Behauptung einer propositionalen Funktion bestätigt, unter der man die Behauptung eines unbestimmten Wertes der Funktion versteht, wobei die Behauptung nur dann berechtigt ist, wenn ein beliebiger Wert dieser Funktion wahr ist. Noch eine wichtige Bemerkung, die im Zusammenhang mit dieser primitiven Idee gemacht wird, betrifft den Inhalt der Behauptungen von *Principia*. In allen Theoremen des Aussagenkalküls P_R werden propositionale Funktionen, und nicht irgendwelche bestimmte Propositionen behauptet.

Das Alphabet des Kalküls P_R enthält als eigentliche Symbole nur eine unendliche Liste von Variablen p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, ..., deren Reihenfolge wir als alphabetische Reihenfolge von Variablen definieren.

Das Alphabet des Kalküls enthält außerdem vier uneigentliche Symbole: das Negationszeichen $\sim$, das Disjunktionszeichen $\vee$ und linke und rechte Klammern (,). Klammern werden in *Principia* auch durch Punkte bezeichnet. Bei dem Ersetzen der Klammern durch Punkte soll man sich an folgende Regeln halten. Punkte, die links oder rechts von den logischen Funktoren stehen, dienen als Trennungszeichen, um Teilpropositionen zu klammern. Die größere Anzahl von Punkten weist auf eine äußere Klammer hin, die kleinere – auf eine innere Klammer. Der Funktor, der durch die größte Anzahl von Punkten begleitet ist, heißt das *Hauptzeichen der Formel.* Der Wirkungsbereich der Klammern, deren Vorkommen durch beliebige Anzahl der Punkte (ungleich 0) markiert ist, erstreckt sich (nach rechts oder nach links von dem Funktorzeichen ausgehend) über eine beliebige kleinere Anzahl von Punkten, bis man das Ende der Proposition oder eine größere Anzahl von Punkten erreicht. In *Principia* dienen die Punkte auch dazu, dass man die Konjunktion mit deren Hilfe bezeichnet, aber wir benutzen zu diesem Zweck den anders positionierten Punkt. Die gewöhnlichen Klammern werden nicht überall durch Punkte ersetzt, insbesondere dort nicht, wo die Teilformeln derjenigen Teilformel einer Formel des Kalküls geklammert werden, deren Vorkommen durch Punkte schon markiert ist.

Wir definieren eine *Formel des Kalküls* wie folgt.

i. Jede allein stehende Variable ist eine Formel des Kalküls.
ii. Ist Γ eine Formel des Kalküls, dann ist $\sim\Gamma$ auch eine Formel des Kalküls.
iii. Sind Γ und Δ Formeln des Kalküls, dann ist $(\Gamma \vee \Delta)$ auch eine Formel des Kalküls.
iv. Ein Ausdruck ist dann und nur dann eine Formel des Kalküls, wenn dieser den Punkten i–iii entsprechend konstruiert ist.

Diese Definition kann man als eine Umformulierung der These betrachten, dass der Kalkül Behauptungen (Theoreme) über elementare propositionale Funktionen enthält, die ihrerseits Variablen aus dem Alphabet des Kalküls beinhalten, welche als unbestimmte elementare Propositionen zu betrachten sind. Die Definition basiert auf den Axiomen *1.7, *1.71, *1.72, die in der Liste der Axiome (primitiven Sätze) der „Deduktionstheorie“ von *Principia* enthalten sind. Diese definieren für eine elementare Proposition p den Ausdruck $\sim p$, und für zwei elementare Propositionen p und q den Ausdruck $p \vee q$ als elementare Propositionen, und für zwei elementare propositionale Funktionen φp und ψp, die als ihre Argumente elementare Propositionen haben, den Ausdruck $\varphi p \vee \psi p$ als eine elementare propositionale Funktion. Durch diese Axiome wird also die Konstruktionsweise der konstruktiven Objekte des Kalküls P_R angegeben, während die oben erwähnten primitiven Ideen in erster Linie die Ausgangssymbole definieren, aus denen die Formeln des Kalküls konstruiert werden.

Der Formulierung der Axiome des Kalküls schicken Russell und Whitehead die Definition der Implikation voraus.

DR1. $p \supset q \rightarrow {\sim}p \vee q$

Diese Definition gibt die Wahrheitsbedingungen der Implikation wieder. Nach Russell und Whitehead kann man den Ausdruck „$p \supset q$“ als „entweder p ist falsch oder q ist wahr“ lesen. Bekanntlich ist eine Implikation dann und nur dann wahr, wenn die erste oder die zweite dieser Bedingungen erfüllt ist.

Der Gebrauch von Punkten in *Principia* gibt uns außer dem aus dem Kapitel 3.2 schon bekannten Verfahren noch weitere Kriterien, um feststellen zu können, ob eine Zeichenfolge den Konstruktionsregeln des Kalküls entspricht. Punkte werden von Russell und Whitehead deshalb bevorzugt, weil sie die Struktur von Formeln des Kalküls zeigen und zugleich helfen, die Häufung von Klammern zu vermeiden. Deswegen wird es empfohlen, bei dem Lesen jeder Formel zunächst die Punkte zu lesen. Mit einer solchen Analyse der Formeln sowie mit Hilfe der „Interpunktionsregeln“ für Punkte kann man das effektive Verfahren beschreiben, mit dem man feststellen kann, ob eine gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls ist oder nicht. Dabei ist die Wiederherstellung der in der Formel vorkommenden Klammern nicht immer notwendig. Ein solches Verfahren führt man folgendermaßen durch.

Nehmen wir als Beispiel die Zeichenfolge

$$\vdash :: q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset . p \supset r : . \supset : p \supset q \,.\, \supset \; . q \supset r$$

Zunächst suchen wir nach dem Hauptzeichen der Formel. Wir fangen von links an. Es ist aber möglich, dass man die Folge nach dem Hauptzeichen auch von rechts nach links durchsucht. Wir summieren die Punkte, die links und rechts von jedem Funktor stehen (in unserem Beispiel ist das nur das Implikationszeichen), und vergleichen die gewonnenen Zahlen miteinander. Die größte Anzahl der Punkte, die rechts und links von einem Implikationszeichen stehen, ist in der gegebenen Zeichenfolge 5, somit ist das sechste Implikationszeichen das Hauptzeichen dieser Formel, wenn die Zeichenfolge eine Formel ist. Um jetzt festzustellen, ob diese Zeichenfolge tatsächlich eine Formel des Kalküls ist, vernachlässigen wir zunächst die Punkte, die dem Behauptungszeichen folgen. Dann prüfen wir, ob an einer Stelle (links oder rechts von einem der logischen Funktoren) in der Teilfolge, die links von dem Hauptzeichen steht, dieselbe Anzahl der Punkte vorkommt wie links von dem Hauptzeichen. Ist das der Fall, dann ist die gegebene Zeichenfolge keine Formel. Wenn das nicht der Fall ist, wenden wir dasselbe Verfahren auf die rechte Teilfolge an, für die nun die Anzahl der rechts von dem Hauptzeichen stehenden Punkte relevant ist. Hat auch diese Teilfolge den Test bestanden, kann man von den Punkten, die links und rechts von dem Hauptzeichen stehen, absehen. Dann wird das Verfahren für beide Teile der gegebenen Zeichenfolge wiederholt, bis wir solche Teilfolgen erreichen, die keine von den Punkten begleiteten Funktoren enthalten. Wir prüfen nun, ob auch diese der Formeldefinition entsprechen. Wir gehen dabei davon aus, dass die Formel der Gestalt $(\Gamma \supset \Delta)$ der Definition DR1 entsprechend auch eine Formel des Kalküls ist, weil sie nur eine Abkürzung einer Formel des Kalküls der Gestalt $(\sim\Gamma \vee \Delta)$ ist, die man auch als $(\Gamma_1 \vee \Delta)$ schreiben kann. Die Formel Γ_1 ist dabei laut Definition auch eine Formel des Kalküls. Durch die Zerlegung der Zeichenfolge, die Punkte statt Klammern enthält, in Teile, von denen angenommen wird, dass diese Teilformeln einer Formel sind, bekommt man ungeklammerte Ausdrücke. Also ist es sinnvoll, von vornherein bei der Anwendung dieses Verfahrens eine Konvention darüber zu treffen, dass eine Zeichenfolge auch dann als Formel des Kalküls anerkannt wird, wenn ihre Gestalt der Definition der Formel des Kalküls entspricht, unter dem Vorbehalt, dass die äußeren Klammern ausgelassen werden können. Die Anzahl der Punkte, die dem Behauptungszeichen folgen, zeigen in unserem Beispiel, dass das Behauptungszeichen sich auf die ganze Formel bezieht, weil keine Kombination von Punkten, die in der Formel vor oder nach einem Funktor vorkommt, ihrer Anzahl nach gleich oder größer als 4 ist. Von der Möglichkeit, dass ein Behauptungszeichen in einer Teilformel einer Formel vorkommt, sehen wir ab, da dies für den Aussagenkalkül P_R nicht relevant ist.

Das obige Verfahren zeigt, das die angegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls ist. Die Zeichenfolge der Gestalt

$$p \vee q \,.\supset.\, q \,.\vee.\, p$$

ist dagegen keine Formel des Kalküls. Das stellt man schon nach dem ersten Schritt des eben beschriebenen Verfahrens fest. Wäre diese Zeichenfolge eine Formel, dann würde sie kein Hauptzeichen enthalten, was für eine Formel, die aus mehr als nur einem eigentlichen Symbol des Kalküls besteht, unmöglich ist.

Durch eine endliche Schrittfolge lässt sich also feststellen, ob eine gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls ist oder nicht. Man kann allerdings auch das schon bekannte Verfahren benutzen, indem man die Klammern in der gegebenen Formel den Interpunktionsregeln entsprechend wiederherstellt und summiert.

In P_R gibt es zwei Schlussregeln, die mit denen des Kalküls P_1 identisch sind, und die wir deswegen auf ähnliche Weise darstellen.

RR1. Aus $(A \supset B)$ und A folgt B (*modus ponens*).

RR2. Ist b eine Variable in A, und B eine Formel des Kalküls, dann folgt aus A $S^b_B A|$ (Substitutionsregel).

Die Regel *modus ponens* wird in *Principia* mit Hilfe von zwei Axiomen begründet, von denen eins (*1.1) besagt, dass alles, was von einer wahren elementaren Proposition impliziert wird, wahr ist. Die Autoren von *Principia* weisen darauf hin, dass dieses Prinzip keine hypothetische Aussage ist. Wie die Verallgemeinerung dieses Axioms *9.12 zeigt, ist das ein Deduktionsprinzip, dessen Rolle in dem Kalkül aus der Definition eines Beweises und schließlich aus der semantischen Interpretation eines Theorems ersichtlich wird. Das andere Axiom (*1.11) wird für propositionale Funktionen und insbesondere für die elementaren propositionalen Funktionen formuliert, und behauptet, dass wenn φx (wobei x eine reale Variable ist, d. h. ein freies Vorkommen hat) und $\varphi x \supset \psi x$ behauptet werden, dann kann auch ψx behauptet werden, wobei x eine reale Variable ist. In Beweisen von *Principia* wird ausdrücklich Bezug auf das letztere Axiom genommen. Eine Begründung dafür liefert die schon erwähnte These, dass sich die Deduktionstheorie von *Principia* als eine formale Theorie mit propositionalen Funktionen beschäftigt. Russell und Whitehead sehen im *modus ponens* das Grundprinzip der Ableitung, so dass die Ableitung (einer Formel aus der anderen) sich als das Verwerfen einer wahren Prämisse definieren lässt ([PM], 9). Um der Reinheit der Darstellung des Kalküls willen sollte man den *modus ponens* mit Hilfe von primitiven Zeichen (der Negation und Disjunktion) des Kalküls definieren. Bequemlichkeitshalber bleiben wir bei der Notation von *Principia.* Diese Notation erleichtert die Aufgabe, die Äquivalenz der Kalküle P_1 und P_R zu zeigen. Die Lösung dieser Aufgabe ist eins der Hauptziele dieses Kapitels.

Die Substitutionsregel wird von Russell und Whitehead nicht als Regel dargestellt. Obwohl sie ständig angewandt wird und als wesentlich für das sich mit Hilfe allgemeiner Regeln realisierende Deduktionsverfahren aufgefasst wird, kann man die Substitutionsregel selbst, nach Russell und Whitehead, nicht als eine allgemeine Regel formulieren. Durch Substitution bekommt man „ein Beispiel" („*instance*") einer allgemeinen Regel oder eines allgemeinen Prinzips, und die Autoren von *Principia* sehen keine Möglichkeit, die einzelnen Substitutionen zu einer Regel zu verallgemeinern. Da aber die Axiome des Kalküls keine Axiomenschemata sind, bei denen die Ersetzung ihrer Variablen durch beliebige Formeln des Kalküls Axiome liefern, formulieren wir diese Regel explizit. Die explizite Einführung dieser Regel hat zur Folge, dass in den Beweisen in P_R die Prämisse der Substitutionsregel als eine selbständige Zeile vorkommt. In den Beweisen von *Principia* wird auch eine solche Prämisse bei der Begründung des Schlusses angegeben.

Axiome des Kalküls P_R sind folgende.

AR1. $\vdash : p \vee p \,.\supset.\, p$

AR2. $\vdash : q \,.\supset.\, p \vee q$

AR3. $\vdash : p \vee q \,.\supset.\, q \vee p$

AR4. $\vdash : p \vee (q \vee r) \,.\supset.\, q \vee (p \vee r)$

AR5. $\vdash :.\, q \supset r \,.\supset:\, p \vee q \,.\supset.\, p \vee r$

Das Axiom AR1 wird als Tautologieprinzip (kurz: „*Taut*") bezeichnet. Die Behauptung kann man lesen als „Ist p wahr oder p wahr, dann ist p wahr". Das Axiom AR2 („Ist q wahr, dann ist ‚p oder q' wahr") wird „Additionsprinzip" („*Add*") genannt. AR3 („‚p oder q' impliziert ‚q oder p' ") bezeichnen die Autoren von *Principia* als Permutationsprinzip („*Perm*"), AR4 („Ist p wahr oder ‚q oder r' wahr, dann ist q wahr oder ‚p oder r' wahr") – als Assoziativitätsprinzip („*Assoc*"), und AR5 („Wenn q r impliziert, dann impliziert 'p oder q' 'p oder r'") – als Summationsprinzip („*Sum*").

Ein Beweis in P_R ist eine endliche Folge, die aus Formeln des Kalküls besteht. Jede dieser Formeln erfüllt eine der folgenden Bedingungen:

1. Sie ist eins der Axiome des Kalküls.
2. Sie folgt aus zwei in der Folge schon vorkommenden Formeln des Kalküls nach der Regel RR1.
3. Sie folgt aus einer in der Folge schon vorkommenden Formel des Kalküls nach der Substitutionsregel (RR2).
4. Sie ist durch die Anwendung der Definition DR1 auf eine Formel dieser Folge oder auf eine (oder mehrere) Teilformel(n) einer Formel dieser Folge gewonnen.

Der Beweis ist ein Beweis der letzten Formel dieser Folge. Eine Formel des P_R nennt man *Theorem*, wenn sie einen Beweis hat.

Bernays schlug 1926 vor, das Ersetzen jeder Formel, die das Implikationszeichen enthält, durch eine Formel mit dem Disjunktionszeichen und umgekehrt (was die Definition DR1 erlaubt) nicht als einen selbständigen Beweisschritt zu betrachten, sondern in derselben Zeile des Beweises die Formel umzuformen und von derjenigen, die man umformt, durch das Wort „bzw." zu trennen. Wir werden anders vorgehen, womit allerdings kein Einwand gegen diesen Vorschlag erhoben wird. In diesem Punkt halten wir uns an die Struktur der Beweise in *Principia*.

Als Beispiel eines Beweises betrachten wir den Beweis des ersten Axioms des Kalküls P_1, das wir hier als Theorem TR2 bezeichnen (entspricht dem Theorem *2.02 von *Principia*).

TR2. $\vdash : p \,.\supset.\, q \supset p$

1.	$\vdash : q \,.\supset.\, p \vee q$	AR2
2.	$\vdash : p \,.\supset.\, {\sim}q \vee p$	$S^{q}_{p}\, {}^{p}_{\sim q}(1)\vert$
3.	$\vdash : p \,.\supset.\, q \supset p$	DR1 (2)

Weitere Definitionen des Kalküls sind:

DR2. $p \cdot q \rightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$

DR3. $p \equiv q \rightarrow (p \supset q) \cdot (q \supset p)$

Einige weitere Theoreme sind:

TR1. $\vdash : p \supset {\sim}p . \supset . {\sim}p$

TR3. $\vdash : p \supset {\sim}q . \supset . q \supset {\sim}p$

TR4. $\vdash : . p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

TR5. $\vdash : . q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

TR6. $\vdash : . p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

TR7. $\vdash : p . \supset . p \vee p$

TR8. $\vdash . p \supset p$

Das Theorem TR8 (das Identitätsprinzip) beweisen wir auch. Bei diesem Beweis benutzen wir das Theorem TR5 und TR7.

1.	$\vdash : . q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$	TR5
2.	$\vdash :: p \vee p . \supset p : \supset : . p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p$	$S^{q}_{p \vee p}\,{}^{r}_{p}(1)\|$
3.	$\vdash : p \vee p . \supset . p$	AR1
4.	$\vdash : . p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p$	RR1 ((2),(3))
5.	$\vdash : p . \supset . p \vee p$	TR7
6.	$\vdash . p \supset p$	RR1 ((4),(5))

Weitere Theoreme des Kalküls werden wir hier nicht angeben, aber wir weisen darauf hin, dass man in dem Kalkül P_R die ersten zwei Axiome des Kalküls P_1 beweisen kann, sowie eine Aussage, die mit dem dritten Axiom äquivalent ist. Das Axiom A3 des Kalküls P_1 lässt sich nicht in dem Kalkül P_R beweisen, weil das Alphabet des Kalküls P_R keine Konstante f enthält. Bevor wir uns dieser Frage widmen, betrachten wir noch die Frage nach der semantischen Interpretation des Kalküls P_R.

Dem Kalkül P_R geben wir folgende semantische Interpretation. Eine Proposition kann nach Russell und Whitehead zwei Wahrheitswerte haben. Der Wahrheitswert einer Proposition ist *wahr*, wenn die Proposition wahr ist, und *falsch*, wenn die Proposition falsch ist. Die Wahrheitswerte von elementaren Propositionen, die einen Funktor enthalten, sowie von elementaren propositionalen Funktionen sind vollständig durch die Wahrheitswerte ihrer Argumente (im Fall von elementaren Propositionen – durch die Wahrheitswerte der

Teilpropositionen) bestimmt. Man kann also solche propositionalen Funktionen als Wahrheitsfunktionen auffassen ([PM], 8). Diese Auffassung führt zur Formulierung folgender semantischer Regeln.

1. Jede Variable des Kalküls hat einen der Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch*.
2. Die Form, die aus einer allein stehenden Variablen besteht, nimmt den Wert *wahr* an, wenn die Variable den Wahrheitswert *wahr* annimmt, und den Wert *falsch*, wenn die Variable den Wahrheitswert *falsch* annimmt.
3. Ist Γ eine Form, dann nimmt $\sim\Gamma$ den Wahrheitswert *wahr* an, wenn Γ den Wahrheitswert *falsch* annimmt, und den Wahrheitswert *falsch*, wenn Γ den Wahrheitswert *wahr* hat.
4. Sind Γ und Δ Formen, dann nimmt $(\Gamma \vee \Delta)$ den Wahrheitswert *falsch* nur dann an, wenn Γ und Δ beide den Wahrheitswert *falsch* annehmen, sonst hat eine solche Form den Wahrheitswert *wahr*.

Für die Formeln des Kalküls, welche die durch die Definitionen DR1, DR2 und DR3 eingeführten Funktoren enthalten, ist die semantische Interpretation durch diese Definitionen bestimmt und kann durch folgende Regeln gegeben werden.

5. Sind Γ und Δ Formen, dann nimmt $(\Gamma \supset \Delta)$ den Wahrheitswert *falsch* nur dann an, wenn das Antezedens dieser Form den Wahrheitswert *wahr*, und das Konsequens den Wahrheitswert *falsch* annimmt. Sonst hat eine solche Form den Wahrheitswert *wahr*.
6. Sind Γ und Δ Formen, dann nimmt $(\Gamma \cdot \Delta)$ den Wahrheitswert *wahr* nur dann an, wenn Γ und Δ beide den Wahrheitswert *wahr* annehmen, sonst nimmt die Form den Wahrheitswert *falsch* an.
7. Sind Γ und Δ Formen, dann nimmt $(\Gamma \equiv \Delta)$ den Wahrheitswert *wahr* dann an, wenn Γ und Δ beide denselben Wahrheitswert annehmen (beide wahr oder beide falsch sind), sonst nimmt eine solche Form den Wahrheitswert *falsch* an.

In P_R lässt sich die abgeleitete Substitutionsregel (sie wurde schon bei dem Beweis von TR2 und TR8 benutzt) beweisen. Eine Variante einer Formel des Kalküls, ein varianter Beweis und Beweis aus den Hypothesen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ werden auf gleiche Weise wie in P_1 definiert. Für den Beweis des Deduktionstheorems in dem Kalkül P_1 benutzten wir den *modus ponens*, die Substitutionsregel, das Gesetz der Reflexivität der Implikation (TR8 in P_R), das Gesetz der Behauptung des Konsequens (TR2) und das Gesetz der Selbstdistributivität der Implikation (*2.77 von *Principia*, das wir hier nicht beweisen). Also kann man in dem Kalkül P_R das Deduktionstheorem und weitere Metatheoreme beweisen, die für den Kalkül P_1 bewiesen wurden.

MTR1. Wenn $\vdash A$, dann $\vdash S^{b_1\,b_2\,\ldots b_n}_{B_1\,B_2\ldots B_n} A|$

MTR2. Wenn $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$, dann $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \vdash H_n \supset B$

Korollar: Wenn $A \vdash B$, dann $\vdash (A \supset B)$

MTR3. Wenn jede Formel des Kalküls, die zumindest einmal in der Liste der Formeln $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vorkommt, mindestens einmal auch in der Liste der Formeln $C_1, C_2, \ldots, C_r$ vorkommt, und $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash B$, dann $C_1, C_2, \ldots, C_r \vdash B$.

MTR4. Wenn $\vdash B$, dann $C_1, C_2, \ldots, C_r \vdash B$.

Mit Hilfe des Deduktionstheorems beweisen wir hier noch folgendes Theorem

TR9. $\vdash :.\, p \,.\supset .\!\sim\!(r \supset r) \;:\supset .\sim p$

1.	$\vdash :.\, p \,.\supset . \sim(r \supset r) : \supset : r \supset r \,.\supset . \sim p$	$S^{q}_{r\supset r}$ TR3|
2.	$p \,.\supset . \sim(r \supset r)$	H_1
3.	$p \,.\supset . \sim(r \supset r) \vdash : (r \supset r) \,.\supset . \sim p$	RR1 ((1),(2))
4.	$\vdash . r \supset r$	Variante von TR8
5.	$p \,.\supset . \sim(r \supset r) \vdash . \sim p$	RR1 ((3),(4))
6.	$\vdash :.\, p \,.\supset . \sim(r \supset r) : \supset . \sim p$	MTR2

Um nun zu zeigen, in welcher Beziehung die beiden Kalküle P_1 und P_R zueinander stehen, könnten wir der Idee von Church entsprechend vorgehen, der den Kalkül P_1 mit einem anderen von dem Kalkül P_R verschiedenen Kalkül, der aber wie P_R auch keine Konstante f enthält, vergleicht. Church schlägt vor, als einen Ersatz für die Konstante f des Kalküls P_1 in dem Kalkül P_R die Formel

$\sim(r \supset r)$ zu nehmen. Church geht dabei von der semantischen Interpretation der Kalküle aus. Obwohl diese Interpretation nicht dieselbe für die Konstante f und für die gegebene Formel ist, kann man die Unterschiede vernachlässigen, da der Wahrheitswert der gegebenen Formel von dem Wahrheitswert der Variablen r nicht abhängt und die Formel eine Kontradiktion ist.

Es gilt das Metatheorem

MTR5. Jede Formel des Kalküls P_R, die keine allein stehende Variable ist, hat die Form $\sim A$ oder $(A \vee B)$, und in beiden Fällen ist diese Form eindeutig bestimmt.

Zum Beweis benutzen wir dieselbe Gesetzmäßigkeit der Addition der einer linken und einer rechten Klammer entsprechenden Zahlen $+1$ und -1, die wir für den Kalkül P_1 benutzten. Klar ist, dass der Index, den wir durch Summieren dieser Zahlen dem Vorkommen einer Klammer zuordnen, gleich 0 nur für die letzte Klammer der Formel (Endklammer) und sonst positiv ist, gleich 1 für die erste Klammer der Formel (ihre Anfangsklammer) und größer als 1 für beliebige andere linke Klammer der Formel ist.

Dass eine Formel des P_R, die keine allein stehende Variable ist, eine dieser zwei Formen hat, folgt unmittelbar aus der Definition der Formel.

Für eine Formel des Kalküls, welche die Gestalt $\sim A$ hat, ist die Behauptung des Theorems auch einleuchtend. Ist eine Formel des Kalküls in der Form $\sim A$ darstellbar, dann ist A eindeutig bestimmt, weil man A aus $\sim A$ unmittelbar durch Weglassen des Negationszeichens erhält.

Nun beweisen wir die Behauptung des Theorems für eine Formel der Form $(A \vee B)$. Nehmen wir an, dass $(A \vee B)$ und $(C \vee D)$ ein und dieselbe Formel ist.

Fall 1. Die Formel A enthält keine Klammern. Dann, weil nach der Definition einer Formel des Kalküls das Vorkommen des Disjunktionszeichens immer einem Vorkommen einer linken Klammer folgt, ist das Vorkommen des Hauptzeichens der Formel $(A \vee B)$ das erste Vorkommen des Disjunktionszeichens in dieser Formel, das unmittelbar der Formel A folgt. Dieses Disjunktionszeichen folgt auch der Formel C, die mit demselben Zeichen anfängt wie A. Aus diesem Grund ist C mit A identisch. Kommt keine Klammer in der Formel C vor, dann folgt daraus mit demselben Argument, dass C mit A zusammenfällt.

Fall 2. Wenn A und C beide Klammern enthalten, dann entspricht der letzten Klammer der Formel A der Index 0 in A und der Index 1 in der Formel $(A \vee B)$. Also ist das Vorkommen der letzten Klammer der Formel A das zweite Vorkommen einer Klammer mit dem Index 1 in der Formel $(A \vee B)$. Für die Formel C gilt dasselbe. Dem Vorkommen ihrer letzten Klammer entspricht der Index 0 in C, und somit der Index 1 in der Formel $(C \vee D)$, wobei dieses Vorkommen das zweite Vorkommen einer Klammer mit dem Index 1 in der ganzen Formel ist. Also fallen die Endklammern von A und C und folglich auch A und C zusammen.

In jedem Fall sind also A und C identisch. Folglich sind auch B und D in allen diesen Fällen identisch.

Dieses Metatheorem zeigt insbesondere, dass wir für jede Formel des Kalküls P_R eine Wahrheitswertetabelle aufstellen können, die eindeutig den Wert der Formel für eine beliebige Kombination der in ihr vorkommenden Variablen beschreibt. Eine Formel des Kalküls definieren wir als eine *Tautologie*, wenn sie für beliebige Kombination der in ihr vorkommenden Variablen den Wahrheitswert *wahr* annimmt, als eine *Kontradiktion*, wenn sie nur den Wahrheitswert *falsch* annimmt, und als eine *neutrale Formel* sonst.
Weitere Metatheoreme des Kalküls sind die folgenden.

MTR6. Ist eine Teilformel der Formel $\sim A$ selbst eine Formel des Kalküls, dann gilt: entweder fällt sie mit der Formel $\sim A$ zusammen oder sie ist eine Teilformel von A.

Laut dieser Behauptung kann kein Teil der Formel $\sim A$ das erste Vorkommen des Negationszeichens in $\sim A$ enthalten und dabei nicht mit A zusammenfallen. Um das Theorem zu beweisen, nimmt man an, dass eine solche Formel M existiert. Man unterscheidet zwei Fälle, in einem von denen die Formel Klammern enthält, und im anderen – nicht. Enthält M Klammern, dann entspricht der Endklammer von M Index 0 in M und ein von 0 verschiedener Index in A, woraus unmittelbar folgt, dass M nur Teilformel von A sein kann, was der Annahme widerspricht. Enthält M keine Klammern, dann folgt die Behauptung durch mathematische Induktion über die Anzahl der Vorkommen von Negationszeichen in der Formel A.

MTR7. Für eine Formel des Kalküls, die eine Teilformel der Formel $(A \vee B)$ ist, gilt: entweder fällt sie mit $(A \vee B)$ zusammen, oder sie ist eine Teilformel von A, oder sie ist eine Teilformel von B.

Nach diesem Metatheorem kann es keine solche Teilformel einer Formel $(A \vee B)$ geben, die selbst eine Formel des Kalküls ist, mit der Formel $(A \vee B)$ nicht zusammenfällt, und zugleich das Hauptzeichen von $(A \vee B)$, oder die Anfangsklammer von $(A \vee B)$, oder die Endklammer von $(A \vee B)$ enthält. Bei dem Beweis dieses Theorems geht man von der Annahme aus, dass es eine solche Formel M gibt. Eine solche Formel muss Klammern enthalten. Man betrachtet zunächst den Fall, dass die Endklammer von M vor der Endklammer von $(A \vee B)$ vorkommt, und dann den Fall, dass die Anfangsklammer von M nach der Anfangsklammer von $(A \vee B)$ vorkommt. Wenn man nun diesen Klammern einen Index entsprechend der von uns getroffenen Vereinbarung zuordnet, stellt sich heraus, dass jedes Vorkommen einer Klammer von M in der Formel $(A \vee B)$ einen größeren Index hat als das Vorkommen dieser Klammer in M. Also kommt die Endklammer von M vor der Endklammer, und die Anfangsklammer von M nach der Anfangsklammer von $(A \vee B)$. Nimmt man nun an, dass M das Hauptzeichen der Formel $(A \vee B)$ enthält, dann muss M mindestens eine linke Klammer enthalten, die dem Hauptzeichen der ganzen Formel vorangeht. Da sie aber keine Anfangsklammer der ganzen Formel ist, kommt sie in der Formel A vor. A enthält also Klammern, und das Vorkommen der Endklammer von A hat den Index 0 in A und 1 in $(A \vee B)$. In M aber entspricht dieser Klammer der Index, der kleiner als 1 ist (wäre er 1, würde M mit der Formel $(A \vee B)$ zusammenfallen, und wie oben gezeigt wurde, kann dieser Index nicht größer als 1 sein), also 0. Dies ist aber unmöglich, weil diese Klammer keine Endklammer von M ist.

Diese beiden Metatheoreme benutzt man, um MTR8 und MTR9 zu beweisen.

MTR8. Sind A, M und N Formeln des Kalküls, und Γ die Formel, die man aus A durch Substitution von N für M an 0 oder mehreren Stellen (aber nicht unbedingt an allen Stellen, wo M in A vorkommt) erhält, dann ist Γ eine Formel des Kalküls.

Die Behauptung dieses Metatheorems beweist man durch Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Negations- und Disjunktionszeichens in der Formel A. Man betrachtet zunächst den Fall, dass die Formel A die Gestalt $\sim A_1$ hat. Nach dem Metatheorem MTR6 ist dann die Formel Γ die Formel $\sim\Gamma_1$, wobei Γ_1 die Formel des Kalküls ist, die man aus A_1 durch Substitution von N für M an 0 oder mehreren Stellen bekommt, an denen M in der Formel A vorkommt. Nun benutzt man als Induktionsannahme die Behauptung, dass das Theorem für Γ_1 gilt. Dann folgt nach der Definition einer Formel des Kalküls, dass Γ auch eine Formel des Kalküls ist. Analog verfährt man im zweiten Fall, wo A die Formel $(A_1 \vee A_2)$ ist. Hier benutzt man das Metatheorem MTR7. Als Spezialfälle behandelt man den Fall, wo die Formel M in der Formel A kein Vorkommen hat, und wo M mit A zusammenfällt. Im ersten dieser Fälle ist Γ die Formel A selbst, und im zweiten – die Formel N. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Theorems.

MTR9. Seien A, M und N Formeln des Kalküls. Gewinnt man B aus A durch Substitution von N für M an 0 oder mehreren (nicht unbedingt an allen) Stellen, wo M in der Formel A vorkommt, dann gilt

$$M \supset N, N \supset M \vdash A \supset B \qquad \text{und}$$
$$M \supset N, N \supset M \vdash B \supset A$$

Um dieses Theorem zu beweisen, betrachtet man zunächst zwei Spezialfälle. Einer von diesen ist der Fall, dass M kein Vorkommen in A hat. Dann ist B die Formel A selbst. Durch Substitution in TR8 erhält man die Behauptung. Im zweiten Fall fällt M mit A zusammen, also ist B die Formel N und $A \supset B$ und $B \supset A$ stimmen jeweils mit $M \supset N$ und $N \supset M$ überein. Die Behauptung folgt sofort. Um einen allgemeinen Beweis zu geben, benutzt man wie in dem Beweis von MTR8 die mathematische Induktion über die gesamte Anzahl der Vorkommen von $\sim$ und $\vee$ in A. Zunächst betrachtet man den Fall, dass A die Formel $\sim A_1$ ist. In diesem Fall ist B nach dem Theorem MTR6 die Formel $\sim B_1$, wobei B_1 durch Substitution von N für M an 0 oder mehreren Stellen in A gewonnen wird, wo M vorkommt. Aus der Induktionsannahme, dass die Behauptung des Theorems für A_1 und B_1 gilt, und aus einer Variante eines der Gesetze der implikativen Kontraposition (*2.16 von *Principia Mathematica*: $\vdash : p \supset q \,.\supset .\, {\sim}q \supset {\sim}p$) bekommt man mit Hilfe des *modus ponens* die Behauptung des Theorems für die Formeln A und B. Im zweiten Fall hat die Formel A die Gestalt $(A_1 \vee A_2)$. Klar ist, dass durch die Substitution der Formel N für die Formel M an einer oder mehreren Stellen, wo diese in den Formeln A_1 und A_2 vorkommt, man die Formeln B_1 und B_2 bekommt, so dass laut dem Metatheorem MTR7 B die Formel $(B_1 \vee B_2)$ ist. Man nimmt an, dass die Behauptung des Theorems für B_1 und B_2 erfüllt ist, womit gilt

$$M \supset N, N \supset M \vdash A_1 \supset B_1$$

$$M \supset N, N \supset M \vdash B_1 \supset A_1$$

$$M \supset N, N \supset M \vdash A_2 \supset B_2$$

$$M \supset N, N \supset M \vdash B_2 \supset A_2$$

Aus der Induktionsannahme und der Hypothese $\sim B_1$ bekommt man durch Substitution in das schon oben erwähnte Theorem *2.16 von *Principia* mit dem *modus ponens* einen Beweis der Formel $\sim A_1$. Damit erhält man durch Substitution in ein weiteres Theorem *2.53 ($\vdash : p \vee q \,.\supset .\, {\sim}p \supset q$) und Heranziehen der Hypothese $A_1 \vee A_2$ durch zweifache Anwendung von *modus ponens* einen Beweis der Formel A_2. Wenn man erneut auf die Induktionsannahme zurückgreift und davon ausgeht, dass es einen Beweis der Formel $A_2 \supset B_2$ gibt, kann man daraus die Formel B_2 ableiten:

$$M \supset N, N \supset M, A_1 \vee A_2, {\sim}B_1 \vdash B_2$$

Durch Anwendung des Deduktionstheorems bekommt man

$$M \supset N, N \supset M, A_1 \vee A_2 \vdash {\sim}B_1 \supset B_2$$

Die Substitution in *2.54 von *Principia* ($\vdash : {\sim}p \supset q \,.\supset.\, p \vee q$) und die Anwendung von *modus ponens* ergibt dann

$$M \supset N, N \supset M, A_1 \vee A_2 \vdash B_1 \vee B_2$$

Darauf wendet man erneut das Deduktionstheorem an, was zusammen mit RR1 einen Teil der Behauptung des Theorems liefert. Den weiteren Teil gewinnt man analog mit Hilfe der Hypothesen $B_1 \vee B_2$ und ${\sim}A_1$ und der Induktionsannahme, dass es einen Beweis der Formeln $B_1 \supset A_1$ und $B_2 \supset A_2$ aus den Hypothesen $M \supset N$ und $N \supset M$ gibt.

Eine Formel A_0 nennen wir die *Erweiterung einer Formel A des Kalküls P_R bezüglich der Negation*, wenn jede Teilformel der Formel A, welche die Form ${\sim}C$ hat, durch die Formel $(C \supset {\sim}(r \supset r))$ ersetzt wird. Die Konvention, welche die Ersetzung betrifft, besagt: hat die Formel ${\sim}C$ selbst die Gestalt ${\sim}(r \supset r)$, dann wird keine Ersetzung vorgenommen.

Ersetzen wir dann in der Formel A_0 jedes Vorkommen der Formel ${\sim}(r \supset r)$ durch die Konstante f, dann bekommen wir eine Formel A_f des Kalküls P_1, die wir *der Repräsentant der Formel A in P_1* nennen.

MTR10. Wenn man B aus A durch Ersetzung von ${\sim}C$ durch $C \supset {\sim}(r \supset r)$ an einer Stelle in A gewinnt, dann $A \vdash B$ und $B \vdash A$.

Das Theorem beweist man, indem man durch Substitution in *2.21 von *Principia* ($\vdash : {\sim}p \,.\supset.\, p \supset q$) die Formel

$$\vdash :.\, {\sim}C \,.\supset:\, C \,.\supset.\, {\sim}(r \supset r)$$

und durch Substitution in das Theorem TR9 ($\vdash :.\, p \,.\supset.\, {\sim}(r \supset r) :\supset.\, {\sim}p$) die Formel

$$\vdash :.\, C \,.\supset.\, {\sim}(r \supset r) :\supset.\, {\sim}C$$

erhält. Aus MTR9 folgt mit dem *modus ponens* die Behauptung.

MTR11. Ist A_0 die Erweiterung von A bezüglich der Negation, dann $A \vdash A_0$ und $A_0 \vdash A$.

A_0 ist nach der Definition der Erweiterung eine Formel des Kalküls, die man aus A durch Substitution der Formel $C \supset \sim(r \supset r)$ für jedes Vorkommen der Formel $\sim C$ erhält. Aus MTR10 folgt somit die Behauptung.

MTR12. Haben zwei Formeln A und B des Kalküls P_R denselben Repräsentanten in P_1, dann $A \vdash B$ und $B \vdash A$.

MTR13. Haben zwei Formeln A und B des Kalküls P_R denselben Repräsentanten in P_1, dann $\vdash A \supset B$ und $\vdash B \supset A$.

MTR14. Eine Formel A des Kalküls P_R ist ein Theorem in P_R, wenn ihr Repräsentant A_f in P_1 ein Theorem in P_1 ist.

Um MTR 14 zu beweisen, genügt es, die Behauptung des Theorems für die Erweiterung der Formel A bezüglich der Negation zu zeigen, da in diesem Fall die Behauptung des Theorems nach dem Theorem MTR11 folgt. Wir gehen davon aus, dass A_0 die Formel ist, die man aus der Formel A_f durch Substitution der Formel $\sim(r \supset r)$ für die Konstante f bekommt. Wir unterscheiden 2 Fälle.

Fall 1. A_f ist ein Axiom des Kalküls P_1. Für ein Axiom Γ des Kalküls P_1 gilt, dass $S^f_{\sim(r \supset r)}\Gamma|$ ein Theorem des Kalküls P_R ist. Ist A_f eins der Axiome A1 oder A2, folgt das unmittelbar aus den Theoremen TR2 und *2.77 von *Principia.* Ist A_f das Axiom A3, dann folgt das aus dem Gesetz der doppelten Negation (*2.14 von *Principia*) mit MTR11.

Fall 2. A_f ist kein Axiom des Kalküls P_1. Wenn die Variable r in dem Beweis von A_f nicht vorkommt, dann wird der Beweis von A_f zum Beweis von A_0 durch Ersetzen von f durch $\sim(r \supset r)$ überall, wo f vorkommt, und Einfügen des Beweises für die Formel $S^f_{\sim(r \supset r)}\Gamma|$ (wobei Γ eine Formel des Kalküls P_1 ist, die in dem Beweis von A_f vorkommt) an den Stellen, wo es notwendig ist. Aus der Definition des Beweises in P_1 folgt, dass das nur dann der Fall ist, wenn Γ das Axiom A3 ist. Wenn die Variable r in dem Beweis der Formel A_f vorkommt, ersetzt man r überall durch eine andere Variable a, die in dem Beweis nicht vorkommt, dann ersetzt man f überall durch $\sim(r \supset r)$ und fügt den Beweis für die Formel $S^f_{\sim(r \supset r)}\Gamma|$ ein. Anschließend ersetzt man die Variable a durch r mit Hilfe der Substitutionsregel RR2.

MTR15. Jedes Theorem des Kalküls P_R ist eine Tautologie.

Um dies zu beweisen, zeigt man, dass alle Axiome des Kalküls Tautologien sind. Dass die Schlussregeln des Kalküls Tautologie erhalten, in dem Sinne, dass ihr Schluss eine Tautologie ist, falls ihre Prämissen Tautologien sind, wurde schon für den Kalkül P_1 gezeigt.

MTR16. Haben zwei Formeln des Kalküls P_R denselben Repräsentanten in P_1, dann nehmen sie dieselben Wahrheitswerte für eine beliebige Kombination der Wahrheitswerte der in ihnen vorkommenden Variablen an.

Sind A und B Formeln des Kalküls P_R, welche die Bedingung des Theorems erfüllen, dann folgt aus dem Theorem MTR13, dass $\vdash A \supset B$ und $\vdash B \supset A$. Nach MTR15 sind beide Behauptungen Tautologien. Aus der Wahrheitswertetabelle für Implikation folgt dann die Behauptung.

MTR17. Eine Formel A des Kalküls P_R ist eine Tautologie dann und nur dann, wenn ihr Repräsentant A_f in P_1 eine Tautologie ist.

Wenn der Repräsentant von A in P_1 A_f eine Tautologie ist, ist sie nach dem Theorem MT8 ein Theorem des Kalküls P_1. Dann ist nach MTR14 A ein Theorem in P_R, und somit laut MTR15 eine Tautologie. Um nun zu zeigen, dass die Umkehrung der Behauptung auch gilt, muss man zeigen, dass, wenn A eine Tautologie ist, dies auch für ihren Repräsentanten A_f in P_1 gilt. Nun haben aber die Formeln A und ihre Erweiterung bezüglich der Negation A_0 denselben Repräsentanten in P_1. Wenn man also zeigt, dass A_f eine Tautologie ist, wenn A_0 eine Tautologie ist, dann folgt die Behauptung des Theorems aus MTR16. Dazu beweist man ein Analogon des Lemmas, das man zum Beweisen von MT7 benutzt hat.

MTR18. Eine Formel A des Kalküls P_R ist ein Theorem in P_R, nur wenn ihr Repräsentant in P_1 A_f ein Theorem in P_1 ist.

Ist A ein Theorem in P_R, dann ist A nach MTR15 eine Tautologie. Nach MTR17 ist das dann und nur dann der Fall, wenn ihr Repräsentant in P_1 A_f auch eine Tautologie ist. Nach MT8 folgt dann die Behauptung.

MTR19. Wenn eine Formel A des Kalküls P_R eine Tautologie ist, dann $\vdash A$.

Diese Behauptung folgt aus MTR17, MT8 und MTR18.

Die Metatheoreme MTR14 und MTR18 zeigen uns die Äquivalenz der Systeme P_1 und P_R. Diese Äquivalenz bedeutet, dass es für jedes Theorem des Kalküls P_R einen Beweis ihres Repräsentanten in dem Kalkül P_1 gibt und dass man für jedes Theorem von P_1 einen Beweis der Formel (des Kalküls P_R), die man aus dem gegebenen Theorem durch Substitution der Formel $\sim(r \supset r)$ für f bekommt, konstruieren kann. Wenn man von dieser Behauptung ausgeht, kann man zeigen, dass der Kalkül P_R widerspruchsfrei und vollständig ist.

Das Metatheorem MTR15 und das zu diesem inverse Theorem MTR19 liefern zusammen mit der Definition von logischen Funktoren (durch ihre semantische Interpretation) die Lösung des Entscheidungsproblems für den Kalkül P_R.

Die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome des Kalküls P_R lässt sich negativ beantworten. Bernays zeigte 1926, dass eins der Axiome des Kalküls abhängig ist, weil es sich mit Hilfe von anderen Axiomen beweisen lässt. Bernays entwickelte verschiedene alternative Systeme von Axiomen, von denen wir nur eins, nämlich das System 1 (in Bernays' Terminologie) betrachten. Dieses System unterscheidet sich von den anderen Systemen Bernays' dadurch, dass es nur durch Weglassen eines der Axiome zusammengesetzt wird, und nicht durch Umformulierung einiger der Axiome oder durch Heranziehen anderer Sätze von *Principia* an Stelle eines der Axiome. Das System enthält nicht das Axiom *Assoc*

AR4. $\vdash : p \vee (q \vee r) \,.\supset.\, q \vee (p \vee r)$

Bernays zeigt ([Ber26], 312–313), wie man dieses Axiom aus den übrigen Axiomen ableitet. Den Beweis geben wir an.

1. $\vdash : r \,.\supset .\, p \vee r$ — S^{q}_{r} AR2|

2. $\vdash :: r \,.\supset .\, p \vee r : \supset : .\, q \vee r \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r$ — $S^{q}_{r}\,{}^{r}_{p\vee r}\,{}^{p}_{q}$ AR5|

3. $\vdash : .\, q \vee r \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r$ — RR1 ((2),(1))

4. $\vdash :: .\, q \vee r \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r : .\supset$
   $:: p \,.\vee .\, q \vee r : \supset : .\, p \,.\vee : q \,.\vee .\, p \vee r$ — $S^{q}_{q\vee r}\,{}^{r}_{q\,.\vee .\,p\vee r}$ AR5|

5. $\vdash :: p \,.\vee .\, q \vee r : \supset : .\, p \,.\vee : q \,.\vee .\, p \vee r$ — RR1 ((4),(3))

6. $\vdash :: p \,.\vee : q \,.\vee .\, p \vee r : .\supset : .\, q \,.\vee .\, p \vee r : \vee .\, p$ — $S^{q}_{q\,.\vee .\,p\vee r}$ AR3|

7. $\vdash :: p \,.\vee .\, q \vee r : \supset : .\, q \,.\vee .\, p \vee r : \vee .\, p$ — Syll ((6),(5))

Um diese Formel zu erhalten, benutzt man TR5 (*2.05 von *Principia*), das von Russell und Whitehead (zusammen mit *2.06 (TR6)) auch als Prinzip des Syllogismus bezeichnet („Syll“) und als eine abgeleitete Regel benutzt wird. Man ersetzt p in TR5 durch das Antezedens der Formel (5), q – durch das Konsequens von (5), und r – durch das Konsequens von (6). Aus dieser Formel und (6) bekommt man zunächst nach dem *modus ponens* eine Implikation, deren Antezedens seinerseits mit der Formel (5) übereinstimmt. Durch die Anwendung des *modus ponens* erhält man also die Formel (7). Um eine solche Reihe von Formeln zu verkürzen, schreiben wir wie in *Principia* nur den Schluss, „Syll“, und geben die Formeln an (hier sind das Formeln, die in Zeilen (6) und (5) vorkommen), die als Antezedenzien nacheinander abgetrennt werden.

8. $\vdash : p \,.\supset .\, r \vee p$ — $S^{q}_{p}\,{}^{p}_{r}$ AR2|

9. $\vdash : r \vee p \,.\supset .\, p \vee r$ — $S^{p}_{r}\,{}^{q}_{p}$ AR3|

10. $\vdash : p \,.\supset .\, p \vee r$ — Syll ((9),(8))

11. $\vdash : .\, p \vee r \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r$ — $S^{q}_{p\vee r}\,{}^{p}_{q}$ AR2|

12. $\vdash : .\, p \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r$ — Syll ((11),(10))

13. $\vdash :: .\, p \,.\supset : q \,.\vee .\, p \vee r : .\supset :: q \,.\vee .\, p \vee r : \vee .\, p : .\supset$
    $: .\, q \,.\vee .\, p \vee r : \vee : q \,.\vee .\, p \vee r$ — $S^{q}_{p}\,{}^{r}_{q\,.\vee .\,p\vee r}\,{}^{p}_{q\,.\vee .\,p\vee r}$ AR5|

14. $\vdash :: q \,.\vee.\, p \vee r : \vee .\, p :.\supset :.\, q \,.\vee.\, p \vee r : \vee : q \,.\vee.\, p \vee r$
RR1 ((13),(12))

15. $\vdash :: q \,.\vee.\, p \vee r : \vee : q \,.\vee.\, p \vee r :.\supset : q \,.\vee.\, p \vee r$
$S^{p}_{q\,.\vee.\,p\vee r}$ AR1|

16. $\vdash :: q \,.\vee.\, p \vee r : \vee .\, p :.\supset : q \,.\vee.\, p \vee r$ Syll ((15),(14))

17. $\vdash :.\, p \,.\vee.\, q \vee r : \supset : q \,.\vee.\, p \vee r$ Syll ((16),(7))

Somit wurde das Axiom AR4 aus den anderen Axiomen des Kalküls bewiesen. Noch zu bemerken ist, dass Russell und Whitehead dieses Axiom für den Beweis des Theorems TR6 benutzen, das auch in Beweisen als abgeleitete Schlussregel (als das Prinzip des Syllogismus) gebraucht wird. Bernays will dieses Problem dadurch vermeiden, dass er sich ausschließlich auf TR5 bezieht. Wie er diese Regel darlegt und anwendet, lässt aber vermuten, dass er in der Tat bei dem Beweis auf die „bequemere“ Formulierung des Prinzips des Syllogismus in der Form des Theorems TR6 zurückgreift.

Übungsaufgaben

27. Stellen Sie fest, welche der folgenden Zeichenfolgen Formeln des Kalküls P_R sind.

    a) $p \vee q \,.\supset :. \,p \,.\vee .\, q \supset r : \supset .\, p \vee r$

    b) $\vdash :.\, p \,.\supset .\, p \,.\supset .\, p \,.\supset .\, q$

    c) $\vdash :.\, p \supset r \,.\supset : p \,.\supset .\, p \cdot r$

    d) $\vdash : p \equiv p \vee p$

    Versuchen Sie, ihre Antwort zu begründen, indem Sie die Konstruktionsweise der Formel in der Form eines Baums wiedergeben, und die Klammern in den gegebenen Ausdrücken wiederherstellen.

28. Warum ist die von Russell und Whitehead eingeführte Bezeichnung von Klammern durch Punkte nicht ausreichend für die Beschreibung einiger Eigenschaften des Kalküls P_R? So benötigt man z. B. zum Beweis der meisten Metatheoreme die gegebene Formeldefinition des Kalküls. Die Frage stellt sich im Zusammenhang mit folgender Beobachtung. Beweise von mehreren Behauptungen, die die semantischen Charakteristika des Kalküls betreffen, basieren oft auf Gesetzmäßigkeiten, welche die Gestalt von Formeln aufweisen – den syntaktischen Gesetzmäßigkeiten des Kalküls. Häufig wird Bezug auf die Forderung genommen, dass eine Zeichenfolge, die das Disjunktionszeichen enthält, dann eine Formel des Kalküls ist, wenn sie u. a. mit einer linken Klammer beginnt und mit einer rechten Klammer endet. Betrachten Sie als Hinweis die zwei Formeln

    $p \,.\vee .\, p \vee q$

    $p \vee q \,.\vee .\, p \vee q$

29. Beweisen Sie:

    TR5. $\vdash :.\, q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset .\, p \supset r$

    TR6. $\vdash :.\, p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset .\, p \supset r$

    Zum Beweis von TR6 benutzen Sie TR4 und TR5.

Vorschläge zur Lösung der Übungsaufgaben

Aufgabe 1.

Fragen, die in Zusammenhang mit der gestellten Aufgabe stehen, sind:

- Ist Vagheit eine Eigenschaft, die einem Objekt zukommen kann?
- Welches Ereignis (oder Ereignisse) kann man durch die Eigenschaften der Präzision oder Vagheit charakterisieren, wenn man davon ausgeht, dass die Erkenntnis (eine bestimmte Erkenntnissituation) mittels eines Subjekt-Objekt-Schemas beschrieben werden kann?
- Wie kann man Vagheit definieren?
- Wie vage ist das wissenschaftliche Wissen?

Solche und ähnliche Fragen betrachtet Russell in seinem Aufsatz „Vagueness“ (1923)([Rus23]). Seine Ansichten sind in den folgenden Thesen zusammengefasst.

- Präzision, Genauigkeit und Vagheit sind Eigenschaften einer Relation zwischen einer Darstellung und dem, was dargestellt wird. Was man darstellt, kann nicht vage oder präzise sein, da es für ein Objekt unmöglich ist, eine Eigenschaft in höherem oder niedrigerem Maße zu besitzen, oder mehr oder weniger das zu sein, was es ist. Die Darstellung kann sowohl kognitiv (wie Sprache) als auch mechanisch (wie Photographie) sein. Man definiert die Vagheit, indem man zwei Systeme von aufeinander bezogenen Termen (eins davon das darstellende, und das andere das dargestellte System) miteinander vergleicht. Ein System von Termen ist eine *genaue Darstellung* eines anderen Systems, wenn zwei solche Systeme in einer ein- eindeutigen Beziehung zueinander stehen. Die Darstellung ist *vage*, wenn die Relation des repräsentierenden Systems zu dem repräsentierten nicht ein-eindeutig, sondern ein-mehrdeutig ist. Man spricht von Vagheit dann z. B., wenn zwei verschiedene Systeme ein und dieselbe Darstellung haben.
- Als eins der Charakteristika der natürlichen Sprache realisiert sich Vagheit in bestimmten Eigenschaften verschiedener Wortarten. Bei *Wörtern für wahrnehmbare Qualitäten und quanti-*

tative Einheiten besteht Vagheit darin, dass der Umfang des Begriffs, der durch ein derartiges Wort bezeichnet wird, undefiniert ist. Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten lässt sich nicht immer auf die Sätze anwenden, die solche Wörter enthalten. *Eigennamen*, die wegen ihrer hinweisenden Funktion genau zu sein scheinen, besitzen auch Merkmale, die ihre Vagheit bezeugen. Sie sind auf mehr als eine Person anwendbar. Es ist außerdem unmöglich, den Träger des Namens immer zu identifizieren, wenn dieser z. B. verschiedene Übergangszustände in seinem Leben erlebt. Selbst *logische Wörter* (wie „oder" oder „nicht") erweisen sich als vage. Die Tatsachenmengen, die Teilsätze verifizieren, die durch solche logische Wörter verbunden sind, bleiben unbestimmt. Vage sind auch die Wörter „Wahrheit" und „Falschheit", die der Definition von logischen Funktoren zugrunde liegen. Die Präzision dieser Wörter könnte nur durch Präzision aller Wörter, die in Sätzen vorkommen, bedingt sein, was die Existenz von bestimmten Grenzen für die Tatsachenmengen voraussetzt, die den Wahrheitswert jedes Satzes eindeutig bestimmen. Aber die Präzision der logischen Wörter kann man einfach voraussetzen oder annehmen. Logische Wörter sind weniger vage, denn sie werden auf Wörter angewandt.

– Ist Vagheit ein notwendiges Merkmal des wissenschaftlichen Wissens? Die Möglichkeit, jede Beobachtung zu präzisieren, zeigt, dass jedes Wissen vage ist. Die Entwicklung der Wissenschaft lässt sich als eine Präzisierung des Wissens beschreiben. Im Laufe dieser Entwicklung schreitet ein Wissenschaftler von den vagen Urteilen zu präziseren fort. Für die Verifizierung eines vagen Urteils braucht man eine Menge von Tatsachen, für die Verifizierung eines präzisen – nur eine. Da die Verifizierung nicht immer die Wahrheit des Urteils bestätigt, unterscheidet Russell zwischen präzisen und genauen Urteilen. Die letzten sind sowohl präzise als auch wahr. Mit der Präzisierung eines Urteils wächst sein pragmatischer Wert.

Aufgabe 2.

Die Lösung dieser Aufgabe basiert auf den semiotischen Prinzipien, die mit der Unterscheidung zwischen der Objekt- und der Metasprache verbunden sind. Um zwischen dem Gebrauch eines Zeichens und dem Erwähnen dieses Zeichens (oder der Rede von dem Zeichen) zu unterscheiden, benutzt man Anführungszeichen. Sie werden dann eingesetzt, wenn man über das Zeichen selbst und nicht über das von dem Zeichen Bezeichnete spricht. Diese Unterscheidung ist allerdings nicht vollständig. Wenn man auf den Gebrauch einer semantisch abgeschlossenen Sprache für die Beschreibung der semantischen Beziehungen verzichtet, kann man nicht nur zwischen der Objektsprache, in der man über Bezeichnetes spricht, und der Metasprache, in der man über die Objektsprache spricht, unterscheiden. Es ist auch möglich, über die Beziehungen zwischen der Objektsprache und der Metasprache zu sprechen. Dafür braucht man eine dritte Sprache. Der Gebrauch von Anführungszeichen erlaubt uns, innerhalb einer (natürlichen) Sprache die Unterschiede wiederzugeben, die bei einer Formalisierung die Einführung mehrerer Sprachen bezweckt. In diesem Zusammenhang schlägt Curry ([Cur63]) vor, für Ausdrücke einer Sprache zwei Arten von Anführungszeichen einzuführen. Wird ein Ausdruck der Sprache gebraucht, um über etwas von ihm verschiedenes zu sprechen, wird er ohne Anführungszeichen benutzt. Ferner unterscheidet Curry einerseits einfache Anführungszeichen für das Erwähnen eines Ausdrucks und andererseits zweifache Anführungszeichen, die in allen anderen Fällen gebraucht werden, in denen Anführungszeichen in der Sprache vorkommen. Entstehen bei der Lösung der Aufgabe Schwierigkeiten, kann es hilfreich sein, den jeweiligen Ausdruck (mit Anführungszeichen) oder das Bezeichnete zu definieren oder zu beschreiben, und dann zu versuchen, diese Definition an Stelle des Ausdrucks in den jeweiligen Satz einzufügen. Logik kann man als die Wissenschaft von dem richtigen Schließen und ‚Logik' als ein Wort aus fünf Buchstaben definieren. So sieht man, dass z. B. in dem Satz f) einfache Anführungszeichen erforderlich sind.

Aufgabe 3.

Eine der schwierigsten Fragen, auf die man bei der Analyse des Textes von Freges Aufsatz stößt, ist die Frage, warum Frege einerseits behauptet, dass der Sinn eines Zeichens zwischen seiner Bedeutung (dem Gegenstand) und der Vorstellung von dieser Bedeutung liegt ([FBB], 44), und andererseits der Sinn eines Zeichens der Vermittler zwischen dem Zeichen und seiner Bedeutung ist ([WB], 96). Was ist unter dieser vermittelnden Rolle in beiden Fällen zu verstehen?

Wenn Frege über die Unterschiede zwischen der Vorstellung, die man mit einem Zeichen verbindet, und dem Sinn des Zeichens spricht, weist er auf folgende Charakteristika einer Vorstellung hin. Die Vorstellung ist subjektiv und ist an das Bewusstsein einer bestimmten Person gebunden, so dass man behaupten kann, die Vorstellung „befindet sich“ dort. Diesen Schluss bestätigt die Tatsache, dass selbst Vorstellungen von ein und demselben Gegenstand bei mehreren Personen verschieden sind. Die Subjektivität einer Vorstellung äußert sich auch darin, dass nur die Feststellung der Unterschiede von Vorstellungen von zwei Personen möglich ist, nicht aber ein genauer Vergleich. Dass die Rede von einer Vorstellung zusätzliche Angaben außer der Erwähnung des Gegenstands der Vorstellung verlangt, solche wie Angaben zum Träger der Vorstellung sowie zum Zeitpunkt ihres Vorkommens, weist darauf hin, dass die Vorstellung etwas Einzelnes ist. Ein weiteres Argument dafür ist, dass die Vorstellung, als Gegenstand der Betrachtung genommen, nicht mit der Vorstellung eines Vorstellenden vergleichbar ist. Wie die Rede von einem Einzelnen das Einzelne als Einzelnes eliminiert, indem sie dieses auf eine Eigenschaft oder eine Summe von Eigenschaften zurückführt, so beraubt auch die Betrachtung einer Vorstellung diese ihrer Identität mit sich selbst. Einem Unterschied der Vorstellungen kann ein Unterschied des Bezeichnenden entsprechen. In einem solchen Fall ist aber der Unterschied der Vorstellungen nicht für jeden bemerkbar und lässt sich vor allem in der Dichtkunst durch Färbungen und Beleuchtungen ausdrücken.

Der Sinn eines Zeichens ist im Gegensatz zu der Vorstellung kein „Teil oder Modus der Einzelseele“. Ein und derselbe Sinn ist mehreren zugänglich, und die Rede von ihm verlangt keine zusätzlichen Angaben. Der Sinn des Zeichens liegt zwischen der Bedeutung des Zeichens (dem Gegenstand selbst) und der Vorstellung von diesem Gegenstand. Nach Frege bedeutet das, dass der Sinn nicht mit dem Gegenstand identisch, aber auch nicht subjektiv ist. Man kann ein und denselben Gegenstand durch mehrere Zeichen bezeichnen, deren Verschiedenheit auf die Verschiedenheit des Sinnes dieser Zeichen deutet. Der Sinn des Zeichens, den Frege als die Art des Gegebenseins des Gegenstands definiert, findet aber seinen Ausdruck in einem Zeichen. Gegeben ist der Gegenstand offenbar einem erkennenden Subjekt, und die Eigenschaften, die das Subjekt in dem Gegenstand entdeckt (oder ihm zuschreibt), und mit deren Hilfe das Subjekt den einen Gegenstand von den anderen Gegenständen unterscheidet, könnten das sein, woraus der Sinn des Zeichens besteht. Auf die Möglichkeit einer solchen Auffassung des Sinnes deutet zumindest Freges Beispiel „Aristoteles" für einen Eigennamen.

Eine andere Frage in diesem Zusammenhang ist, wie man die Bestandteile eines Wahrheitswertes feststellt und warum man das Unterscheiden von Teilen innerhalb des Wahrheitswertes mit dem Schritt vom Gedanken zu seinem Wahrheitswert gleichsetzen kann. Bestandteile eines Gedankens können nach Frege als Subjekt und Prädikat beschrieben werden. Die Bestandteile eines Wahrheitswertes werden durch Rückgang zum Gedanken definiert. Frege schlägt vor, die Beziehungen zwischen dem Teil und dem Ganzen vom Satz auf seine Bedeutung zu übertragen, so dass man die Bedeutung eines Teils des Satzes als einen Bestandteil der Bedeutung des Satzes definieren kann. Hätte man kein Wissen von dem bestimmten Gedanken, der einen gegebenen Wahrheitswert hat, dann könnte man gewisse Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Bestandteile der Bedeutung darin finden, dass durch das Ganze (den Wahrheitswert) und einen Teil dieses Ganzen (Gegenstand oder Begriff) der andere Teil (Begriff oder Gegenstand) nicht eindeutig bestimmt ist. Ein Gegenstand kann unter mehrere Begriffe fallen, und einem Begriff können mehrere Gegenstände entsprechen, die unter ihn fallen. Die Teile, die man innerhalb einer Bedeutung unterscheiden kann, lassen sich im Fall eines einfachen Satzes, der einem Subjekt etwas prädiziert, als ein Gegenstand (die Bedeutung des Wortes, dessen logisches Korrelat das Subjekt ist) und ein Begriff (die Bedeutung des grammatischen Prädikats), der diesem Gegenstand im Satz zugesprochen oder abgesprochen wird, definieren. Durch das Unterscheiden von Teilen innerhalb eines Wahrheitswertes werden die Wahrheitsbedingungen des Satzes geklärt, der den fraglichen Wahrheitswert bezeichnet.

Aufgabe 4.

Die markierten Ausdrücke kann man folgenden syntaktischen Kategorien zuordnen und sie entsprechend bezeichnen:

i. „Wittgenstein" ist ein Name (n)

ii. „$9 > 7$" ist ein Satz (s)

iii. „oder“ (genauer gesagt „__________oder__________“) ist hier ein Funktor der Art c) oder ein Konnektor (F_2sss)

iv. „ist der Verfasser des *Tractatus*“ ist ein Funktor der Art b) oder ein Prädikator (F_1ns)

v. „Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte“ ist ein Funktor der Art d) (F_1sn)

vi. „der Verfasser des *Tractatus*“ ist ein Funktor der Art a) oder ein Operator (F_1nn)

Aufgabe 5.

Um zu prüfen, ob die gegebenen Ausdrücke korrekt gebildet sind, kann man versuchen, ihre Konstruktionsweise wiederzugeben, indem man der Definition des Ausdrucks der Sprache entsprechend die fehlenden Klammern in die Ausdrücke einfügt. Man sollte dabei beachten, dass der Buchstabe a ein Zeichen der Metasprache ist, das die Funktion hat, einen beliebigen Ausdruck der Sprache selbst zu vertreten. Ist ein Ausdruck korrekt gebildet, dann kann keinem Vorkommen einer rechten Klammer in dem Ausdruck ein Vorkommen einer linken Klammer folgen, und vor einer linken Klammer kann nur eine andere linke Klammer stehen. Also dürfen sich Klammern in einem Ausdruck der Sprache nur links bei der Anfangsklammer des Ausdrucks häufen. Korrekt gebildet sind Ausdrücke b), e) und d), der letzte – unter der Bedingung, dass a hier für „1“ steht. Der Ausdruck a) „(1(111))“ ist offenbar kein Ausdruck der gegebenen Sprache, da er durch die Anwendung des Ausdrucks a (hier „(111)“) auf den Ausdruck „1“ gebildet wurde (dadurch also, dass „1“ hier links von a geschrieben ist). Das von dem Ausdruck b) bezeichnete Objekt ist ||, für den Ausdruck e) ist das | . . . || (wobei | . . . | das Objekt ist, das von dem Ausdruck der Gestalt „(a1)“ bezeichnet wird), für den Ausdruck d) unter der genannten Bedingung – das Objekt ||||||.

Aufgabe 6.

Haus	– nicht leer, konkret, allgemein, nicht-registrierend, absolut, positiv
das runde Quadrat	– leer, konkret, einzeln, registrierend, absolut, positiv
Form	– nicht leer, abstrakt, allgemein, nicht-registrierend, absolut, positiv

Aufgabe 7.

Für die Lösung dieser Aufgabe sollte man einen Begriff finden und prüfen, ob der gefundene Begriff dem gegebenen untergeordnet ist. Man kann versuchen, den Umfang des gegebenen Gattungsbegriffs in seine Arten zu unterteilen, indem man z. B. die Frage stellt, welche Gebäude (Wissenschaften, Sprachen oder Sätze) es überhaupt gibt. Hier geht es um die Anwendung der logischen Operation der Einteilung des Begriffsumfangs. Diese besteht darin, dass man ein Merkmal, das zusammen mit dem Gattungsmerkmal den Inhalt eines der Artbegriffe ausmacht, und das den anderen Arten derselben Gattung nicht zukommt, der Einteilung zugrunde legt, so dass die durch diese Einteilung gewonnenen Artbegriffe in Bezug auf ihre Umfänge sich einerseits nicht überschneiden und andererseits den Umfang des Gattungsbegriffs völlig ausschöpfen. Für die Lösung der Aufgabe reicht es aber, einen solchen Einteilungsgrund zu finden, und nur einen Artbegriff zu bestimmen, da die Einteilung auch dichotom sein kann. Bei einer solchen Einteilung wird der Umfang des Gattungsbegriffs in einen positiven und einen negativen, zu dem positiven kontradiktorischen Begriff zerlegt. Einen Begriff kann man auch mit einer Menge von Merkmalen identifizieren. Beachtet man, dass der Artbegriff laut dem Gesetz der Reziprozität einen kleineren Umfang als der Gattungsbegriff hat, dafür aber einen reicheren Inhalt besitzt, den man aus dem Inhalt des Gattungsbegriffs durch Hinzufügen zusätzlicher Merkmale gewinnt, dann ist eins der Kriterien, dass der gefundene Begriff der gesuchte Artbegriff ist, die Möglichkeit, den Artbegriff durch den Gattungsbegriff zu definieren. Wäre z. B. der Aufzug nicht ein Teil eines Hauses, sondern eine Art von Häusern, dann wäre es möglich, über jeden Aufzug zu behaupten, dass er ein Haus ist.

Aufgabe 8.

a) unvereinbar, disparat

b) unvereinbar, koordiniert

c) unvereinbar, kontradiktorisch

d) vereinbar, Art und Gattung

e) unvereinbar, disparat

f) vereinbar, schneiden sich

g) vereinbar, äquipollent

h) unvereinbar, konträr

Aufgabe 9.

Kategorische Aussagen sind a), b), c), g). Hypothetische Aussagen sind d), k) und e). Den letzten dieser Sätze „Das Gesetz des Widerspruchs gilt nicht für zwei beliebige Aussagen“ kann man in der Form „Sind zwei Aussagen beliebig (gewählt), gilt das Gesetz des Widerspruchs für diese nicht immer“ präsentieren. Dadurch wird klar, dass dieser Satz ein zusammengesetzter Satz ist, der eine Bedingung beinhaltet, welche die Wahrheit eines der Teilsätze dieses Satzes sowie des ganzen Satzes gewährleistet. Relationsaussagen sind f), h) und i). Die Aussage j) ist eine Aussage über eine propositionale Einstellung.

Versuchen wir nun die Aussage a) so zu formulieren, dass diese aus einer kategorischen Aussage zu einer Relationsaussage wird. Das Subjekt der gegebenen kategorischen Aussage wird durch den Namen „Sokrates“, und das Prädikat durch das Begriffswort „Mensch“ bezeichnet. Identifizieren wir den Umfang des Begriffs *Sokrates* mit dem einzelnen Gegenstand (einem bestimmten Menschen), den man durch die Merkmale beschreibt, die den Inhalt des Begriffs ausmachen, und den Umfang des Begriffs *Mensch* mit der Klasse der Gegenstände, jeden von denen man als einen Menschen definieren kann, dann wird in der Aussage eine Relation zwischen einem Gegenstand und einer Klasse von Objekten behauptet. Man behauptet also „Sokrates gehört zu (ist ein Element) der Klasse von Menschen“. Die Aussage b) (sowie c) und g)) könnten wir dann dementsprechend als Aussage über die Relation zwischen zwei Klassen auslegen.

Versucht man nun eine kategorische Aussage als eine quantifizierte Aussage darzustellen, geht man erstens davon aus, dass eine kategorische Aussage etwas über die Relation zwischen zwei Begriffen behauptet, und zweitens dass in der quantifizierten Aussage die Bedingungen, unter denen der komplexe Ausdruck, den man aus der gegebenen kategorischen Aussage gewinnen kann, wahr ist, von den Bestimmungen des Subjekts der kategorischen Aussage getrennt und ausdrücklich formuliert sind. Da man über jeden (nichtleeren) Begriff behaupten kann, dass unter diesen nach der Terminologie Freges ein Gegenstand fällt, kann man die Relation zwischen zwei Begriffen (oder Klassen der Gegenstände, die unter diese Begriffe fallen) als eine Relation zwischen Aussagen auffassen, die eine Beziehung zwischen einem (unbestimmten) Gegenstand und dem jeweiligen Begriff zum Ausdruck bringen. Dass der Gegenstand unbestimmt ist, ist dadurch bedingt, dass man über die Relation zwischen Begriffen und nicht zwischen einzelnen Gegenständen spricht. Die Aussage c) kann man in der Form einer quantifizierten Aussage z. B. so darstellen: „Für einige x gilt: x ist ein Mensch, und x ist ein Grieche“. Diese Behauptung drückt die Wahrheitsbedingungen einer partikulär bejahenden Aussage aus. Eine solche Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn sich die Umfänge des Subjekts und des Prädikats schneiden. Dies ist dann der Fall, wenn es mindestens einen Gegenstand gibt, der unter die beiden Begriffe fällt.

Aufgabe 11.

Nehmen wir als Beispiel die Aussagen *Alle Vögel können fliegen* (A) und *Kein Vogel kann fliegen* (E). In der Aussage A ist das Subjekt dem Prädikat subordiniert, was u. a. impliziert, dass die Aussage nur dann wahr sein kann, wenn der Umfang des Subjekts ein Teil des Umfangs des Prädikats ist (oder mit diesem zusammenfällt). In der Aussage E schließen sich die Umfänge der beiden Termini S und P aus. Die Aussage A ist offenbar falsch, also gibt es mindestens einen Vogel, der nicht fliegen kann. Die Aussage E ist auch falsch. Man kann demzufolge zumindest einen Vogel finden, der fliegen kann. Die beiden Aussagen sind also deswegen falsch, weil man mindestens einen Vogel findet, der nicht zu den fliegenden Wesen gehört, und mindestens einen, der fliegen kann. Das ist dann der Fall, wenn die Umfänge der Begriffe *Vögel* und *fliegende Wesen* sich schneiden und somit eine (in diesem Fall beide) partikuläre Aussage wahr ist.

Anders: Ist die Aussage A falsch, dann ist die zu A kontradiktorische Aussage O wahr, was die Wahrheit von E nach der Definition der Beziehung der Subalternation nicht impliziert. Aus der Falschheit der Aussage E folgt, dass die entsprechende kontradiktorische Aussage I wahr ist, was aber die Wahrheit der subordinierenden Aussage A nicht impliziert.

Aufgabe 12.

Ist die partikulär bejahende Aussage I wahr, dann ist die zu I kontradiktorische Aussage E falsch. Die Falschheit von E impliziert aber nicht die Wahrheit der konträren Aussage A. Also folgt aus der Wahrheit von I die Wahrheit der allgemein bejahenden Aussage A mit derselben Materie nicht.

Aufgabe 13.

Um diese Aufgabe zu lösen, fängt man mit der Analyse des Schlusssatzes an. Man bestimmt das Subjekt und das Prädikat des Schlusses, und stellt auf diese Weise fest, welche Prämisse die größere und welche die kleinere ist, welcher Terminus der mittlere Terminus ist, und welche Stelle er in den Prämissen hat.

Betrachten wir den Syllogismus a): Wenn A keinem B zukommt, B aber einigem C, dann muss A einigem C nicht zukommen. Das Subjekt des Schlusses ist C, das Prädikat – A. B ist offenbar der mittlere Terminus, der nur in den Prämissen vorkommt. In der größeren Prämisse ist B das Subjekt, in der kleineren – das Prädikat. Der Modus hat die Form: *Kein B ist A – Einige C sind B – Also sind einige C nicht A*. Dieser ist ein Modus der ersten Figur (*Ferio*).

b) *Jedes N ist M – Ein X ist nicht M – Ein X ist nicht N*
   2. Figur (*Baroco*)

c) *Jedes B ist A – Einiges C ist B – Einiges C ist A*
   1. Figur (*Darii*)

d) *Jedes S ist R – Ein S ist P – Ein R ist P*
   3. Figur (*Disamis*)

e) *Jedes N ist M – Kein X ist M – Kein N ist X*
   2. Figur (*Camestres*, wenn man den Schluss umkehrt)

f) *Jedes S ist R – Ein S ist nicht P – Ein R ist nicht P*
   3. Figur (*Bocardo*)

Aufgabe 14.

Durch die einfache Umkehrung der beiden Prämissen des ersten der hier angegebenen Syllogismen bekommt man den Schluss nach dem Modus *Ferio*.

Fresison

$$\begin{array}{l} \text{Kein Rabe ist weiß} \\ \text{Einiges Weiße ist Lebewesen} \\ \hline \text{Einige Lebewesen sind nicht Raben} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Kein Weißes ist Rabe} \\ \rightarrow \text{Einige Lebewesen sind Weißes} \\ \hline \text{Einige Lebewesen sind nicht Raben} \end{array}$$

Durch die einfache Umkehrung der kleineren Prämisse, das Auswechseln von Prämissen und die einfache Umkehrung des Schlusses bekommt man einen Schluss nach dem Modus *Celarent*.

Camestres

$$\begin{array}{l} \text{Alle } P \text{ sind } M \\ \text{Alle } S \text{ sind nicht } M \\ \hline \text{Alle } S \text{ sind nicht } P \end{array} \qquad \rightarrow \text{Alle } M \text{ sind nicht } S \qquad \begin{array}{l} \text{Alle } M \text{ sind nicht } S \\ \text{Alle } P \text{ sind } M \\ \hline \rightarrow \text{Alle } P \text{ sind nicht } S \end{array}$$

Durch die Umkehrung mit Einschränkung der kleineren Prämisse bekommt man einen Schluss nach dem Modus *Ferio*.

Felapton

$$\begin{array}{l} \text{Alle } M \text{ sind nicht } P \\ \text{Alle } M \text{ sind } S \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind nicht } P \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{Alle } M \text{ sind nicht } P \\ \text{Einige } S \text{ sind } M \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind nicht } P \end{array}$$

Durch die einfache Umkehrung der größeren Prämisse, das Auswechseln von Prämissen und die einfache Umkehrung des Schlusses bekommt man einen Schluss nach dem Modus *Darii.*

Disamis

$$\begin{array}{lll} \text{Einige } M \text{ sind } P & \rightarrow \text{Einige } P \text{ sind } M & \text{Alle } M \text{ sind } S \\ \text{Alle } M \text{ sind } S & & \text{Einige } P \text{ sind } M \\ \cline{1-1} \cline{3-3} \text{Einige } S \text{ sind } P & & \rightarrow \text{Einige } P \text{ sind } S \end{array}$$

Aufgabe 15.

Bocardo ist durch Zurückführung auf das Unmögliche zu beweisen.

$$\begin{array}{l} \text{Einige Athener sind nicht Logiker} \\ \text{Alle Athener sind Griechen} \\ \hline \text{Einige Griechen sind nicht Logiker} \end{array}$$

Man nimmt an, dass der Schluss falsch ist, es soll also gelten: Alle Griechen sind Logiker. Das ist eine allgemein bejahende Aussage, und, um den Modus *Barbara* der 1. Figur anzuwenden, möchten wir noch eine allgemein bejahende Aussage aus den gegebenen Prämissen nehmen. Das ist die 2. Prämisse. Der Schluss ist:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Griechen sind Logiker.} \\ \text{Alle Athener sind Griechen.} \\ \hline \text{Alle Athener sind Logiker.} \end{array}$$

Die Behauptung dieses Schlusses widerspricht der größeren Prämisse des gegebenen Syllogismus. Also muss die Annahme verworfen werden, und der Schluss des gegebenen Syllogismus ist richtig.

Aufgabe 16.

Formeln des Kalküls P_1 sind a), e), f).

Aufgabe 17.

Die Definition einer Formel des Kalküls bestimmt u. a., zu welchen syntaktischen Kategorien Formeln des Kalküls gehören. Formeln, die aus einer allein stehenden Variablen bestehen, gehören zu den Variablen, eine Formel der Gestalt f gehört zu den Konstanten, und alle anderen Formeln des Kalküls sind Formen.

Aufgabe 18.

Um diese Aufgabe zu lösen, sucht man nach dem Hauptzeichen der gegebenen Formel des Kalküls P_{erw}, das (falls dieses Zeichen binär ist) die Formel in zwei Teilformeln teilt und somit eine Auskunft über die Struktur der Formel gibt. Für die Formel a) $(((p \supset q) \vee \sim r) \cdot (r \equiv p)) \supset q$ ist das Hauptzeichen das zweite Implikationszeichen, so dass die Formel sich in der Form $(\alpha \supset \beta)$ schreiben lässt. Man kann deshalb, von der Definition einer Formel der gegebenen Sprache ausgehend, Formel a) zunächst so darstellen:

$$C\alpha\beta,$$

wobei α das Antezedens der Implikation ist (also die Formel $((p \supset q) \vee \sim r) \cdot (r \equiv p))$ und β das Konsequens. Da das Konsequens eine Aussagenvariable ist, wird β nicht weiter analysiert. Nun geht es um die Übersetzung des Antezedens der Implikation. In dieser Teilformel ist das Hauptzeichen die Konjunktion. Die Formel α hat also die Gestalt $K\alpha_1\beta_1$. Die ganze Formel hat also die Gestalt $CK\alpha_1\beta_1\beta$. α_1 steht nun für die Formel $((p \supset q) \vee \sim r)$ und β_1 für die Formel $(r \equiv p)$. α_1 können wir deshalb als Disjunktion von zwei weiteren Teilformeln α_2 und β_2, und β_1 als Äquivalenz von noch zwei Teilformeln darstellen. Die ganze Formel hat also die Gestalt

$$CKA\alpha_2\beta_2E\alpha_3\beta_3\beta$$

Nun ist α_2 die Implikation von zwei Formeln p und q, β_2 die Negation der Formel r, α_3 die Formel r, β_3 die Formel p und β die Formel q. Wir erhalten den Ausdruck:

$$CKACpqNrErpq$$

Die Formel b) $(\sim p \equiv q) \supset (p \vee (r \cdot \sim s))$ übersetzt man als

$$CENpqApKrNs$$

Die Formel c) $((p \supset q) \supset r) \supset s$ als

$$CCCpqrs$$

Die Formel d) $p \supset (q \supset (r \supset s))$ als

$$CpCqCrs$$

Die Formel e) $((p \not\equiv q) \cdot {\sim}r) \supset ((r \equiv s) \vee {\sim}(p \cdot q))$ als

$$CKJpqNrAErsNKpq$$

Bei der Übersetzung von Formeln des Kalküls P_{erw} in die „Łukasiewicz-Sprache" geht man analog vor. Die Formel, die wir in a) haben ($KpNCNqArs$), hat die Gestalt $K\alpha\beta$, was wir in der Sprache des P_{erw} als $(A \cdot B)$ darstellen können. A ist nun die Formel p. B hat die Gestalt ${\sim}B_1$. B_1 ist die Implikation $(A_1 \supset B_2)$, wobei A_1 die Negation von q ist, und B_2 die Disjunktion von r und s. Die Formel, nach der wir suchen, ist also

$$p \cdot {\sim}({\sim}q \supset (r \vee s))$$

Die Formel $ANCKNANpqrsNp$ übersetzt man als

$${\sim}(({\sim}({\sim}p \vee q) \cdot r) \supset s) \vee {\sim}p$$

Aufgabe 19.

Nach der Definition des Beweises in P_1 ist jeder Beweis eine endliche Folge von Formeln. Diese Folge ist ein Beweis ihrer letzten Formel. Jede Formel dieser Folge kann außerdem ein Axiom des Kalküls sein. Schreibt man also ein Axiom des Kalküls auf, dann ist die Folge von Formeln, die aus dieser einzigen Formel besteht, der Beweis des Axioms des Kalküls.

Aufgabe 20.

Beweis:

1. $(s \supset (p \supset q)) \supset ((s \supset p) \supset (s \supset q))$ A2
2. $(p \supset (q \supset p)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset p))$ $S^{s}_{p}\,{}^{p}_{q}\,{}^{q}_{p}$ (1)|
3. $p \supset (q \supset p)$ A1
4. $(p \supset q) \supset (p \supset p)$ R1 ((2),(3))

5. $(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$ $\qquad S^{q}_{q \supset p}(4)|$
6. $(p \supset p)$ $\qquad$ R1 ((5),(3))

Aufgabe 21.

T2. $f \supset p$

1. $p \supset (q \supset p)$ $\qquad$ A1
2. $(((p \supset f) \supset f) \supset p) \supset (f \supset (((p \supset f) \supset f) \supset p))$ $\qquad S^{p}_{((p \supset f) \supset f) \supset p}\,{}^{q}_{f}(1)|$
3. $((p \supset f) \supset f) \supset p$ $\qquad$ A3
4. $f \supset (((p \supset f) \supset f) \supset p)$ $\qquad$ R1 ((2),(3))
5. $(s \supset (p \supset q)) \supset ((s \supset p) \supset (s \supset q))$ $\qquad$ A2
6. $(f \supset (((p \supset f) \supset f) \supset p)) \supset$
   $((f \supset ((p \supset f) \supset f)) \supset (f \supset p))$ $\qquad S^{s}_{f}\,{}^{p}_{(p \supset f) \supset f}\,{}^{q}_{p}(5)|$
7. $(f \supset ((p \supset f) \supset f)) \supset (f \supset p)$ $\qquad$ R1 ((6),(4))
8. $f \supset ((p \supset f) \supset f)$ $\qquad S^{p}_{f}\,{}^{q}_{p \supset f}(1)|$
9. $f \supset p$ $\qquad$ R1 ((7),(8))

T3. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$

Eine Möglichkeit, den Beweis für das Theorem zu konstruieren, besteht darin, dass man die Theoreme T2 und T4 benutzt.

1. $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ $\qquad$ T4
2. $(f \supset q) \supset ((p \supset f) \supset (p \supset q))$ $\qquad S^{q}_{f}\,{}^{r}_{q}(1)|$
3. $(f \supset p)$ $\qquad$ T2
4. $(f \supset q)$ $\qquad S^{p}_{q}(3)|$
5. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$ $\qquad$ R1 ((4),(2))

Diese Folge von Formeln enthält außer durch die Definition des

Beweises vorgesehenen Vorkommen auch Formeln, die im Kalkül schon bewiesen wurden und deren Vorkommen in einem Beweis in dem Kalkül P_1 durch die Definition des Beweises nicht explizit angegeben ist. Doch verstößt die hier konstruierte Folge nicht gegen diese Definition. Das erklärt sich dadurch, dass in die hier geschriebene Folge vor der Formel, die schon bewiesen wurde, man immer eine Folge von Formeln einfügen kann, die ein Beweis dieser Formel ist. Der Beweis also, den wir hier angeben, ist in der Tat ein verkürzter Beweis, den man vervollständigen kann, indem man vor der ersten und der dritten Zeilen dieses Beweises noch die Beweise der Theoreme T4 und T2 einfügt.

Aufgabe 22.

T6. $((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)$

1. $((p \supset f) \supset (p \supset q)) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p))$
   $S^{p}_{p \supset f}\ {}^{q}_{p \supset q}\ {}^{r}_{p}$ T5|
2. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$ T3
3. $((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)$ R1 ((1),(2))

T7. $((p \supset q) \supset p) \supset p$

1. $((p \supset f) \supset (p \supset f)) \supset (((p \supset f) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset f))$
   $S^{s}_{p \supset f}\ {}^{q}_{f}$ A2|
2. $(p \supset f) \supset (p \supset f)$ $S^{p}_{p \supset f}$ T1|
3. $((p \supset f) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset f)$ R1 ((1),(2))
4. $(((p \supset f) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset f)) \supset$
   $((((p \supset f) \supset f) \supset p) \supset (((p \supset f) \supset p) \supset p))$
   $S^{p}_{(p \supset f) \supset p}\ {}^{q}_{(p \supset f) \supset f}\ {}^{r}_{p}$ T5|
5. $(((p \supset f) \supset f) \supset p) \supset (((p \supset f) \supset p) \supset p)$ R1 ((4),(3))
6. $((p \supset f) \supset f) \supset p$ A3

7. $((p \supset f) \supset p) \supset p$ R1 ((5),(6))

8. $(((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)) \supset$
$((((p \supset f) \supset p) \supset p) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset p))$
$S^{p}_{(p\supset q)\supset p}\ {}^{q}_{(p\supset f)\supset p}\ {}^{r}_{p}$ T5|

9. $((p \supset q) \supset p) \supset ((p \supset f) \supset p)$ T6

10. $(((p \supset f) \supset p) \supset p) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset p)$ R1 ((8),(9))

11. $((p \supset q) \supset p) \supset p$ R1 ((10),(7))

Aufgabe 23.

T2. $f \supset p$

1. $\vdash f \supset ((p \supset f) \supset f)$ $S^{p}_{f}\ {}^{q}_{p\supset f}$ A1|
2. f Hypothese
3. $f \vdash (p \supset f) \supset f$ R1 ((1),(2))
4. $\vdash ((p \supset f) \supset f) \supset p$ A3
5. $f \vdash p$ R1 ((4),(3))
6. $\vdash f \supset p$ MT2 (5)

T3. $(p \supset f) \supset (p \supset q)$

1. $p \supset f$ Hypothese 1
2. p Hypothese 2
3. $p \supset f, p \vdash f$ R1 ((1),(2))
4. $\vdash f \supset q$ Variante von T2
5. $p \supset f, p \vdash q$ R1 ((4), (3))
6. $p \supset f \vdash p \supset q$ MT2 (5)
7. $\vdash (p \supset f) \supset (p \supset q)$ MT2 (6)

Aufgabe 25.

Wir bringen zunächst die gegebenen Formeln auf die konjunktive Normalform. Das Metatheorem MT9 erlaubt, zwischen den Zeilen, die man durch Ersetzen einer Teilformel der gegebenen Formel des Kalküls durch eine zu dieser äquivalente Formel bekommt, das Äquivalenzzeichen zu schreiben.

$$p \supset ((p \supset q) \supset q)$$

$$\equiv {\sim}p \vee ({\sim}({\sim}p \vee q) \vee q)) \qquad \text{ID}$$

$$\equiv {\sim}p \vee (({\sim}{\sim}p \cdot {\sim}q) \vee q) \qquad \text{De Morgansches Gesetz}$$

$$\equiv {\sim}p \vee ((p \cdot {\sim}q) \vee q) \qquad \text{Das Gesetz der doppelten Negation}$$

$$\equiv {\sim}p \vee ((q \vee p) \cdot (q \vee {\sim}q)) \qquad \text{Symmetrie und Distributivität der Disjunktion}$$

$$\equiv ({\sim}p \vee (q \vee p)) \cdot ({\sim}p \vee (q \vee {\sim}q)) \qquad \text{Distributivität der Disjunktion}$$

$$\equiv ({\sim}p \vee q \vee p) \cdot ({\sim}p \vee q \vee {\sim}q) \qquad \text{Assoziativität der Disjunktion}$$

Da nun in beiden einfachen Disjunktionen jeweils eine Variable und ihre Verneinung vorkommen, sind beide Disjunktionen wahr und die Formel ist eine Tautologie.

$$(p \supset q) \supset ((p \cdot r) \supset (q \cdot r))$$

$$\equiv {\sim}({\sim}p \vee q) \vee ({\sim}(p \cdot r) \vee (q \cdot r)) \qquad \text{ID}$$

$$\equiv ({\sim}{\sim}p \cdot {\sim}q) \vee ({\sim}(p \cdot r) \vee (q \cdot r)) \qquad \text{De Morgansches Gesetz}$$

$$\equiv (p \cdot {\sim}q) \vee (({\sim}p \vee {\sim}r) \vee (q \cdot r)) \qquad \text{Das Gesetz der doppelten Negation, de Morgansches Gesetz}$$

$$\equiv (p \cdot {\sim}q) \vee ((({\sim}p \vee {\sim}r) \vee q) \cdot (({\sim}p \vee {\sim}r) \vee r))$$
Distributivität der Disjunktion

$$\equiv ((p \cdot {\sim}q) \vee (({\sim}p \vee {\sim}r) \vee q)) \cdot ((p \cdot {\sim}q) \vee (({\sim}p \vee {\sim}r) \vee r))$$
Distributivität der Disjunktion

$$\equiv ((((({\sim}p \vee {\sim}r) \vee q) \vee p) \cdot ((({\sim}p \vee {\sim}r) \vee q) \vee {\sim}q))\cdot$$

$$((((\sim p \vee \sim r) \vee r) \vee p) \cdot (((\sim p \vee \sim r) \vee r) \vee \sim q))$$

Symmetrie und Distributivität der Disjunktion

$$\equiv (\sim p \vee \sim r \vee q \vee p) \cdot (\sim p \vee \sim r \vee q \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim r \vee r \vee p) \cdot (\sim p \vee \sim r \vee r \vee \sim q)$$

Assoziativität der Konjunktion und der Disjunktion

Diese Formel ist offentsichtlich auch eine Tautologie.

Aufgabe 26.

Man geht von der Definition einer Formel des Kalküls P_{erw} aus. Bekannt ist Folgendes. Wenn A und B Formeln des Kalküls sind, dann sind auch die Zeichenfolgen $(A \cdot B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ Formeln des Kalküls. Wir wollen nun Formeln dieser Gestalt so darstellen, dass sie nur ein logisches Zeichen „|" (den Sheffer-Strich) enthalten. Für die Formel $A \cdot B$ und weitere gilt Folgendes:

1. $A \cdot B \equiv \sim(\sim A \vee \sim B) \equiv \sim(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$

   (wir benutzen dabei d), i) und j). Außerdem gehen wir davon aus, dass $(A \mid B)$ wiederum eine Formel ist und dass für sie deswegen die angegebenen Äquivalenzenschemata auch gelten.)

2. $A \vee B \equiv \sim(\sim A \cdot \sim B) \equiv \sim((A \mid A) \cdot (B \mid B))$
   $\equiv \sim(((A \mid A) \mid (B \mid B)) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B)))$
   $\equiv \sim\sim((A \mid A) \mid (B \mid B)) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$

   (e), j), Teilaufgabe 1, j), a))

   oder auch:
   $A \vee B \equiv \sim\sim A \vee \sim\sim B \equiv \sim A \mid \sim B \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$

   (a), i), j))

3. $A \supset B \equiv \sim A \vee B \equiv (\sim A \mid \sim A) \mid (B \mid B)$
   $\equiv \sim\sim A \mid (B \mid B) \equiv A \mid (B \mid B)$

   (c), Teilaufgabe 2, j), a))

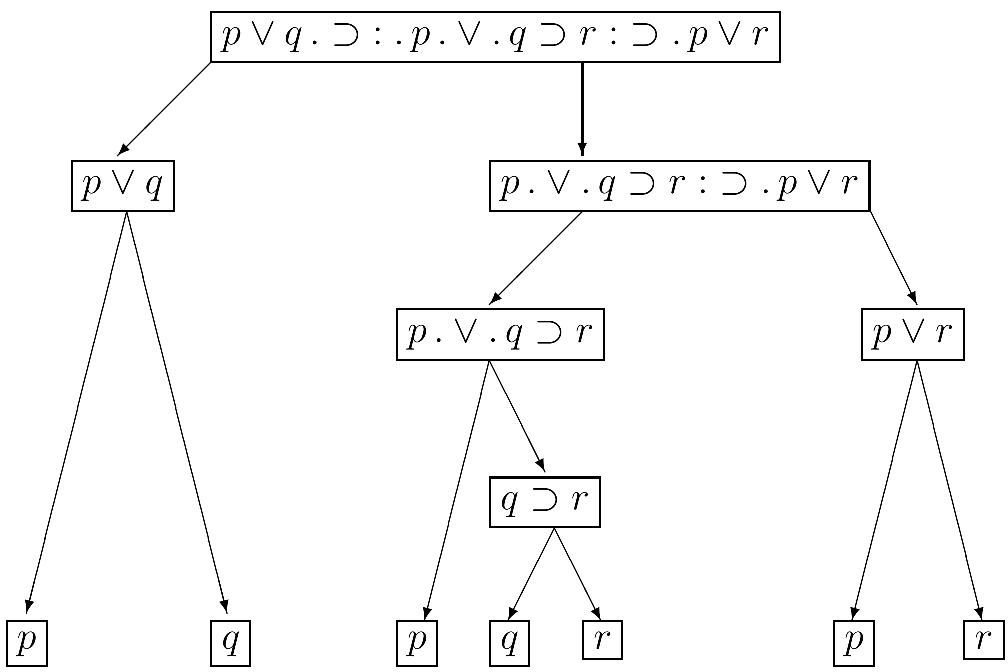
4. $(A \equiv B) \equiv (A \cdot B) \vee ({\sim}A \cdot {\sim}B) \equiv {\sim}({\sim}A \vee {\sim}B) \vee {\sim}(A \vee B)$
$\equiv {\sim}(A \mid B) \vee {\sim}(A \vee B) \equiv (A \mid B) \mid (A \vee B)$
$\equiv (A \mid B) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))$
(h), d)und b), i), i), Teilaufgabe 2)

Aufgabe 27.

Betrachten wir die Zeichenfolge

a) $p \vee q\, .\supset : .\, p\, . \vee .\, q \supset r : \supset .\, p \vee r$

Wenn man die Punkte addiert, die links und rechts von jedem Funktor stehen, und die Summen anschließend miteinander vergleicht, stellt man fest, dass die größte Summe dem ersten Vorkommen des Implikationszeichens entspricht. Ist also die gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls, dann hat sie zwei Teilformeln, und wir können nun prüfen, ob sie ihrerseits auch Formeln des Kalküls sind. Wenn wir das Verfahren wiederholen, stellen wir fest, dass die gegebene Zeichenfolge eine Formel des Kalküls P_R ist und die Zerlegung dieser Formel in ihre Teilformeln sich so wiedergeben lässt:



Wenn man sich dabei vorstellt, dass die Pfeile von unten nach oben gerichtet sind, kann man von diesem Schema die Konstruktionsweise der Formel ablesen. Nun kann man Klammern in der Formel wiederherstellen, indem man den Baum der Formel von unten nach oben durchläuft, die Teilformeln miteinander durch Funktoren verbindet und dabei klammert. Schreibt man nun die Formel mit Klammern auf, sieht diese so aus:

$$((p \vee q) \supset ((p \vee (q \supset r)) \supset (p \vee r)))$$

Die Zeichenfolge c) $\vdash\, :\, .\, p \supset r\, .\, \supset\, :\, p\, .\, \supset\, .\, p \cdot r$ ist auch eine Formel des Kalküls. Sie wird auch geschrieben als:

$$\vdash ((p \supset r) \supset (p \supset (p \cdot r)))$$

Die Zeichenfolgen b) und d) sind keine Formeln des Kalküls.

Aufgabe 28.

Betrachten wir die Formeln

$$p\, .\vee .\, p \vee q$$

$$p \vee q. \vee .p \vee q$$

Wenn wir in diesen die Klammern wiederherstellen, bekommen wir die Formeln

$$(p \vee (p \vee q))$$

$$((p \vee q) \vee (p \vee q))$$

Diese Formeln zeigen das, was man schon der Definition der Formel des Kalküls P_R entnehmen kann, und was in Beweisen einiger Metatheoreme des Kalküls immer wieder benutzt wird (z. B. in den Beweisen von MTR5–MTR7). Dass in einer Formel Klammern vorkommen, weist darauf hin, dass sie das Disjunktionszeichen und folglich weitere Formeln als ihre Teilformeln enthält. Betrachten wir aber die Punkte als die einzige Ausdrucksweise der syntaktischen Struktur von Formeln, können wir die gegebenen zwei Formeln voneinander nicht unterscheiden. Die Punkte zeigen uns das Hauptzeichen der Formeln aber nicht die Anzahl aller ihrer Teilformeln. Sobald wir eine solche Teilformel einer Formel des Kalküls erreichen, die eine in der Terminologie der primitiven Begriffe von *Principia* elementare propositionale Funktion oder elementare Proposition ist, zeigen uns die Punkte ihre Struktur nicht mehr. Über eine Formel des Kalküls, die keine Punkte enthält, kann man nur behaupten, dass sie eine elementare propositionale Funktion ist oder für eine elementare Proposition steht.

Aufgabe 29.

TR5. $\vdash :. q \supset r. \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

1. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ AR5
2. $\vdash :. q \supset r . \supset : {\sim}p \vee q . \supset . {\sim}p \vee r$ $S^{p}_{\sim p}(1)|$
3. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$ DR1

TR6. $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

1. $\vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \supset$
   $:. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$ $S^{p}_{q \supset r}\ {}^{q}_{p \supset q}\ {}^{r}_{p \supset r}$ TR4$|$
2. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$ TR5
3. $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$ RR1 ((1),(2))

Literaturverzeichnis

[**As47**] V. F. Asmus: *Logika*, Moskwa: Ogis, 1947

[**Ber26**] P. Bernays: Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der „Principia Mathematica“, in: *Mathematische Zeitschrift*, 25(1926), S. 305–320

[**Ber27**] P. Bernays: Probleme der Theoretischen Logik, in: P. Bernays: *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1976, S. 1–16

[**Boch70**] J. M. Bocheński: *Formale Logik*, Freiburg, München: Verlag Karl Alber, 1970

[**Boch93**] J. M. Bocheński: *Die Zeitgenössischen Denkmethoden*, Tübingen, Basel, 1993

[**Car73**] R. Carnap: *Grundlagen der Logik und Mathematik*, München: Nymphenburger Verlagshandlung, 1973

[**Chu56**] A. Church: *Introduction to Mathematical Logic*, 1, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956

[**Cohn08**] J. Cohn: *Voraussetzungen und Ziele des Erkennens*, Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1908

[**Cur63**] H. B. Curry: *Foundations of Mathematical Logic*, New York, San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, inc., 1963

[**FBL84**] A. A. Fraenkel; Y. Bar-Hillel; A. Levy: *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1984

[**BS**] G. Frege: Begriffsschrift, in: I. Angelelli (Hrsg.): *Gottlob Frege. Begriffsschrift und Andere Aufsätze*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1974, S. VII–88

[**GLA**] G. Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1977

[**GGA**] G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1962

[Ged] G. Frege: Der Gedanke, in: G. Patzig (Hrsg.): *Gottlob Frege. Logische Untersuchungen*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1966, S. 30–53

[WB] G. Gabriel; H. Hermes; F. Kambartel; Ch. Thiel; A. Veraart (Hrsg.): *Gottlob Frege. Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976

[NS] H. Hermes; F. Kambartel; F. Kaulbach (Hrsg.): *Gottlob Frege. Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1983

[Hil05] D. Hilbert: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, in: A. Krazer (Hrsg.): *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig: 1905, S. 174–185

[HB68] D. Hilbert; P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik*, 1, Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1968

[Kle67] S. C. Kleene: *Mathematical Logic*, New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, inc., 1967

[Mor38] Ch. Morris: Foundations of the Theory of Signs, in: *International Encyclopedy of Unified Science*, 1, Nr. 2 (1938)

[FBB] G. Patzig (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1969

[Re68] N. Rescher: *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1968

[Rus1898] B. Russell: An Analysis of Mathematical Reasoning Being an Inquiry into the Subject-Matter, the Fundamental Conceptions, and the Necessary Postulates of Mathematics, in: N. Griffin; A. C. Lewis (Hrsg.): *The Collected Papers of Bertrand Russell*, 2, London, Boston, Sydney, Wellington: Unwin Hyman, 1990, S. 155–242

[Rus1899] B. Russell: The Classification of Relations, in: N. Griffin; A. C. Lewis (Hrsg.): *The Collected Papers of Bertrand*

Russell, 2, London, Boston, Sydney, Wellington: Unwin Hyman, 1990, S. 136–146

[**Rus03**] B. Russell: *The Principles of Mathematics*, London: George Allen & Unwin, 1956

[**Rus05**] B. Russell: On Denoting, in: R. C. Marsh (Hrsg.): *Bertrand Russell. Logic and Knowledge*, London: George Allen & Unwin LTD, New York: The Macmillan Company, 1971, S. 39–56

[**Rus06**] B. Russell: The Theory of Implication, in: *American Journal of Mathematics*, 28 (1906), S. 159–202

[**Rus08**] B. Russell: Mathematical Logic as Based on the Theory of Types, in: R. C. Marsh (Hrsg.): *Bertrand Russell. Logic and Knowledge*, London: George Allen & Unwin LTD, New York: The Macmillan Company, 1971, S. 57–102

[**Rus23**] B. Russell: Vagueness, in: J. G. Slater; B. Frohmann (Hrsg.): *The Collected Papers of Bertrand Russell*, 9, London, Boston, Sydney, Wellington: Unwin Hyman, 1988, S. 145–154

[**Rus92**] B. Russell: What is Logic?, in: J. G. Slater; B. Frohmann (Hrsg.): *The Collected Papers of Bertrand Russell*, 6, London, New York: Routledge, 1992, S. 54–56

[**Smir96**] E. D. Smirnova: *Logika i Philosophija*, Moskwa: ROSSPEN (Russische Politische Enzyklopädie), 1996

[**Tar35**] A. Tarski: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, in: *Studia Philosophica* (1935), S. 261–405

[**ForLo**] I. Ja. Tschupachin; I. N. Brodskij (Hrsg.): *Formalnaja Logika*, Leningrad: Isdatelstwo Leningradskogo Uniwersiteta, 1977

[**Wes84**] H. Wessel: *Logik*, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984

[**PM**] A. N. Whitehead; B. Russell: *Principia Mathematica*, 1, 2. Aufl., Cambridge, London, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1978

Die moderne Gestalt einer logischen Theorie, die ihre Anwendung auf verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten fördert, könnte für die Verbreitung der Meinung verantwortlich sein, dass Begriffe und Prinzipien der traditionellen formalen Logik entbehrlich sind. Während das Studieren dieser Prinzipien so gut wie keine besonderen Vorkenntnisse voraussetzt, verlangt jede Auseinandersetzung mit einem logischen Formalismus, dass man gewisse logische Techniken beherrscht. Manchmal wird dadurch der Eindruck erweckt, dass nur diejenigen, die schon bestimmte Erfahrungen im Umgang mit Formalismen haben, Nutzen aus der Analyse logischer Theorien ziehen könnten. Der Wunsch, einerseits die Kontinuität der logischen Problematik aufzudecken und andererseits die Aneignung von logischen Vorgehensmethoden und Fertigkeiten zu fördern, bestimmten die Thematik dieses Buches. Hier wurde der Versuch unternommen, eine aussagenlogische Theorie im Hinblick auf historische Umstände ihrer modernen Formulierung darzulegen. Diese Aufgabenstellung führte insbesondere dazu, dass die Analyse der zu betrachtenden Begriffe auf logischen und semantischen Konzepten Freges und Russells, sowie auf Ideen mancher ihrer Zeitgenossen basiert oder auf diese Bezug nimmt. Dieses Bezugnehmen soll der Feststellung spezifischer Merkmale der modernen Gestalt der Logik dienen. Durch das Erfassen dieses Spezifischen kann die Erkenntnis der logischen Grundbegriffe erleichtert werden. Im Buch werden Begriffe und Prinzipien der traditionellen formalen Logik sowie einige der bei ihrer Anwendung entstehenden Probleme analysiert. Am Beispiel eines logischen Kalküls werden die konstruktiven Prinzipien des Aufbaus einer logischen Theorie untersucht. Anschließend werden Besonderheiten des Aussagenkalküls von *Principia Mathematica* analysiert, wobei diese Analyse auf einer der Ideen Churchs basiert. Diese Arbeit wurde als ein Lehrbuch konzipiert und basiert auf den Erfahrungen einer Einführungsveranstaltung, die an der Universität Augsburg für Studierende verschiedener Fachrichtungen angeboten wird.

Logos Verlag Berlin

ISBN 3-8325-0004-9